Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 2, 148--152

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109283

Úlohy.

Úloha 19.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt{x+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}=\sqrt[6]{x^5-\sqrt{2}}\,.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 20.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x^2+y\,(x+1)=67$$
$$y^2+x\,(y+1)=89.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 21.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x+y-a)^2-(x-y+a)\,(x+y)=\frac{3}{4}\,a^2$$

$$(x-y+a)^2-(x+y-a)\,(x-y)=\frac{7}{9}\,a^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 22.

Dokažte, že rovnice o realných součinitelích

$$ax^2+bx+c=0$$
$$(mx+n)^2+mbx+ac+bn=0$$

mají obě současně buď kořeny realné aneb obě kořeny imaginárné.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 23.

Dvoje věžní hodiny bijí zároveň a údery jejich splývají tak, že slyšíme celkem 14 rázů. Víme-li, 1) že sluchu našemu již v jeden splývají ty dva rázy, jež nedělí mezera delší jedné vteřiny, 2) že hodiny první předbíhají druhé o 3 vteřiny a 3) že *údery hodin prvních následují v mezerách 5tivteřinových, údery hodin druhých v mezerách 4vteřinových — jest stanoviti, kolikátou hodinu orloje ony současně odbíjely.*

Technik *Vladimír Ibl.*

Úloha 24.

Která jest hodnota výrazu

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{u^2 + uv - 2v^2}{u^2 - v^2} + \frac{a}{5} \cdot \frac{u^3 + u^2 v - 2v^3}{u^3 - v^3},$$

je-li $u = v$?

Technik *Vladimír Ibl.*

Úloha 25.

Jsou-li a, b čísla racionálná, jest odmocninu

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}}$$

rozložiti ve dvojčlen

$$\sqrt{x + \sqrt{y}} \pm \sqrt{y - \sqrt{y}},$$

kdež x a y jsou rovněž čísly racionálnými. Které jsou potřebné k tomu podmínky?

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 26.

Jest dokázati:

Je-li s součin dvou po sobě následujících čísel celých, jest dvojčlen

$$s^2 + 10s$$

dělitelen číslem 24.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 27.

Kolika jest zapotřebí prvků, aby počet amb s trojnásobným počtem teren a s dvojnásobným počtem kvateren (bez opakování prvků) činil dohromady 1210?

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 28.

Dány jsou první tři členy určité řady

$$a_1 = 1,\ a_2 = 15,\ a_3 = 65;$$

člen obecný jest tvaru

$$a_n = (2n - 1)(An^2 + Bn + C).$$

Vypočítejte hodnoty součinitelů A, B, C a ustanovte součet prvních n členů této řady.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 29.

Jak veliký jest součet n členů řady

$$1.2 - 2.3 + 3.4 - 4.5 + 5.6 - 6.7 + \ldots ?$$

Prof. *Adolf Mach.*

Úloha 30.

Stanoviti jest součet n členů řady:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \ldots.$$

Prof. *Ad. Mach.*

Úloha 31.

A vyšel z vrcholu a obdélníkového pozemku $abcd$ a šel po úhlopříčně do bodu c; B vyšel současně z touž rychlostí, ale šel po obvodě a do c přes vrchol b; A se vrátil do a v tom okamžiku, když B na zpáteční cestě dospěl do b; který jest poměr stran trojúhelníka abc?

Prof. *Ad. Mach.*

Úloha 32.

Majitel pravoúhlého pozemku $abcd$, o straně $ab = 120\ m$, vyšel z vrcholu a přímo do místa m na straně bc; jeho syn vyšel současně z a a současně došel do m, ale šel po obvodu pozemku přes vrchol b; poměr rychlostí $= \frac{5}{7}$.

a) Jak daleko jest bod m vzdálen od bodu b?

b) Do kterých míst strany bc dospěl by otec dříve než syn a do kterých syn dříve než otec?

Prof. *Ad. Mach.*

Úloha 33.

Obdélník daný rozděliti jest ve dva obdélníky navzájem sobě podobné. Mimo to jest dokázati:

a) Kružnice opsané o tyto dva obdélníky protínají se pravoúhelně.

b) Čtverec společné tečny těchto kružnic rovná se polovici původního obdélníka.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 34.

Je-li r poloměr kružnice opsané trojúhelníku, u_1, u_2, u_3 *části výšek počítané od vrcholů ku společnému výšek průsečíku, jest dokázati relaci*

$$4r^3 - (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\, r - u_1 u_2 u_3 = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 35.

Dokázati, že o úhlech trojúhelníka v platnosti jest relace

$$\begin{aligned} tg\,\alpha\, tg\,\beta + tg\,\beta\, tg\,\gamma + tg\,\gamma\, tg\,\alpha \\ = 1 + \sec\alpha \sec\beta \sec\gamma. \end{aligned}$$

Stud. fil. *R. Hruša.*

Úloha 36.

Jsou-li F_1, F_2 *ohniska ellipsy,* M *libovolný bod na ellipse a je-li*

$$\sphericalangle F_2F_1M = \alpha, \quad \sphericalangle F_1F_2M = \beta,$$

jest

$$tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

značí-li ε *číselnou výstřednost ellipsy.*

Stud. fil. *Karel Nečas.*

Úloha 37.

Jsou-li dány na ellipse dva body M, N a vepíšeme-li do trojúhelníků F_1MF_2, F_1NF_2 *kružnice, mají se poloměry těchto kružnic k sobě v poměru*

$$\varrho_1 : \varrho_2 = y_1 : y_2 = tg\frac{\varphi}{2} = tg\frac{\psi}{2},$$

značí-li y_1, y_2 *pořadnice bodů M, N a je-li*

$$\sphericalangle F_1MF_2 = \varphi, \sphericalangle F_1NF_2 = \psi.$$

Stud. fil. *Karel Nečas.*

Úloha 38.

Na ellipse

$$4x^2 + 9y^2 = 900$$

stanoviti jest dva body souměrně sdružené dle přímky

$$6x + 4y - 5 = 0.$$

Kterak lze body takové přímo sestrojiti?

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 39.

Bodem $c(x_0, y_0)$ *na parabole* $y^2 = 2px$ *vésti jest tětivu omezující úseč plošného obsahu U.*

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 40.

Bodem $c(x_0, y_0)$ *na parabole* $y^2 = 2px$ *vedeny jsou tětivy* $\overline{ca}$, $\overline{cb}$, *k nimž přilehají úseče parabolické stejného obsahu U. Jest dokázati, že plocha trojúhelníka abc rovná se 6U.*

Řed. *A. Strnad.*