Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Věstník literární

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 2, 109--120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109285

Věstník literární.

C. Burali-Forti: **Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann.** Un volume in 8°. – 165 pag. Paris, Gauthier-Villars 1897.

Sledujeme-li rozvoj Grassmannovy „Ausdehnungslehre", jak se jeví v posledních třiceti letech*), shledáváme, že mnozí pěstitelé této složité a nesnadné nauky se snaží, aby ji učinili i širším kruhům přístupnou; za tím účelem zpracovali část její geometrie se týkající tím způsobem, že se stává snadno srozumitelnou i těm, již obeznámeni jsou toliko s geometrií elementární. Tím nejen že znalost tohoto důležitého a prospěšného počtu se šíří, ale i zjednává se náležitá průprava ke studiu hlavního díla Grassmannova, v němž vyskytuje se dosti značný počet pojmů abstraktních a operuje se se symboly zdánlivě libovolnými, jichž význam objasňuje se teprve četnými použitími jejich v geometrii a v theoretické mechanice.

Velkou zásluhu o to, že docíleno bylo v té příčině úspěchů značných, má *G. Peano*; byla to hlavně šťastná myšlenka jeho, založiti celý výklad nauky na obsahu čtyřstěnu (i se znaménkem jakostným), jež mu umožnila přispěti k takovému rozšíření Grassmannovy „Ausdehnungslehre", o které se marně namáhal slovutný zakladatel její**).

V jazyku francouzském jest tuším Burali-Forti, známý svým pojednáním: „Il metodo de Grassmann nella Geometria projettiva" (Rend. del Circ. Palermo 1896), první, jenž v samostatném spisu podává základy Grassmannova geometrického počtu, přidržuje se celkem methody Peanovy. Jakou měrou čerpal ze spisu jeho: „Calcolo geometrico", nemůže podepsaný posouditi; nebylť mu spis tento přístupen***).

V předmluvě po krátkém přehledu vývoje počtu geometrického od Leibnize až po naše doby spisovatel promlouvá o prospěšnosti a důležitosti jeho. Užívá-li se totiž v geometrii obvyklých method počtu differenciálního, jest třeba k odvození dosti jednoduchých vztahů geometrických často výpočtů velmi složitých. Tato složitost pochodí odtud, že se zavádí do jisté míry cizí element: souřadnice; s výrazy, sestavenými z těchto souřadnic a z jiných veličin, vykonávají se pak složité trans-

*) Viz článek Dr. V. Schlegela: „Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre" v 41. ročníku „Zeitschrift für Mathematik und Physik".

**) K první orientaci dostačí čtenáři článek referentův: „Základové geom. počtu Grassmannova" v XXV. ročníku tohoto časopisu.

***) Známější jest menší spis Peanův: „Gli elementi di calcolo geom.", který jest též přeložen do němčiny (od Ad. Scheppa).

formace algebraické, jimiž obdrží se krátká jenom formule, invarianta, která připouští teprve výklad geometrický. Počet geometrický neužívá však souřadnic; tu operuje se přímo s útvary geometrickými a každá rovnice má jednoduchý význam, který nás též poučuje o tom, jak stanoviti graficky útvar hledaný. I lze předvídati, že, odvozujíce věty Grassmannovým počtem, dospějeme rychleji k cíli než užijeme-li obyčejného počtu differenciálního; důkazy o tom spisovatel chce provésti ve svém díle na mnohých příkladech. Předmluva končí slovy: „Dnes není více třeba, aby methoda Grassmannova byla doporučována: jest jen třeba, aby ji každý mathematik znal a užíval: stálým používáním jejím ve všech částech mathematiky pozná se její výhodnost a jednoduchost".

Spis Burali-Fortiho rozvrhuje se ve tři kapitoly; v první pojednává se o formách geometrických, ve druhé o formách proměnných a kapitola třetí věnována jest některým applikacím.

Základní pojmy geometrických forem rozličných stupňů definuje spisovatel dle Peana takto: Buďtež $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ body v prostoru, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ koefficienty (čísla realná) těmto bodům po řadě příslušející, PQR libovolný trojúhelník; značí-li A_k PQR poměrné číslo obsahu čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou body A_k, P, Q, R se znaménkem $+$ neb $-$ dle známého pravidla Möbiusova určeným, utvořme součet

$$x_1 A_1 PQR + x_2 A_2 PQR + \ldots + x_n A_n PQR.$$

Jiná soustava bodů $A'_1, A'_2, \ldots, A'_m$ s koefficienty $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ může býti tak sestavena, že platí rovnice

$$x_1 A_1 PQR + x_2 A_2 PQR + \ldots + x_n A_n PQR = x'_1 A'_1 PQR + x'_2 A'_2 PQR + \ldots + x'_m A'_m PQR.$$

Na poloze a velikosti $\triangle$ PQR tu nezáleží, pročež jsme oprávněni tuto rovnici psáti též symbolicky takto:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = x'_1 A'_1 + x'_2 A'_2 + \ldots + x'_m A'_m.$$

Jest nesčíslné množství soustav bodových, jež vyhovují této rovnici; všechny souvisí spolu určitým způsobem*). Můžeme též říci, že jest jim společný jakýsi abstraktní element geometrický, o kterém za to máme, že jest jejich entitou; vhodně jej označíme výrazem $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n$ a jmenujeme *formou stupně prvního.*

Podobný jest význam symbolického označení *forem stupně druhého a třetího*, totiž

$$x_1 A_1 B_1 + x_2 A_2 B_2 + \ldots + x_n A_n B_n$$

a

$$x_1 A_1 B_1 C_1 + x_2 A_2 B_2 C_2 + \ldots + x_n A_n B_n C_n;$$

*) Z geometrie hmot jest známo, že všechny takové soustavy hmotných bodů, není-li součet koefficientů roven nulle, mají týž střed hmotný.

místo bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vyskytují se v prvním výrazu úsečky $A_1 B_1, A_2 B_2, \ldots, A_n B_n$, ve druhém trojúhelníky $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3, \ldots, A_n B_n C_n$.

Symbolické rovnice vztahující se k těmto formám:

$$x_1 A_1 B_1 + x_2 A_2 B_2 + \ldots + x_n A_n B_n = x'_1 A'_1 B'_1 + x'_2 A'_2 B'_2 + \ldots + x'_m A'_m B'_m,$$

$$x_1 A_1 B_1 C_1 + x_2 A_2 B_2 C_2 \ldots + x_n A_n B_n C_n = x'_1 A'_1 B'_1 C'_1 + x'_2 A'_2 B'_2 C'_2 + \ldots + x'_m A'_m B'_m C'_m$$

stojí zde místo rovnic numerických:

$$x_1 A_1 B_1 PQ + x_2 A_2 B_2 PQ + \ldots + x_n A_n B_n PQ = x'_1 A'_1 B'_1 PQ + x'_2 A'_2 B'_2 PQ + \ldots + x'_m A'_m B'_m PQ,$$

$$x_1 A_1 B_1 C_1 P + x_2 A_2 B_2 C_2 P + \ldots + x_n A_n B_n C P = x'_1 A'_1 B'_1 C'_1 P + x'_2 A'_2 B'_2 C'_2 P + \ldots + x'_m A'_m B'_m C'_m P,$$

jež platí pro kteroukoli polohu bodů P a Q.

K těmto definicím připojují se ještě jiné, týkající se počítání s formami geometrickými. Pro sečítání forem stejného stupně platí totéž pravidlo jako pro sečítání algebr. mnohočlenů; násobení dvou forem, zvané *progressivním*, liší se však od násobení mnohočlenů ve dvou věcech: *a*) lze takto násobiti jen formy stupně r-tého a s-tého, pro něž $r + s \leqq 4$; *b*) jest šetřiti bedlivě pořádku činitelů velkými písmeny označených, poněvadž vyměníme-li v součinu dva sousední činitele, změní se znaménko jeho. Neboť dle pravidla Möbiusova o znaménku čtyřstěnu platí pro čtyřstěn ABCD, t. j. součin čtyř bodů A, B, C, D, rovnice

$$ABCD = -BACD = -ACBD = -ABDC.$$

Není tudíž součin dvou lineárních forem kommutativní, $AB = -BA$, z čehož plyne $AA = 0$. Obecně, značí-li R a S dvě formy stupně r-tého a s-tého, jest

$$RS = (-1)^{rs} SR.$$

Po tomto výkladu základních pojmů spisovatel přistupuje k jednomu důležitému případu zvláštnímu; jest to rozdíl dvou bodů $B - A$, Hamiltonův *vektor*. Na základě věty, že dva vektory $B - A$ a $D - C$ jsou sobě rovny, jsou-li úsečky AB a CD rovnoběžny, téhož směru a modulu (délky), lze definovati vektor jako abstraktní prvek geometrický, funkci určitého běhu, směru a velikosti.

Používajíce pravidel o počítání formami, ukážeme snadno, že součet bodu A a vektoru I jest bod B, který obdržíme translací bodu A o vektor I, že součin bodu O a vektoru I jest úsečka $O(O + I)$, že součet několika vektorů jest vektor, jenž se sestrojí známým způsobem pomocí mnohoúhelníka vektorů. Podmínka, že dva vektory I a J jsou rovnoběžny, vyvozena jest ve dvojím tvaru: *a*) $J = x I$, *b*) $IJ = 0$; podobně podmínka, že tři vektory I, J a K jsou komplanární, jest buď $K = x I + y J$ neb $IJK = 0$. Druhý tvar těchto podmínek měl býti uveden až později, když byl vysvětlen součin dvou (tří) vektorů a součin bodu a dvou (tří) vektorů (na str. 14. a 15.).

Součin dvou vektorů I a J nazývá se *bivektorem*. Ten dán jest trojúhelníkem OIJ, jehož jedním vrcholem jest libovolný bod O a jehož dvě sousední strany stanoveny jsou oběma vektory I a J. Aby dva bivektory IJ a KU sobě se rovnaly, musí býti stejny (i co do znaménka) trojúhelníky OIJ a OKU jim příslušející, nechť jest bod O volen kdekoliv. Bivektor jest tudíž geometrický prvek abstraktní, který jest funkcí určitého běhu roviny (společného všem rovnoběžným rovinám určeným vektory I a J), určitého smyslu rotace (v některé z těchto rovin) a modulu (dvojnásobné plochy trojúhelníka OIJ). Jest zřejmo, že bivektor tak se liší od trojúhelníka ABC, jenž jest součinem tří bodů, jako se různí vektor od úsečky. Graficky znázorníme bivektor (B—A) (C—A) vhodněji rovnoběžníkem, jehož sousední strany jsou vektory B—A a C—A; poměrné číslo jeho plochy jest patrně modul bivektoru, i můžeme psáti mod (UV) = mod U mod V sin (U, V). Důležitost bivektoru, zvláště v geometrii sil (kde mu odpovídá dvojice sil), na tom se zakládá, že lze každý bivektor vyjádřiti součtem dvou rovnoběžných úseček stejně dlouhých, směru protivného.

Součin tří vektorů I, J, K slove *trivektorem*. Je-li O libovolný bod, jest $OIJK = O\,(O + I)\,(O + J)\,(O + K)$, tudíž značí OIJK čtyřstěn, jehož obsah i znaménko nezávisí na poloze bodu O. Takovým čtyřstěnem určen jest trivektor; dva trivektory jsou totiž stejny, rovnají-li se sobě (co do velikosti i co do znaménka) oba čtyřstěny jim příslušné.

Když spisovatel vyložil tyto součiny, přechází k rotaci v rovině, vysvětluje úhel dvou vektorů (U, V), radiant a úhel pravý, zvláště pak rotační faktor i. Je-li I vektor nerovnající se nulle, značí i I vektor I otočený o positivní úhel pravý $\frac{\pi}{2}$. Snadno lze ukázati, že i^n má všechny vlastnosti čísla $(\sqrt{-1})^n$. Obecněji: násobiti vektor I číslem komplexním $x + iy$ znamená násobiti I modulem čísla a otočiti takto nabytý vektor o úhel rovný argumentu jeho.

K bivektoru UV (Grassmannovu externímu součinu) druží se součin UiV (interní součin), pro který platí vzorec

$$UiV = \text{mod}\ U\ \text{mod}\ V\ \cos\ (U, V).$$

Z toho plyne $UiU = (\text{mod}\ U)^2$; označíme-li interní dvojmoc vektoru UiU krátce U^2, obdržíme

$$U^2 = (\text{mod}\ U)^2,\ (U + V)^2 = U^2 + 2UiV + V^2.$$

Schvalovati sluší, že spisovatel k tomuto i k dalším §§. přidává mnohé příklady; na těch poznati lze nejlépe četné přednosti methody Grassmannovy. Vizmež jen, jak jednoduchým a případným způsobem vyvodíme na př. základní věty trigonometrické. Jsou-li A, B, C vrcholy trojúhelníka, položme $I = C - B$, $J = A - C$, $K = B - A$, pročež $I + J + K = 0$. Násobíme-li tuto rovnici jednou I, po druhé J a srovnáme-li výsledky, obdržíme $IJ = JK = KI$, což jest v jiné formě věta sinová. Povýšíme-li však rovnici $I + J = - K$ interně na mocnost druhou, obdržíme $K^2 = I^2 + J^2 + 2I{i}J$, což jest věta cosinová.

Nyní teprve vykládá Burali-Forti důležitý pojem *indexu**). Vektor U stojí kolmo na bivektoru u, stojí-li pro libovolný bod O úsečka OU kolmo na rovině Ou. I jest pak index bivektoru u vektor U kolmý k u, jehož modul rovná se mod u; při tom trivektor uU musí míti smysl kladný. Používáme pak pro tento index U označení $|\, u$; naopak jest též u indexem vektoru U, tudíž $u = |\, U$. Základní vzorce pro počítání indexy jsou:

$$||\, u = u,\ |\, xu = x \,|\, u,\ u \,|\, v = v \,|\, u,\ |\, (u + v) = |\, u + |\, v,$$
$$(u + v) \,|\, w = u \,|\, w + v \,|\, w,$$

kde u, v, w značí vektory neb bivektory, x pak číslo realní. Internímu součinu dvou vektorů lze teď dáti formu, v jaké se vyskytuje u Grassmanna, totiž $U \,|\, V$; dle třetího z uvedených vzorců součiny takové jsou kommutativní. Podmínku, že dva vektory U a V stojí na sobě kolmo, můžeme psáti ve tvaru

$$U \,|\, V = 0.$$

V §. 3. této kapitoly spisovatel zabývá se redukcemi forem geometrických na tvary nejjednodušší. Výrody jeho jsou krátce tyto:

1) Pro formy stupně prvního. Je-li dána forma

$$S = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n,$$

násobme obě strany trivektorem ω, který pokládáme za jednotku (pro libovolný bod A_k jest pak číslo $A_k \omega = 1$); tím obdržíme

$$S\omega = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

kteréž číslo nazývá se *hmotou* formy stupně prvního.

Mohou tu nastati dva případy: je-li $S\omega = 0$, můžeme formu S redukovati na vektor $I = x_1 (A_1 - 0) + x_2 (A_2 - 0) + \ldots + x_n (A_n - 0)$, kde O jest libovolný bod v prostoru; jestliže $S\omega \neq$ (se nerovná) 0, jest nejjednodušší tvar formy S součin hmoty její $S\omega$ a bodu $\frac{S}{S\omega} = O + \frac{1}{S\omega} I$, který slove *středem hmotným* formy dané.

2) Pro formy stupně druhého. Každou takovou formu lze převésti na tvar

*) Grassmann užívá tu terminu: Ergänzung. Terminologie Peanova odchyluje se ještě na jiných místech od původní terminologie Grassmannovy.

$$s = A_1 I_1 + A_2 I_2 + \ldots + A_n I_n;$$
redukci provedeme tu snadno, píšeme-li
$$A_k I_k = (A_k - O) I_k + OI_k.$$
Tím nabudeme $s = OI + u$, kde vektor
$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$
a bivektor
$$u = (A_1 - O) I_1 + (A_2 - O) I_2 + \ldots + (A_n - O) I_n.$$
Můžeme tudíž každou formu druhého stupně redukovati na součet úsečky a bivektoru a to nesčíslně mnoha způsoby, poněvadž redukovaný tvar závisí teď na poloze bodu O. Ve zvláštních případech může se forma s rovnati jen úsečce neb jen bivektoru; společnou podmínkou pro tato zjednodušení jest, že invarianta formy, čtyřstěn ss, rovná se nulle. V geometrii sil jest soustava sil v prostoru takovou formou stupně druhého; OI jest výslednicí a bivektor u výslednou dvojicí této soustavy.

3) Pro formy stupně třetího. Píšeme-li formu stupně třetího ve tvaru $\sigma = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_n u_n$, dokážeme pomocí stejniny $A_k u_k = (A_k - O) u_k + Ou_k$, že σ rovná se buď trivektoru neb trojúhelníku dle toho, jestliže výraz
$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
se rovná neb nerovná nulle.

Po těchto redukcích forem následuje ve spise Burali-Fortiho výklad prvků projektivních. Důležitý jest tu pojem *polohy* formy geometrické, k jehož označení spisovatel užívá zkratky posit (position). Definujme: Poloha formy stupně prvního (posit S), pro kterou $S\omega \neq 0$, jest dána jejím středem hmotným; poloha vektoru (posit I) jest dána bodem úběžným, společným všem vektorům téhož běhu. Mluvíme též o *bodu projektivním*, (ať jest již v konečnu nebo v nekonečnu), abychom vyjářili polohu formy stupně prvního.

Poloha formy stupně druhého (posit a) o invariantě $aa = 0$, kterou tedy lze redukovati buď na úsečku AB neb na bivektor u, jest dána buď přímkou neomezenou, v níž leží úsečka AB neb během roviny příslušným bivektoru u, t. j. přímkou úběžnou ve smyslu geometrie projektivní. Užíváme též rčení: *přímka projektivní* místo: poloha formy stupně druhého, jejíž invarianta $= 0$.

Konečně poloha formy stupně třetího (posit α) jest dána *rovinou projektivní*, která může býti též rovinou úběžnou.

Formy stupně prvního A, B, C,... jmenujeme *kollineárními*, jsou-li položeny na téže přímce projektivní (na př. vektory rovnoběžné s touž rovinou); formy A, B, C, ... slovou *komplanární*, jsou-li položeny na téže rovině projektivní (na př. všechny vektory a bivektory).

O pěti formách stupně prvního A, B, C, D, E platí relace

$$BCDE.A + CDEA.B + DEAB.C + EABC.D + ABCD.E = 0,$$
o čtyřech formách komplanárních A, B, C, D relace
$$BCD.A - CDA.B + DAB.C - ABC.D = 0,$$
a o třech formách kollineárních A, B, C relace
$$BC.A + CA.B + AB.C = 0.$$
V první z těchto rovnic jsou činitelé BCDE, CDEA atd. čísla, podobně jsou čísla v rovnici druhé činitelé BCD, CDA atd. a ve třetí BC, CA,... atd.

Vedle násobení progressivního vyskytuje se v geometrickém počtu Grassmannově ještě jiný druh násobení, jež zoveme *regressivním* (§. 4.). Regressivní součin formy stupně druhého a třetího definuje se v díle Burali-Fortiho rovnicí
$$AB.PQR = APQR.B - BPQR.A$$
a regressivní součin dvou forem stupně třetího rovnicí
$$ABC.PQR = APQR.BC + BPQR.CA + CPQR.AB.$$
Tento postup nelze schvalovati; takové zdánlivě libovolné definice nemohou čtenáře uspokojiti, poněvadž mu není dost jasný původ, vhodnost a účel jejich. Lépe by tu bylo založiti výklad na úlohách: Jest určiti průsečík přímky dané body A a B s rovinou PQR aneb určiti průsečnici dvou rovin ABC a PQR. Nalezlo by se, že tyto útvary dány jsou výrazy na pravé straně uvedených dvou rovnic; z toho plyne, že jest možno pokládati výrazy ty za jednoduché vztahy jednak přímky AB a roviny PQR, jednak dvou rovin ABC, PQR. Opírajíce se ještě o jiné důvody, vyjádřujeme vztahy tyto dle Grassmanna tím způsobem, že díme: průsečík přímky AB a roviny PQR jest výsledek násobení AB. PQR (přesněji: bod ten jest posit AB. PQR); průsečnice rovin ABC a PQR jest součin ABC.PQR. Nyní lze přikročiti k podobným součinům forem stupně druhého a třetího vůbec; vždy bude regressivním součinem formy stupně druhého (jejíž invarianta $= 0$) a stupně třetího forma stupně prvního, součinem dvou forem stupně třetího forma stupně druhého, obecně součinem forem stupně r-tého a s-tého (při čemž $r + s > 4$) forma stupně $r + s - 4$-tého. Rovnice
$$RS = (-1)^{rs} SR$$
poučuje nás o tom, kdy jsou regressivní součiny kommutativní a kdy nemají té vlastnosti; distributivní jsou součiny ty vždycky.

Sestavíme-li hlavní vzorce, týkající se násobení forem stupně prvního A, B, C, ..., druhého a, b, .., třetího α, β, ..., jako jsou

$$AB.C = A.BC, \qquad \alpha\beta.\gamma = \alpha.\beta\gamma,$$
$$AB.a = A.Ba, \qquad \alpha\beta.a = \alpha.\beta a,$$
$$AB.\alpha = A\alpha.B - B\alpha.A, \qquad \alpha\beta.A = \alpha A.\beta - \beta A.\alpha \text{ atd.},$$

poznáváme, jak jest v nich vyhověno důležitému principu duality pro formy geometrické.

V §. 5. pojednává se o souřadnicích. Jsou-li dány čtyři formy stupně prvního A_1, A_2, A_3, A_4 té vlastnosti, že $A_1 A_2 A_3 A_4 \neq 0$, lze každou formu stupně prvního S vyjádřiti součtem

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4,$$

každou formu stupně druhého s součtem

$$y_1 A_1 A_2 + y_2 A_1 A_3 + y_3 A_1 A_4 + y_4 A_2 A_3 + y_5 A_3 A_4 + y_6 A_4 A_2,$$

a každou formu stupně σ součtem

$$z_1 A_2 A_3 A_4 + z_2 A_3 A_4 A_1 + z_3 A_4 A_1 A_2 + z_4 A_1 A_2 A_3.$$

Čísla x_k, y_k, z_k jsou po řadě souřadnice forem S, s, σ v soustavě A_1, A_2, A_3, A_4. Výrazy ty se zjednoduší, jsou-li formy S neb s komplanární s A_1, A_2, A_3 ($S = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$, $s = y_1 A_2 A_3 + y_2 A_3 A_1 + y_3 A_1 A_2$) aneb je-li S kollineární s A_1, A_2 ($S = x_1 A_1 + x_2 A_2$).

Volíme-li za základní formy, k nimž vztahujeme všechny ostatní, bod O a tři vektory I, J, K, jež nejsou komplanární, můžeme psáti S ve tvaru $m\,O + x\,I + y\,J + z\,K$, kde m značí hmotu formy; pro bod P nabudeme dle toho výraz $O + x\,I + y\,J + z\,K$ a pro vektor U výraz $x\,I + y\,J + z\,K$. Čísla x, y, z jsou pak souřadnice Cartesiovy bodu P. Abychom obdrželi soustavu pravoúhlou, nejvíce v analytické geometrii užívanou, musí vektory I, J, K vyhovovati ještě těmto podmínkám:

$$I^2 = J^2 = K^2 = 1, \quad J \mid K = 0, \quad K \mid J = 0, \quad I \mid J = 0,$$
$$I = \mid JK, \; J = \mid KI, \; K = \mid IJ.$$

Na některých příkladech, jako jsou: určení vzdálenosti dvou bodů, vyhledání rovnice přímky a roviny, stanovení vzdálenosti bodu od roviny, vzdálenosti dvou mimoběžek atd. ukazuje spisovatel, jak jednoduchým způsobem lze vzorce analytické geometrie Cartesiovy odvoditi z obecné theorie forem.

Obsahem druhé a třetí kapitoly spisu Burali-Fortiho jest vlastní geometrie differenciální, t. j. část geometrie, jež se obyčejně vykládá v knihách jednajících o počtu differenciálním v oddílu nadepsaném: Užívání počtu differenciálního v geometrii. Netřeba se šířiti o tom, jakou důležitost má vyšší analysis založená na methodách Grassmannových; bylo by si jen přáti, aby byla znalci nauky Grassmannovy pěstována mnohem intensivněji než doposud. Nemalých zásluh o ni dobyli si Peano a po něm Burali-Forti, jejichž spisy literatura o tomto odvětví geometrie skutečně jest obohacena.

Především jde tu o výklad pojmu: limita formy a pojmu na něm se zakládajícího: derivace formy. Budiž $f(t)$ geom. forma, funkce numerické neodvisle proměnné t a t_0 číslo, jemuž se tato proměnná blíží; i pravíme, že forma f_0 (téhož stupně jako f) jest limitou funkce f, platí-li pro libovolný trojúhelník P Q R

$$\lim_{t=t_0} f(t)\,PQR = f_0\,PQR$$

pro formy stupně prvního, neb lim $f(t)$ PQ $= f_0$ PQ pro formy stupně druhého, neb lim $f(t)$ P $= f_0$ P pro formy stupně třetího. Když takto vymezování forem bylo převedeno na vymezování algebraické, může se podržeti i pro formy obvyklý výměr první derivace, totiž

$$\frac{d f(t)}{dt} = f'(t) = \lim_{h=0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Pro differencování součtů a součinů forem platí známá pravidla obyčejného počtu differenciálního; při součinech jest jen míti náležitý zřetel k pořádku činitelů. Znamení indexu $|$ pokládejme při tom za stálý faktor. Derivace bodu jest vektor, derivace vektoru, bivektoru neb trivektoru opět vektor, bivektor neb trivektor. Z první derivace odvozují se známým způsobem derivace vyšších stupňů. Věta Taylorova platí též pro formy geometrické; píšeme-li ji se zbytkem ve tvaru Lagrange-ově

$$f(t+h) = f(t) + h f'(t) + \frac{h^2}{2!} f''(t) + \dots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{h^n}{n!} \mathrm{F},$$

značí forma F střední hodnotu všech forem $f^{(n)}(t)$, jež obdržíme, mění-li se t od t do $t+h$.

V §. 2. této kapitoly spisovatel vyšetřuje křivky nejprve rovinné, pak prostorové; výměry a věty dle principu duality sobě příslušející sestavuje při tom vždy vedle sebe. Obmezíme-li se na rovinu projektivnou, jest formou stupně prvního P (t) stanovena křivka P, která jest místem všech posit P (t), a formou stupně druhého $p(t)$ obalující čára p všech projektivních přímek posit $p(t)$, mění-li se t v daném intervallu. Součin některého bodu P křivky P a jeho první derivace P$'$ (obecněji PP$^{(m)}$, je-li m nejmenší z celých čísel x, pro něž PP$^{(x)} \neq 0$) stanoví tečnu křivky v tom bodě; součin některé přímky p křivky p a její první derivace p' stanoví charakteristický bod obalující čáry na přímce této (průsečík dvou nekonečně blízkých přímek čáru p vytvořujících). Na podobných úvahách spočívá theorie křivek prostorových. Budiž zde jen vytknuto, že tečna k takové křivce P, dané formou prostorovou P (t), v bodě P jest opět přímka PP$'$; součin PP$'$P$''$ (jestliže se nerovná nulle, jinak obecněji PP$^{(m)}$ P$^{(n)}$) jest rovina oskulační křivky v tom bodě, P $|$ (PP$'$. ω) rovina normální, PP$'$ $|$ (PP$'$P$''$. ω) rovina rektifikační (vedená tečnou kolmo k rovině oskulační) atd.

Všeobecnou theorii ploch Burali-Forti nepodává; obmezuje se ve svém spise na plochy přímkové, jichž theorii vyvozuje nezávisle na theorii obecné. Je-li $a(t)$ forma druhého stupně o invariantě $= 0$, jest místem všech bodů položených na přímkách $a(t)$ (mění-li se t v daném intervallu) plocha přímková a. Rovina tečná ku ploše v bodě P ležícím na přímce a (tudíž $\mathrm{P}a = 0$) jest součin $\mathrm{P}a'$ (obecněji $\mathrm{P}a^{(m)}$, je-li opět m nejmenší z celých čísel, pro něž $\mathrm{P}a^{(x)} \neq 0$); rovina α vedená přímkou a (tudíž $\alpha a = 0$) dotýká se plochy v bodě $\alpha a'$. U jednoho druhu ploch přímkových (ploch zborcených) pro každou hodnotu t roviny tečné ve kterýchkoli dvou bodech přímky povrchové (vyjma přímky singulární) jsou různé, což lze vyjádřiti podmínkou $a' a' \neq 0$, t. j. a' jest vždy součet úsečky a bivektoru; u druhého druhu těchto ploch (ploch rozvinutelných) pro každou hodnotu t v každém bodě přímky povrchové (vyjímaje nejvýše v jednom) roviny tečné sjednocují se s rovinou pevnou, zvanou rovinou tečnou podél celé přímky a, což se vyjadřuje rovnicí $a'a' = 0$, t. j. a' jest buď úsečka neb bivektor. Oba tyto druhy ploch přímkových popsány jsou v oddílech 46. a 47. podrobněji; zejména stanoví se u ploch zborcených výrazy pro rovinu asymptotickou povrchové přímky ($a\,\omega.\,a'$ neb $a'\,\omega.\,a$, značí-li jako výše ω trivektor jednotkový), pro rovinu centrální $[a \mid (a\omega.\,a'\omega)]$ a pro bod centrální ($[a \mid (a\,\omega.\,a'\,\omega)]\,a'$), pojednává se o křivce strikční, o hyperboloidu oskulačním podél povrchové přímky atd.; u ploch rozvinutelných vyšetřuje se křivka úvratu a vlastnosti její.

V § 4. podává se theorie křivosti čar. Spisovatel definuje tu differenciál oblouku křivky P výrazem $ds = \mathrm{mod}\, d\mathrm{P}$, z čehož odvozuje integrací vzorec pro oblouk s; přechází pak ke křivosti čar a útvarům, které s ní souvisí, jako: poloměr křivosti ϱ, střed křivosti, poloměr torse τ atd. Pro každý bod P křivky jsou v té příčině důležity tři formy:

$$\mathrm{T}(s) = \frac{d\mathrm{P}}{ds},\quad \mathrm{N}(s) = \varrho\frac{d\mathrm{T}}{ds},\quad \mathrm{B}(s) = \mid \mathrm{T}(s)\,\mathrm{N}(s);$$

i jest pak T vektor jednotkový rovnoběžný s tečnou, N vektor jednotkový rovnoběžný s hlavní normálou, B vektor jednotkový rovnoběžný s binormálou v bodě P. Křivost čáry stanoví se výrazem $\frac{1}{\varrho} = \mathrm{mod}\,\frac{d\mathrm{T}}{ds}$, torse její výrazem

$$\frac{1}{\tau} = \mathrm{mod}\,\frac{d\mathrm{B}}{ds}.$$

Z rovnice pro N (s) plyne bezprostředně první rovnice Frenetova

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds} = \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{N},$$

s rovnicí pro $\frac{1}{\tau}$ souvisí druhá rovnice Frenetova

$$\frac{dB}{ds} = \frac{1}{\tau} N;$$

třetí rovnici
$$\frac{dN}{ds} = -\frac{1}{\varrho} T - \frac{1}{\tau} B$$

odvodíme snadno ze vzorce N = | BT vyjadřujícího, že vektor N stojí kolmo na vektorech B a T. Že výměr křivosti, jak jej spisovatel podává, souhlasí s výměrem $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\alpha}{ds}$, který se obyčejně ve spisech geometrických vyskytuje, dokazuje se v odd. 52. b), ale jen pro křivky rovinné; důkaz bylo by tedy rozšířiti i na křivky prostorové. V témž oddílu odvozují se též některé vlastnosti evolut a kotálnic; zde dokázána jest na př. věta Savary-ho o kotálnicích a j. V posledním oddílu kapitoly druhé vypisuje se, jak vzniká indikatrix sférická vektoru I; je-li I jedním z uvedených vektorů T, B, N obdržíme sférickou indikatrix tangenty, binormály a normály hlavní vzhledem ku křivce P, kteréž křivky jsou v určitém vztahu ku první, druhé a třetí křivosti čáry P.

V kapitole třetí: „Applications“ spisovatel ukazuje, jak lze výhodně užíti rovnic Frenetových k vyšetření mnohých vlastností křivek a ploch přímkových s nimi souvisících. §. 1. věnován jest šroubovici, pak pojednává se o plochách polárních a rektifikačních, o plochách hlavních normál a binormál dané křivky prostorové, vyšetřují se plochy zborcené, jichž křivka strikční jest dána a plocha rozvinutelná vytvořená přímkou, jejíž poloha vzhledem k čtyřstěnu PTNB jest stálá. Konečně probírají se v §. 3. trajektorie orthogonální tvořících přímek plochy přímkové vůbec, evoluty a evolventy zvláště, a v §. 4. křivky Bertrandovy, t. j. křivky, mezi jejichž křivostí a torsí stává lineární relace s konstantními koefficienty tvaru

$$\frac{\sin\varphi}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{\tau} = \frac{\sin\varphi}{u} \quad (\pi > \varphi > 0,\ u \neq 0).$$

Jako dodatek připojeny jsou k těmto třem kapitolám knihy Burali-Fortiho čtyři krátké poznámky. První týká se forem, které jsou funkcemi dvou neb více proměnných; tu definují se nejprve obvyklým způsobem částečné derivace a úplný differenciál takových forem. Je-li zvláště $f(u, v)$ forma stupně prvního, vytvořuje posit $f(u, v)$ plochu, mění-li se u a v v mezích daných.

V poznámce druhé stanoví se rovina tečná k této ploše P (u, v); jest to rovina P $\frac{dP}{du}\frac{dP}{dv}$.

Obsahem poznámky třetí jest differenciální parametr stupně prvního ∇u; dle Hamiltona sluje tak vektor vyhovující rovnici $du = \nabla u \mid d\mathrm{P}$, značí-li číslo u funkci polohy proměnlivého bodu P (která může býti zase funkcí souřadnic x, y, z).

Je-li $\mathrm{P} = \mathrm{O} + x\mathrm{I} + y\mathrm{J} + z\mathrm{K}$ lze ukázati, že

$$\nabla u = \frac{du}{dx}\mathrm{I} + \frac{du}{dy}\mathrm{J} + \frac{du}{dz}\mathrm{K}.$$

V poznámce čtvrté konečně pojednává se o geometrickém významu koefficientů E, F, G atd., vyskytujících se na pravé straně rovnic

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$
$$d^2\mathrm{P} \mid \mathrm{K} = \mathrm{D}\,du^2 + 2\,\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2,$$

kde s jest oblouk křivky na ploše P (u, v) a K vektor jednotkový, kolmý na rovinu tečnou v bodě P ku ploše. Koefficienty ty mají, jak známo, zvláštní důležitost pro souřadnice křivočaré na ploše.

Toť v hlavních rysech obsah knihy Burali-Fortiho; budiž podepsanému dovoleno připojiti k tomu ještě několik málo poznámek. Sloh spisu jest celkem jasný, na některých místech však příliš stručný, což bude při studiu poněkud vaditi začátečníkovi, pro kterého jest kniha určena; je-li mu již nesnadno, seznámiti se s celou řadou nových pojmů a osvojiti si mnohá pravidla o provádění nezvyklých operací početních, zvýšují se ještě obtíže s tím spojené nemálo, jsou-li vývody spisovatelovy tak stručné, že je lze sledovati jen s velkou pozorností. Překoná-li však čtenář tyto obtíže, poskytne mu kniha Burali-Fortiho užitek hojný.

Obrazců nalézá se v knize jen málo (celkem 8); bylo by jen s prospěchem, kdyby jich bylo bývalo k objasnění mnohých vět více vloženo (na př. k větě 4. na str. 33). Některé jednoduché obrazce může si ovšem čtenář snadno sestrojiti dle textu.

Chyb tiskových referent nalezl několik; tak má státi na str. 17. řád. 8. zdola „trivecteur“ místo „triangle“, na str. 28. řád. 9. shora $\mid (u + v)$ místo $(u + v)$, na str. 39. řád. 2. shora $=$ místo $+$, na str. 48. řád. 5. zdola $+$ místo $-$, na str. 52. řád. 2. zdola s místo σ a j.

Prof. *A. Libický.*

Poznámka redakce.

Uveřejňujeme tuto poněkud obšírnější recensi spisu Burali-Fortiho hlavně z toho důvodu, že podán jest v ní krátký přehled geometrického počtu Grassmannova v té formě, v jaké jej zpracovali někteří vlašští a francouzští mathematikové, jako Peano, Carvallo, Caspary a j. Vzhledem k tomu, že jinde zájem na této theorii stále vzrůstá a že v naší mathematické literatuře dosud málo o ní jest napsáno, pokládáme takový přehled za prospěšný i poučný.