Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

B. Dratvová
Metodologie matematiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 60--71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109345

formation, en ce même mouvement idéal, des mouvements uniformes rectilignes. Si, maintenant, l'on élimine ce mouvement auxiliaire, on obtient la transformation des mouvements Galiléens, uniformes et rectilignes, en des mouvements elliptiques de Kepler (20). Une telle transformation n'est pas possible pour E., puisqu'il se borne volontairement aux transformations ponctuelles.

Maxwell, Helmholtz et Boltzmann avaient déjà fait usage des équations de Lagrange, exprimées en coordonnées générales, même en dehors de la mécanique. Il y a là des premiers essais et des germes d'une théorie de la rélativité plus large que ne l'est celle d'E. Si cette théorie ne s'est pas développée, c'est, à mon avis, que les physiciens considéraient la théorie de Hamilton-Jacobi comme une partie des mathématiques pures.

La gravifique de cette théorie élargie de la relativité ne cherchera pas des équations de champ comme le fait E. Elle cherchera des transformations (celles de Sommerfeld) par lesquelles le mouvement de Galilée est changé en un mouvement qui se produit sous l'influence de la gravité. Pour les planètes, il suffirait de trouver une seule fonction active S (21) satisfaisant, à l'infini et au centre, à certaines conditions.

C'est ainsi que la mécanique classique, employée comme instrument dans la gravifique d'E.. nous amène à des possibilités qui sont au delà de la portée de cette théorie se bornant aux transformations ponctuelles. Les adversaires de la théorie d'E., qui s'accrochent à la signification absolue de la géométrie euclidéenne, devraient se rendre compte que l'espace à n dimensions de la mécanique classique (pour un système à n degrés de liberté) fait usage, depuis plus d'un demi-siècle, de transformations beaucoup plus compliquées que ne le sont les transformations élastiques de l'espace d'E.

Metodologie matematiky.

Napsala *B. Dratvová.*

Metodologii matematiky považuji za úvod do studia logických základů matematického myšlení. V metodologii matematiky jako formě pracovního postupu matematikova jsem si vytkla tři skupiny otázek: 1. O hledání a volbě problémů, 2. o řešení úloh, 3. o důkazech.

I. O hledání a volbě problémů.

Předmětem úlohy v matematice je stanoviti odpověď (= neznámé) ve formě v matematice přípustné, která vyhovuje podmínkám daným ať z vlastní iniciativy matematikovy, ať cizí.

Nalezení problému či volbu problému považujeme za znak vynalézavosti matematikovy. Kterou cestou se to děje, je otázka individuality, tedy psychologická. Tím směrem se dal Poincaré. Identifikuje matematickou vynalézavost*) se schopností rozlišiti vhodné úlohy od nevhodných, zvoliti správné. Vhodné matematické úlohy jsou ty, které mohou vésti k stanovení zákona. Zákon definuje jako soud, který nám umožňuje nalézti souvislost s jinými fakty, které jsou třeba již skoro známy, ale při nichž jsme dosud nepostřehli souvislosti.

Je přesvědčen, že tvůrčí matematik se zabývá vždy jen plodnými problémy, kdežto neplodné brzy poznává a zamítá. Podle známých zkušeností se dostavují problémy provázeny citem vnitřní jistoty; přicházejí náhle a neodbytně se vtírají; uspokojují estetický cit; jejich forma je velmi stručná. Samy sebou se nedostavují. Jsou výsledkem podvědomé činnosti, která však musí nalézti podklad v předchozím usilovném studiu, provedeném přesně logickým myšlením. Že jsou skutečně výsledkem činnosti subliminálního já, je patrno na tom, že myšlenka je jen nadhozená, nikdy propracovaná; jindy podle toho, že je klamná, a to zase poznáme, chceme-li stanoviti důkaz. Nápady v polospánku patří do kategorie druhé.

Voss**) uvažuje kromě toho ještě jiné subjektivní momenty, na nichž závisejí matematické objevy. Poincaré cituje jeden zkrátka soudem: „Matematik se rodí buď geometrem nebo analytikem." Jiný moment vystihl Weierstrass***) (kterého též uvedený spis Vossův cituje): „Matematik, který není tak trochu básníkem, nemůže býti dokonalým matematikem." Tím chce naznačiti nepopíratelnou potřebu kombinační obrazivosti při matematických objevech.

Matematika zajímají hlavně úkazy, kde se zákon snadno nabízí, t. j. podobné útvary, méně úlohy, které nelze obecně vyjádřiti; a to ať už pátrá po zákonech v nejsubtilnějších podrobnostech (Lerch měl heslo: „In minimis veritas"), nebo ať je pobídnut omylem druhého (na př. Fermat v dopise Pascalovi z r. 1640 udává formuli $2^{2^n}+1$, která prý pro každé n vyjadřuje prvočíslo; teprve Euler ji vyvrátil pro $n=5$) nebo nesnázemi druhých (v pracích Eulerových, Lagrangeových, Jacobiových, F. Kleinových a jinde se ukazuje problém často v souvislosti s řešením předchůdců).

Dějiny matematiky ukazují, že se někdy problémy vyskytují neodvratně jako epidemie na mnoha místech. Stkvělým příkladem je řada metod infinitesinálního počtu, které v poměrně krátkých lhůtách po sobě následují. Uvedu je později. Jiný příklad jsou pokusy, které měly za účel dokázati nezávislost 5. postulátu Eukleidova, a jichž výsledkem byla řada t. zv. neeuklidovských geometrií. Jiné bohaté období byla I. pol. 19. století, když podrobovali staré problemy revisi a precisovali; v čele tohoto hnutí stál Cauchy.

*) L'invention mathématique, dans „Enquête de „L'einseignement mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens", p. 127 n.

**) Über die mathematische Erkenntnis, Kult. der Gegenwart I., 1914, p. 10.

***) Der Wert der Wissenschaft, p. 9.

Ve všech těchto případech byly diktovány úlohy pouze pro matematiku samotnou. Jsou matematikové, jako právě zemřelý Lerch, kteří se nikdy nezabývali aplikacemi. Jindy vedou praktické potřeby k pokroku v matematice, ač méně; takové úlohy dává matematice na př. astronomie, fysika (Fourier) nebo technika.

II. O řešení problémů.

K první skupině otázek se druží druhá, stejné důležitosti: otázka řešení problémů, jakmile byly stanoveny. Obecné řešení úlohy určitého druhu spočívá v naznačení známých operací, jichž lze užíti ve všech speciálních případech řešení. Toto naznačení se nazývá formule. V geometrii přistupuje k formuli konstrukce.*)

Logika nepodává zvláštních metod pro matematiku. Matematika má své speciální metody, v nichž logik nachází obecné logické metody ex post. Ani logistika nezpracovala metody matematické: zabývala se spíše logickými základy matematiky, z logiky zpracovala jen elementární část pro účely matematiky. — Klasická logika nepodává matematice pravidel, jimiž by bylo možno úlohy řešiti. Na doklad toho začnu uvažovat o analyse a syntese, které jsou hlavní obecné metody řešení (mutatis mutandis šlo by to provésti i pro ostatní).

Vezmu třeba definici Čádovu: „Analysa, čili rozbor, rozklad, je vytčení ať hmotné, či myšlenkové, částí nebo dílů daného celku.“ Definice syntesy: „Syntesa je sklad, sjednocování, skládání menších celků ve větší.“ Z obou definic, které jsou spíše etymologickým výkladem, nemá matematika valného užitku; nejspíše ještě z druhé, kde je značena nějaká kombinační, tvůrčí činnost. Pokud se týče syntesy, často opakujeme po Newtonovi, že je pozdější než analysa. Rozhodnutí o tom snad nejspíše přísluší psychologii, a tu poměr obou podal krásně Čáda ve svých přednáškách o metodologii:**) „Analysa se končí tam, kde se končí syntesa (zde syntesou rozumí se srovnání, nikoli sklad). Analysu lze uskutečnit jen tam, kde známe kromě daného celku ještě jiné celky, s nimiž bychom mohli daný celek srovnati. Kdyby se nám svět jevil z nějaké příčiny jako celek, nedošli bychom k syntese růzností, ale také ne k analyse: jen zdánlivě se vyskýtá analysa bez syntesy.“ Názory Carnotovy o poměru obou metod jsou podobné.

Řešíme-li úlohu, pak logická analysa je t. zv. rozbor úlohy. I při syntetickém řešení musí předcházeti logický rozbor úlohy. Při analytickém řešení geometrické úlohy musí předcházeti konstrukce, ale tím ještě není dáno řešení. V analyse prostě vycházíme z předpokladu, že konstrukce existuje, a chceme ji propočí-

*) Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement, 1875, II., 97.

**) Přednášky o metodologii, zim. sem. 1914/15.

tati, v syntese máme konstrukci, kterou chceme dokázati, a tím ověřiti její správnost. Jedno mají obě metody společné: totiž to, že nesmíme ztrácet se zřetele konečný cíl. Volíme nejvhodnější věty, jednak abychom si postup pamatovali, jednak abychom eliminace zjednodušili. Není každý případ jednoduchý, jako je tento. Často musíme hledat *postupné řešení*. Jde na př. o to, stanoviti jednu nebo více neznámých, které vyhovují daným podmínkám. Snažíme se převést danou úlohu na jednodušší, a jestliže se nám to zdařilo, řešení pokročilo. Počítáme nadál už jen se zjednodušenou otázkou, a to se může několikrát opakovati. Každé následující parciální řešení nás vede k řešení úlohy předcházející, až se nám zdaří rozřešiti celý. Tato metoda se též nazývá *analytickou*, protože převádí danou úlohu v řadu jiných, které jednu po druhé řešíme. Stanovení této řady není pevné, absolutní pro každou úlohu, nýbrž má mnoho variací: říkáme, že lze problém řešiti různým způsobem. Metoda nám ukáže zhruba směr, kterým se máme bráti, ale nepoví, zda naše cesta bude úspěšná, neboť podmínky různých řešení jsou snad totožné logicky, ale ne psychologicky. Jsou-li podmínky vztahující se k určité úloze pouhými důsledky z *následujících* úloh, pak všechna řešení kterékoli úlohy jsou řešeními prvé, ač je v sobě nutně neobsahují; jen v případě, že podmínky vztahující se k určité úloze jsou pouhými důsledky z *předcházejících*, pak řešení kterékoli z nich zahrnuje v sobě nutně řešení všech ostatních. Zúžením pojmu „analytická metoda“ ve smyslu logickém přejdeme k analytické metodě ve smyslu matematickém, kde se po přednosti užívá algebraických řešení, vzácně konstrukcí.

Logická *syntesa* záleží v tom, že z nejjednodušších, již známých pouček vhodných k danému problému — a to nechť užijeme geometrických konstrukcí či algebraických vět jako prvků — přecházíme k složitějším, až dojdeme k vlastnímu řešení. Pro začátečníka je tato cesta obtížná, neboť mu často nejsou jasné přechody z jedné věty ve druhou. Analytická metoda je jasnější, protože se zde odvozuje ze širšího užší. Duhamel*) považuje metodu syntetickou za nedost vhodnou při řešení úlohy. Soudí, že by nemohla řešiti problém, který bychom již jinou cestou nebyli řešili. Duhamel snad myslí syntesu samu o sobě; víme, že nutně předchází analysa. Soudí dále, že se hodí k řešení úloh, které jsme si jako úlohy nepoložili; neboť jakmile je úloha přesně stanovena, pak jedině analytická metoda může prý vésti k výsledku.

Analysa a syntesa jsou *obecné metody* matematických řešení. Názvy i podstata jsou vztahy z klasické logiky; matematika jen nepatrně přispěla k jich zdokonalení. Ale tato logika vypovídá službu, pokud jde o *speciální metody* matematických řešení. Najíti logický podklad těchto metod je velice nesnadná

*) L. c. I., 54.

úloha, protože v obecné metodologii nenalézáme vhodných analogií, proto také ani termínů.

Co se týče řešení úloh speciálně, máme zhruba tři možnosti: buď prostředky algebry, nebo geometrie, nebo analysy infinitesimální. Každá metoda má své obtíže. Obtíže algebry záležejí v tom, že nutno vyjádřiti úlohu jejím jazykem, t. j. uvésti ji do rovnic; geometrie má sice dosti předpokladů a pouček, které vyjádřují vztahy, ale ty neučí, jak stanoviti neznámé veličiny v úloze; zvláště je obtížné toto řešení proto, že obyčejně nutno uvažovati celou úlohu najednou. Obtíže infinitesimální analysy spočívají v tom, že k převodu na její způsob vyjádření je potřebí značných znalostí operací, ač výhody při počítání pomocí ní jsou znamenité, zabírajíce mnoho oborů.

Nejvýznačnější algebraická řešení se dějí v rovnicích. Dovolené operace v rovnicích záležejí v tom, že změna jedné strany vyžaduje stejnou změnu na druhé straně. Wundt*) nazývá logický podklad této metody princip korespondujících změn. Druhý princip, variace vztahů, záleží podle něho v tom, že daná relace může býti substituována jinou relací podobné veličiny, jen když je vhodná. Proti Wundtovi namítám, že tyto principy nejsou souřadné, prvý je nadřazený: neboť mám-li provádět substituci, musím zavést změnu zase do celé rovnice. Kdyby chtěl substituci zavádět jako zvláštní operaci, musel by nutně uvažovat ještě jiné operace, na př. řešení pomocí rozkladů v mnohočleny, uhádnutím, částečnou substitucí (v neurčitých rovnicích), separací kořenů atd. Myslím, že se Wundtovi nezdařilo, aby nalezl logická pravidla pro matematiku obdobná Millovým pro badání přírodovědecké. — Tato všechna řešení jsou v podstatě algebraické transformace, a jich logický podklad je dvojí: 1. obecnost číselných zákonů, 2. možnost (aspoň omezená) užití čtyř základních početních výkonů.**) Protože v algebře jde hlavně o převod úlohy v rovnice, můžeme přestati již zde a přejíti ke geometrickým metodám. Jejich základem jsou geometrické transformace, jimiž přecházíme z určitých vlastností jedné figury k odpovídajícím vlastnostem druhé, t. j. danou figuru proměníme na jinou, prvé odpovídající podle určitých zákonů, takže druhá je omezena první a naopak. Na transformacích je založena velmi užívaná metoda geometrického místa. Geom. místo je souhrn bodů, které vyhovují určitým podmínkám, ale toliko těm. Při tom jsme v podobné situaci jako při dokazování pouček. Jde o to, odvoditi, dedukovati z daných podmínek (= hypotesy) jiný případ (= závěr). Podmínka je jednoduchá, jestliže geometrické místo je čára. Bod je vždy určen již dvěma podmínkami v rovině, na př. průsekem dvou geometrických míst.***) Speciální konstrukce jsou

*) Logik II., 175. Stuttgart 1907.
**) Wundt, l. c. p. 16?.
***) Hadamard, Géométrie élémentaire, 261 nn.

na př. rozklad geometrických obrazců, vedení pomocných čar, užití genetické konstrukce pohybové, průsekové nebo projektivní, jak sleduje u Eukleida na př. Wundt.*) Vedle toho se užívá při řešení konstrukcí algebry (řešení počtem buď bez souřadnic nebo se souřadnicemi, toto při analytické geometrii).

Třetí skupinu speciálních metod dává počet infinitesimální. Dauge**) vytýká řadu metod (metodu nekonečně malých přírůstků, vyčerpávací, limit, assimilační, indivisibilií, fluxí). Logika, pokud je mi známo, celkem s nezdarem se pokusila je zpracovati.

III. O důkaze.

Eukleides postupoval tak, že rozlišoval řešení a důkaz úlohy. Jeho úlohy jsou toho rázu, že jejich výsledek je cenný potud, že ho lze užíti v mnoha úlohách: výsledek úlohy, čili úloha sama, se proměnila v poučku. Dnes považujeme důkaz za část řešení, a to proto, že vycházíme z vět, které lze prostě obrátiti; abychom se o tom přesvědčili, provádíme předem důkaz, zda podmínky jsou nutné i postačující.

Důkaz má 2 části: tesi a důkaz sám. Formou důkazu je sylogism. Zde klasická logika skýtá vhodných metod. Důkaz posuzujeme logicky z různých hledisk. Především co do závaznosti: ad hominem, ad veritatem. Je zajímavo, že se prvního užívá častěji, než myslíme, a to v počátečních výkladech k účelům didaktickým, na př. dokazujeme-li Pythagorovu větu na základě rozdělení čtverců ve čtverečky, nebo stanovíme-li obsahy a povrchy částí koule a pod., postupujeme jakýmsi kinematografickým způsobem. Jinak matematika připouští důkaz jen ad veritatem, a dosahuje naprosté objektivnosti. Podle cesty, jíž se béřeme, rozeznáváme důkaz přímý a nepřímý. Logikové, počínaje Aristotelem, kladou přímý důkaz výše. S logického hlediska jsou oba rovnocenné, ale s hlediska teorie vědy má skutečně menší cenu nepřímý důkaz. Čáda***) vytýká, že v důkazu nepřímém 1. často nestanovíme dokonalou disjunkci, 2. se postupuje oklikou, 3. mnohdy se nezdaří provésti všechny důsledky při vyvracení kontradiktorické antitese, nebo aspoň ne všechny přesně, 4. nikdy nevidíme souvislost tese s argumenty, nýbrž jen, proč její antitese je neproveditelná. Matematik sice uznává tyto možné vady, ale přec ho užívá s oblibou. Jednak často povaha věci vyžaduje, že nelze užíti přímého důkazu, jako při základních poučkách, jednak se vyhne nesnázím nepřesnosti tím, že dovede vytknout všechny členy disjunkce a přesně provésti všechny důsledky. Z nepřímých důkazů se užívá s oblibou důkazu ad absurdum, méně per disiunctionem, jako zvl. ukazuje Eukleidova učebnice.

*) l. c. p. 179.

**) Dauge, De l'analyse infinitésimale, et des principales méthodes qui peuvent y suppléer, p. 288 nn.

***) Přednášky o elementární logice, z. sem. 1913/14.

Pokud se týče poměrů mezi obecným a zvláštním, jsou důkazy analytické (považujeme to, nač se tážeme, za dané, a přejdeme k větě, která je samozřejmá) a syntetické (ze základních vět vycházíme, odtud dojdeme k tesi). Dauge soudí, že analytický důkaz není důkazem, protože správnost odvozené věty nestačí, aby byla dokázána správnost těch, z nichž je odvozena. Ukazuje to na příkladu o zlatém řezu, který převzal z 13. knihy Eukleidovy.*) Ovšem syntetický důkaz zde musil provést sám, neboť Eukleides užíval pouze analytických důkazů, kdežto naopak při řešení postupoval synteticky. Syntetický důkaz je dokonalejší, protože nepotřebuje doplnění. Analytický důkaz je dokonalý jen ve dvou případech: 1. víme-li, že jiný předpoklad nevede k témuž závěru, čili lze-li soudy, jichž užíváme, obrátiti prostě. Máme-li o tom nějakých pochybností, musíme zpětný důkaz nahraditi postupným, jako to skutečně lze provésti u Eukleida; 2. vede-li k absurdnímu důsledku, takže musíme odmítnouti danou hypotesu. Vede-li analysa k nějakému známému soudu, pak se musíme předem přesvědčiti, že tento důsledek není možný, kdybychom vzali za východisko nesprávný soud.**) Staří matematikové znali tuto závadu analysy a kombinovali obě metody.

Ze spisů Pappusových se můžeme poučiti, že analysu nazývá též resolucí, t. j. obráceným řešením. Rozeznává totiž dvě analysy: jedna se vztahuje k řešení, nazývá ji teoretickou, kde chce poznati, zda věta je správná či ne na podkladě důsledků, které lze z ní odvoditi; jestliže důsledky jsou správné, pak předpokládá, že daná věta je správná (což nutno odmítnouti), druhá, kterou nejmenuje, se vztahuje na důkaz problému nebo na vykládání nových pravd, a to je vlastně syntesa.

Jinou vadu lze vytknouti analytickému důkazu, že totiž zatemňuje ve složitějších případech, zvl. geometrických, vlastní myšlenku a místo důvtipu užívá algebraického mechanismu.

Matematikové si vypracovali velmi jemné distinkce mezi oběma metodami, ale tím se také stalo, že přišli na některé nesnáze, týkající se poměru obou metod. Tak na př. Carnot***) nepovažuje je za podstatně rozdílné. Soudí, že změna pořádku v postupu důkazu nemá v zápětí změnu metody. To, co jedině prý činí podstatný rozdíl obou metod, jest, že při syntesi duch nesmí ztratiti přehled o následujících operacích, které vedou k výsledku; musíme k němu dojíti nepřetržitou řadou důsledků; naproti tomu v analyse jdeme k výsledku rychle, a to pomocí značek, které často značí pouhou logickou existenci. Z novějších prací bych mohla uvésti na př. Jevonse,†) který považuje rozsahovou analysu za totožnou s obsa-

*) l. c. p. 16 nn.
**) l. c. p. 18.
***) Géométrie de Position.
†) Leitfaden des Logik. Leipzig 1913, p. 219.

hovou syntesou. Jenže zaměníme-li zde slovo „analysa“ za abstrakci, „syntesu“ za determinaci, máme známou poučku ze školské logiky.

Naznačila jsem zde dva příklady chyb při důkaze, které vznikly z nesprávného užití analytické metody. Vznikly neúmyslně jsou to tedy paralogismy. Paralogismy vyvrátit vyžaduje často velké matematické erudice, zvláště užije-li se pojmu ∞. Sofismata jsou obyčejně hříčky nematematiků, dosti průhledné, a proto se jimi nebudu zabývat.

Chyby v důkaze, pokud je lze hodnotiti, jsou spíše následkem chybného postupu nebo nesprávného užití argumentů, než nesprávných argumentů.

Dosti zavilé a závažné jsou případy chybných důkazů, kde nejsou dány podmínky dostatečné a nutné. Podmínky jsou dostatečné, může-li jimi býti důkaz proveden. Jsou nutné, jestliže ani jediné nemůžeme postrádati, abychom neznemožnili důkaz. Jsou-li pouze nutné, vznikne důkaz úzký. Ve francouzských učebnicích matematiky se pravidlem zkoumají podmínky co do dostatečnosti a nutnosti, a sice při prvém se užívá obyčejně analytické, při druhém syntetické. Především se zkoumá, zda jsou podmínky nutné, a na druhém místě analytickým způsobem se zkoumá dostatečnost.

Nejobyčejnější případ chybného důkazu je petitio principii, důkaz kruhem, při němž se užívá zavinutě tese, jež se má dokázati, jako důvodu. Takové chyby by se dopustil, kdo by chtěl dokázati, že přímka je určena dvěma body, z toho, že v rovnici přímky $y = Kx + q$ se vyskytují dvě konstanty. Ve skutečnosti odvození této rovnice předpokládá onu větu. Historicky zajímavé a důležité jsou důkazy závislosti V. postulátu Eukleidova, které se vesměs dály kruhem.

Chybně se operuje s pojmem ∞ v řadách semikonvergentních, kde libovolným přestavením členů vzniknou libovolné součty.

Vypočítávati jiné chyby by nemělo smyslu.

Důležitá je otázka, jak se vyhnouti těmto chybám. Není logického pravidla, které by mohlo nahraditi cit evidence, který všechno ovládá, i aplikaci těch pravidel. Nejvíce logického obsahují rady Pascalovy, které lze shrnout ve dvě: pokud pracujeme ve vědeckém oboru, pak třeba všechny pojmy definovati a všechny soudy dokázati. Metoda tato je těžkopádná a lze ji těžko provésti. Duhamel*) doporučuje přesnou zkoušku a střízlivou úvahu, aby nebyla považována pouhá víra za evidenci, a abychom nezapomněli, že cit jistoty můžeme míti i při klamání. Matematik totiž, třeba že věří ve věčné pravdy jasné a zřetelné s Descartesem, přece nevěří s ním, že bůh nás nechce klamati. Ví, že lidský duch nemá přímé záruky, zda věta je pravdivá či falešná, a že má pouze jisté konvence a metody, které ho posilují v jistotě. Proto také

*) l. c. I., p. 23.

Descartesova známá pravidla (1. nic nepovažovati za pravdivé, co jsme zcela jasně a zřetelně nepoznali, že je pravdivé; 2. analysovati složené; 3. rovnati, skládati prvky myšlení; 4. přesně podati přehledy a rozsahy věcí) podávají pouze subjektivní kriteria správnosti. Mají nespornou psychologickou cenu, především pro samého autora, neboť ho posilují v důvěře, že jeho vědění je jisté. Všichni, kdo nalézali metody — mohla bych pro matematiku uvést třeba Leibnize — věřili, že jimi dali zázračný klíč ke všem problémům. Byli utvrzeni ve svém omylu tím, že jich užili na řešení určitých a vymezených problémů, které se redukovaly v podstatě na algebraická řešení a důkazy: omyl tedy se týkal hlavně rozsahu možnosti těchto metod.

Víra v pouhou metodu se osvědčuje bezpečně jen při důkazech a proto také klasická logika zde nejvíce matematice prospívá. Jinak ani speciální metody nás nenaučí, jak nalézati problémy nebo jak je řešiti. Obecně však matematika, učíc nás mysliti pouze v přesných a stručných soudech, skýtá příklad nejlogičtějšího myšlení. Ale přec se objevují při důkazech a řešeních některé požadavky, které nelze nazvat logickými. Je to především důvtip, který už při volbě problémů hraje nejdůležitější roli. Důvtip, podle Poincaré intuice,*) ukazuje přehledně cíl a vhodnou cestu k němu. Jiný příkaz je požadavek elegance důkazu i řešení. Slyšíme o něm hned, jakmile vstoupíme v I. sem. do matematického prosemináře. Poincaré analysuje eleganci**) jako harmonii rozmanitých částí, jich symetrii, krásnou rovnováhu; všechno, co stanoví pořádek, co sjednocuje části; vše, co nám dovoluje, abychom jasně viděli celek i detaily. Pak snadněji najdeme analogii s příbuznými objekty a máme možnost dociliti co možná největších zobecnění. Cit matematické elegance je cit uspokojení, které vzniklo na podkladě shody nalezeného řešení s potřebami našeho ducha. Proto je estetické uspokojení těsně spiato s ekonomií myšlení.

Metodologie matematiky nás uvedla až k samým logickým základům matematiky. Neboť důkaz se opírá o základní věty, kterých nelze dokázati. Není mým dnešním úkolem, abych se zabývala logickou stránkou axiomů. Proberu jen metody, o nichž se domnívám, že pomocí nich jsme k těmto základním větám dospěli. Jsou to: abstrakce, idealisace a determinace, indukce a dedukce. Tyto metody mají fundamentální význam při tvoření matematických základních vět, a v tom jsou pomocné pro analytickou a syntetickou metodu řešení a dokazování. Naopak zase předpokládají analysu a syntesu prvků.

Je rozsáhlý a dávný spor o tom, zda k těmto větám přicházíme čirou logickou spekulací či od předmětů vnějšího světa. Snad je to chyba, ale já si nedovedu představit člověka, který by dedu-

*) Wissenschaft u. Methode, 112 nn.
**) l. c. p. 20 n.

koval axiomy geometrické a aritmetické z ryzích apriorních forem Myslím, že podnět k matematickému přemýšlení daly vždy přirozené útvary. V tom dávám za pravdu přirozené geometrii Paschově nebo Dinglerově, nikterak se nedivím Helmholtzovi, že založil svou axiomatiku na pojmu tuhého tělesa a pohybu, ač jsou to pojmy fysikální. Pro postup pak, který nás vede od předmětů vnějšího světa k axiomům atd., nemohu nalézt lepší metody než idealisace, jak ji pojímá prof. Vorovka.*) Idealisací nazývá postup od představ fysických k matematickým pojmům. Podobá se abstrakci, jenže abstrakcí předcházíme od jakýchkoli představ k relativně obecným představám. Při abstrakci ponecháváme — na rozdíl od definice v klasické logice — všechny znaky, z nichž některé považujeme pouze za proměnlivé; tak variací představ v řadách můžeme vytvořiti všechny předměty podřazené obecné představě. Z toho vysuzuje, že obecné představy lidí jsou relativní, t. j. mají v mysli různých lidí různou cenu podle toho, jak jsou úplné a uspořádané řady jedinečných představ. Rovněž idealisaci vykládá psychologicky. Je to postup, kde skutečně z útvarů přirozené geometrie některé prvky vynecháváme, a tím dospějeme k matematickým pojmům. Na př. v matematické představě plochy je rozměr tloušťky naprosto popřen: to je idealisace provedená negací. Mez idealisace stanoví požadavkem, aby bylo lze aplikovati matematiku na svět vjemů a tím vykládá Poincaréova slova: „Duch neužívá své tvořivé schopnosti, leč když jej k tomu nutí zkušenost.“ (Věda a hypotesa.) Na nejvyšším stupni idealisace se úplně přestane přihlížeti k naturálnímu původu představ a vztahů. U Hilberta jsou bod, přímka a rovina pouhé předměty myšlení, a vztahy mezi nimi definuje formálně. Porozumění jeho vývodům se opírá pouze o vnitřní názor, že myšlení probíhá určitými formami, jež jedině zůstávají zachovány a jež jsou nám z dřívějšího obsahového myšlení běžny.**)

Aby základní poznatky byly co možná spolehlivé, nesmějí se vázati na smyslný názor. Toho se dociluje v prvé řadě v aritmetice. Je ve vysokém stupni objektivní, nevyžaduje fantasie; spisovatel i čtenář si myslí totéž.***) Metoda, abychom docílili v ostatních oborech přesnosti aritmetiky, stanoví Dingler jako Whitehead nominalisticky: vyjádříme operace symboly (znaménky), na nichž stanovíme větu, a tyto symboly formulujeme jako mechanicky užitelná početní pravidla.

U všech nominalistů se jeví matematické pojmy jako výsledek idealisace. Je ještě otázka, zda tato idealisace je výsledek nutné činnosti ducha, či zda spočívá na konvencích. Představuji si určité zjevy v přírodním dějství: pád kamene, hladinu rybníka, sluneční

*) Úvahy o názoru v matematice, str. 44 nn.
**) Vorovka, l. c. p. 51.
***) Dingler, Grundlagen der angew. Geometrie, p. 16 n.

nebo měsíční kotouč, krystaly. Myslím si, že tyto fakty stejně působí na lidského ducha, který vždy dojde z nich k určitým geometrickým tvarům a z nich k stejným geometrickým zákonům, jak ukazuje známý případ Pascalův. Otázka, zda jsou matematické věčné pravdy, se stává zbytečnou a nahrazuje se otázkou, zda jsou zákony myšlení a zákony přírodní neměnné. —

Význam determinace záleží v tom, že přidávajíc nové prvky netvoří nové celky libovolně, nýbrž podle stanoveného cíle. Je pomocnou metodou zvláště syntesy. Samostatně nehodí se k řešení ani k důkazu, ale k verifikaci výsledku, t. j. ověření, že lze aplikovati na určité speciální případy řešení úlohy. Tak po případě přispívá klasifikaci.

Ke konci zbývá ještě zodpovědět otázku, jak ze základních pojmů a vět dospíváme k jiným? Matematika jest traktována jako věda deduktivní. Tomu jest rozuměti tak, jak to vykládají starší realisté (Leibniz): že totiž lze odvoditi všechny matematické věty z abstraktních pojmů a definice čísla, veličiny, prostoru, a to dedukcí, bez jakékoli vnější pomoci. Podle toho by byla deduktivní metoda základní metodou matematiky, a ostatní by byly pouze pomocné. Mnozí matematikové, chtějíce uchovat její klasický ráz, předělávají svoje výzkumy tak, jako by byly získány pouhou dedukcí. Tím čtenář je sice ohromen, ale nezíská téměř ničeho pro své myšlení, protože tu není patrn přirozený myšlenkový pochod. Tak si vysvětluji výrok Einsteinův, „že pro své myšlení získal více z Dostojevského než z Gausse“; neboť Gauss, jako jiní matematikové, zastíral pro veřejnost skutečný postup svých objevů, který ukazují jeho deníky.

Za deduktivní důkaz považujeme ten, že za argumenty položíme co možná axiomy, definice a poučky. Tím se dociluje pověstné matematické jistoty při vyvozené nové větě, v jiných vědách nedosažitelné. Descartes*) praví: „Aritmetika a geometrie jsou daleko spolehlivější než jiné vědy, poněvadž se samojediné zabývají tak prostými a jednoduchými věcmi, že zřejmě nic nepředpokládají, co by mohla zkušenost učiniti nejistým, nýbrž celé spočívají na důsledcích, jež lze rozumem odvoditi. Jsou tedy ze všech nejsnadnější a nejprůhlednější a mají předmět, jaký míti chceme, ježto se zdá sotva lidským chybiti v nich jinak než nepozorností.“

Speciálně pro matematiku je důležitá dedukce na podkladě analogie, jíž se postupuje z obecného na obecné jiné. Je to na př. odvození důsledku za členu n-tého na $n+1$, kterážto metoda se nazývá „úplnou indukcí“. Jí dospíváme rekurentních vzorců. Ve školské logice se již učíme, že je to vlastně dedukce, neboť jí chybí podstatný znak indukce, totiž generalisace na podkladě neúplných dat. Pravých, t. zv. neúplných induktivních pochodů se užívá v matematice málo, protože jsou mnohomluvné; nejspíše

*) Regulae ad directionem ingenii etc., 1701.

ještě pro verifikaci několika počátečních případů. Indukci příjímají jako základní metodu psychologové-nematematikové, jako Wundt.*) Pouhá indukce nestačí. Vede jen k přibližnostem, s nimiž se musí spokojovat snad v přírodních vědách, ale ne v matematice, kde můžeme dociliti naprosté přesnosti. Příkladem induktivních geometrií jsou staré egyptské učebnice, plné nepřesností.

*

La méthodologie des mathématiques.

(Extrait de l'article précédent.)

La méthodologie des mathématiques traite des formes des procédés d'étude en mathématiques, notamment: 1. de la recherche et du choix des problèmes; 2. de la résolution des problèmes; 3. des démonstrations. Le meilleur moyen pour résoudre la première question est la psychologie. La seconde partie traite des méthodes de resolution les plus usuelles, soit: l'analyse et la synthèse, et compare ces méthodes mathématiques aux méthodes logiques désignées par les mêmes noms. La troisième partie s'occupe des formes logiques des démonstrations, des erreurs dans les démonstrations et du sentiment de l'évidence. Sont considerées encore les méthodes qui conduisent aux notions mathématiques fondamentales: l'abstraction, la détermination, l'idéalisation, l'analogie, la déduction et l'induction.

Dvě poznámky k vektorovému počtu.

Napsal *Karel Dusl.*

I. O exponenciálních výrazech vektorových.

Součin dvou vektorů

$$\mathfrak{A} = a\,\mathfrak{a} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} \quad \text{a} \quad \mathfrak{B} = b\,\mathfrak{b} = x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k}$$

pišme, předpokládajíce pravidlo distributivní:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{B} = {} & xx'\,\mathfrak{i}\mathfrak{i} + xy'\,\mathfrak{i}\mathfrak{j} + xz'\,\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\ & + yx'\,\mathfrak{j}\mathfrak{i} + yy'\,\mathfrak{j}\mathfrak{j} + yz'\,\mathfrak{j}\mathfrak{k} \\ & + zx'\,\mathfrak{k}\mathfrak{i} + zy'\,\mathfrak{k}\mathfrak{j} + zz'\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Výraz tento možno považovati za pouhou nonionovou formu tensoru (dyadu)**), aneb lze mu dáti význam geometrický, nezávislý

*) l. c. p. 131 nn.

**) Gibbs-Wilson: Vector Analysis p. 269.