Martin Jašek

O funkcích s nekonečným počtem oscilací v rukopisech Bernarda Bolzana

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 102--110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109354

O funkcích s nekonečným počtem oscilací v rukopisech Bernarda Bolzana.

Dodatkem ke zprávě o funkci Bolzanově.[1])

Napsal *M. Jašek.*

1. Jak známo byl to Hankel, auktor prvního soustavnějšího pojednání o funkcích spojitých s nekonečným počtem oscilací, který v r. 1871. — dvacet let po smrti Bolzanově — poprve upozornil na Bolzana.[2])

Netušil tehdy, srovnávaje jej s Cauchym[3]), že záhy bude již deset roků potom učinil O. Stolz[4]) a že zejména některé z nejdůležitějších výtěžků klasických jeho „Untersuchungen“[5]) jsou nejen dostiženy, ba v jedné příčině i předstiženy geniálním myslitelem, za jehož ocenění se přimlouval.

Vskutku jest tomu tak.

Jako totiž známá již nyní funkce Bolzanova, resp. funkce stejných vlastností, později sestrojené, byly svou dobou jen zavrcholením oněch cílů, ke kterým směřoval Hankel metodou svou kondonsace singularit, tak náleží vůbec v této příčině — pokud jde totiž o tak zvanou „patologii funkcí“[6]) — Bolzanovi zásluha, že učinil první kroky, rovnocenné s těmi, jaké učinil Hankel ve zmíněném svém „příspěvku k metafysice naší vědy“.[7])

Na to upozorniti jest účelem tohoto článku.

---

[1]) Č. Č. M., roč. 51, str. 59., Věstník král. Č. Sp. N. 1921/22. Srv. i práce uvedené v tištěném Protokole o jubil. sjezdu něm. přírodovědců v Lipsku 1922 (oddíl »Angelegenheiten d. D. M. V., str. 110): K. Rychlík, Ueber eine Funktion aus Bolzanos Nachlasse, Praha 1922, C. Kowalewski, Bolzanos Verfahren zur Herstellung einer stettigen nirgends diff. Funktion, Lipsko 1922, V. Jarník (chybně tištěno: V. Tarník), O funkci Bolzanově, ČČM roč. 51.

[2]) V Ersch-Gruberově Encycl. der W. u. K. (-. Sect. XC, Lipsko 1871) ve čl. »Grenze«.

[3]) Přiznávaje mu prioritu »ve správném pojetí nauky o nekonečných řadách«. Viz také: O. Stolz, čl. uvedený v násl. pozn., zejména však A. Pringsheim, Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse, Encykl. d. math. W. I. A. 3, od str. 13.

[4]) V pojednání, jež jest první a dosud nejobsáhlejší zprávou o matem. činnosti Bernarda Bolzana: B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinetesimalrechnung, Math. An. 18 (1881), str. 255. Viz tam odst. IV. a pozn. na str. 260.

[5]) H. Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Funktionen, Gratulationsprogr. der Tübinger Univ. 1870, znovu otištěno v Math. An. 20 (1882), jakož i v Ostvaldových Klassiker d. exak. W. č. 153.

[6]) Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre (Jahresb. d. D. M. V. 89), III. Absch. str. 111.

[7]) Tak totiž označuje Hankel (Math. An. 18, str. 70) sám své pojednání (ein Betrag zur Methaphysik unserer Wissenschaft«).

Omezuji se ovšem jen na první část zprávy toho se týkající — na funkce spojité s nekonečným počtem oscilací, pomíjeje prozatím úvah Bolzanových, věnovaných funkcím nespojitým, jež tvoří další styčný bod mezi Bolzanem a dobou právě zmíněnou. Odkládám to k jiné příležitosti. Zatím totiž okolnost, že třeba uváděti slovné znění některých vět Bolzanových, rozšiřuje článek, i když poznámky historické, k jakým dávají podnět tyto úvahy Bolzanovy, omezuji na míru nejskrovnější.[8])

2. O funkcích s nekonečným počtem oscilací jednáno bylo i v době pozdější vždy jenom mimochodem a příležitostně. Většina totiž funkcí (spojitých) bez derivací, jaké byly sestrojeny v různých dobách[9]), měla tuto vlastnost, a s toho hlediska i ony samy tu a tam přicházely v úvahu.[10]) Teprve ke konci toho století změnila se situace a hledisko se obrátilo. Došla povšimnutí druhá stránka věci — otázka totiž, existují-li i funkce, spojité a všude oscilující, mající však naopak derivaci v každém bodě. Typ funkcí takových sestrojil, jak známo, Köpcke.[11]) Tím nastal již obrat a vlastnost tato sama došla zdůraznění. Dokládají to jiné práce z doby pozdější, o nichž nelze se šířiti.[12])

Tolik o vývoji této věci s hlediska doby přítomné. S širšího hlediska historického třeba pohlížeti na věc takto:[13])

Počáteční úvahy o funkcích — v době Bolzanově a před ní — vynesly tři důležité pojmy, jejichž obsah byl v té době ještě kolisavý a jejichž poměr vzájemný (v logickém toho slova smyslu) zůstal nejen v té době, nýbrž ještě dlouho potom zhola nevyjasněn.

Vždyť i heterogenita těchto pojmů — spojitosti, monotonie a differenciability — vzhledem k pojmu

---

[8]) Připisuji tuto stať nadšenému ctiteli genia Bolzanova a tlumočníku některých jeho myšlének filosofických profesoru V. Láskovi, jehož zásluhy o studium Bolzana vůbec a mé práce zvláště na jiném místě jsem uvedl (ve své přednášce v J. Č. M. $^3/_{12}$ 1921). Láska nazval Bolzana »zakladatelem moderní matematiky« (Filosofie prostoru, Ruch filosofický, I., str. 43) — výrok, jehož oprávněnost, doufám, bude záhy plně prokázána. Srv. obdobný výrok Pringsheimův z doby nejnovější, jenž k tomu poukazuje.

[9]) Bolzanovu do toho počítajíc.

[10]) Pěkný přehled těchto funkcí (bez derivací) i úplnou literaturu obsahuje práce Knopp-ova: Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends diff .Funktionen, Math. Zeitschrift, 2. B. (1918), seš. 1./2.

[11]) V r. 1890 (Math. An., 35, str. 104) — po Dinim, který věc naznačil a za »pravděpodobnou« pokládal (Fondamenti, § 200 — na konci).

[12]) Srov. Schoenflies, l. c., k jehož zprávě, obsažené tam v V. kapitole (str. 155 a n.) v hořejších několika řádcích hlavně přihlížím.

[13]) Čtenář nechť srovn ánásledující přehled, v němž jdu již po stopách myšlenek Bolzanových, roztrošených tu a tam v různých poznámkách s historiskými vývody Pringsheimovými (v Encykl. II. A 1 — s odst. 20: Die abteilungsweise monotone und die »gewöhnliche« Funktion).

základnímu — k pojmu funkce (v tehdejším toho slova smyslu!) nebyla jen tak na bíledni. Není-li každá funkce — id est: „obyčejná“ čára (podle tehdejších představ) — aspoň v jistých částech intervalu eo ipso spojitá? Jinými slovy: není tento pojem (spojitosti) eo ipso obsažen v pojmu funkce vůbec? Lze si mysliti dále — a ovšem zase hlavně: zobraziti — funkci jinak nežli po částech monotonní? Není tudíž monotonie — aspoň částečná — rovněž nutným znakem onoho pojmu základního? Neplatí totéž i o třetí ze zmíněných vlastností — differenciabilitě funkcí.[14])

To byly otázky, příznačné pro ono první stadium nauky o funkcích — otázky, jichž nejen nevylučovalo, nýbrž mělo v zápětí zmíněné úzké a mlhavé pojetí funkce.

S rozšířením tohoto pojmu odpadaly ovšem tyto otázky. Vždyť už tvůrce tohoto rozšíření, C. Lejeune-Dirichlet, sestrojil funkci totálně rozpojitou v daném intervalu, tedy funkci postrádající eo ipso také obou ostatních výše uvedených vlastností, a dokázal tím, že pojem funkce jest na nich nezávislý. Leč uspokojivý důkaz toho, že funkce monotonní může býti nanejvýš bodově nespojitá a že tudíž rozpojitost v každém bodě a monotonie jsou pojmy de facto sporny, provedl tuším, teprve Dini.[15])

Týká se to už vzájemného poměru dotčených tří pojmů, který potom, jak uvidíme, zaměstnává různými stránkami svými celé ono století.

Jaké jsou důsledky spojitosti funkce vzhledem k ostatním dvěma shora uvedeným vlastnostem? Jsou funkce spojité eo ipso differenciace schopny v každém bodě či existují funkce spojité zhola bez derivací? Jsou funkce spojité eo ipso (po částech aspoň) monotonní či existují funkce spojité bez této vlastnosti — všude oscilující? Jaký útvar myšlénkový vzniká kombinací a synthesou dvou a dvou z těchto pojmů a jaké důsledky má tato synthesa vzhledem k pojmu třetímu? Jest na příklad oscilačnost spojitých funkcí pojem sporný vzhledem k differenciabilitě či svorný — existují totiž funkce spojité všude oscilující, ale přes to s derivacemi na každém místě (jak se táže Dini a Köpcke)?

A tak vidno, že jak slavný problém Weierstrassův, tak i otázka posléze zmíněná, jedna z nejnovějších, jsou členy téhož svazu myšlénkového — komplexu otázek, směřujících k tomu, co jest

[14]) Srv. na př. poznámku v »Paradoxiích« Bolzanových (k § 37), jejíž neautentičnost jsem sice prokázal, která však jest výrazem obecného tehdy nazírání na věc — tedy i názoru vydavatelů této posthumní publikace. Ještě lépe dokládá tento názor poznámka, o níž se zmiňuji ve Věst. Č. Sp. N., l. c., str. 31, ak terá byla původní její formulací.

[15]) L. c. § 66

jejich pravým východištěm — k vyjasnění logického poměru shora vytčených tří pojmů.

To postřehl Bernard Bolzano a sem spadají i některé části jeho díla životního.

Viděli jsme ve zprávě o „funkci Bolzanově“, jak řeší jednu z těch otázek — problém Weierstrassův, a jakého úspěchu při tom se dočinil. Bylo však ihned dodati: původní hledisko Bolzanovo v té příčině bylo vlastně jiné, než jaké došlo zdůraznění v řečené zprávě — vlastně rovněž obrácené k tomu, jaké jsme mínili s počátku. Kdežto totiž u většiny příkladů tam zmíněných (funkcí bez derivací) „dodatečně“ se ukázalo, že všude oscilují, sestrojoval Bolzano naopak funkci všude oscilující, u níž pak zjistil dodatečně (v další části svého rukopisu),[16]) že postrádá derivací.

O tom stala se zmínka v řečené zprávě.[17])

Nebylo však příležitosti dotknouti se blíže této věci — zmíniti se o větách, které Bolzano předesílá s tohoto hlediska. Tím doplniti onu zprávu, jest účelem této parallely historické.[18])

3. Základní větu toho se týkající nacházíme v téže části rukopisu jeho „Nauka o funkcích“ („Functionenlehre“), z níž vyňata byla výše zmíněná „funkce Bolzanova“, t. j. v druhé části prvního dílu této dosud netištěné práce. Zní doslova:

> I. [„Functionenlehre“, arch 11, str. 3: „Lehrsatz“. „Auch Functionen, welche für alle innerhalb der gegebenen meszbaren Grenzen a und b liegenden Werthe ihrer Veränderlichen x dem Gesetze der Stetigkeit gehorchen, können bloss dadurch, dasz ihre Veränderliche nach und nach die unendlich vielen Werthe
>
> $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots.$$
>
> annimmt, deren jeder folgende gröszer (oder auch kleiner) als der nächst vorhergehende ist, die aber alle innerhalb a und b liegen, abwechselnd bald $\leqq$ als eine gewisse beständige Zahl M, bald wieder $\leqq$ als eine von jener verschiedene beständige Zahl m werden, inngleichen auch abwechselnd einen positiven und dann wieder einen negativen Werth annehmen oder (wie man diesz Letztere ausdrückt) ihr Vorzeichen unendlich Mahle wechseln.“]

Věta tato, v níž Bolzano — podle svého zvyku — jaksi jen zdaleka přistupuje k předmětu, nabývá vlastní své zajímavosti

[16]) Ve III. (kdežto funkce sama vyňata jest z části II., jak níže podotýkám).

[17]) Srv. Věst. Č. Sp. N., l. c., str. 22.

[18]) Zdůrazňujeme poslední slovo. Neboť že tato část prací Bolzanových má už dnes jen cenu historickou, samo sebou se rozumí.

historické (vzhledem k pojednání Hanklovu) teprve dodatkem, který níže citujeme a jenž týká se věci ještě v té době neujasněné. Podotýká totiž Hankel, vytknuv předem, že věc, o niž tam jde, jest pro jeho dobu v zásadě nová. (Math. An. 20, str. 74):

„Mluvilo se sice o funkcích spojitých, které prý mají nekonečný počet oscilací s konečnou amplitudou, (!) ... při čemž myslelo se snad na funkci

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ v okolí bodu } x = 0.$$

Lze však dokázati lehce, že myšlenka tato tají v sobě vnitřní spor. Neboť není-li u bodu $x = a$ žádný interval ε, v němž by $f(a + \varepsilon) - f(a)$ pro každé ε bylo číselně menší nežli libovolně malá veličina..., není funkce spojitá ve smyslu definice toho pojmu; vskutku také není ani $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ spojitá v bodě $x = o$."

Totéž však má na zřeteli i Bolzano, jak svědčí zmíněná poznámka, kterou ihned připojuje ke své větě a kterou z té příčiny rovněž uvádíme doslova:

[Arch 11, str. 6. „Zusatz": „Wohl zu bemerken ist, dasz wir in unserem Lehrsatze die Stetigkeit der in Rede stehenden Function $F(x)$ blosz für alle innerhalb a und b liegenden Werthe ihrer Veränderlichen vorausgesetzt, über den Umstand aber, ob sie auch für diese Grenzen, welche a und b setzt, stetig seyn müsse oder auch nur könne, noch nichts entschieden haben."]

Toho týká se i věta následující, v níž zabývá se právě oním vnitřním sporem Hanklovým a kterou dále uvedeme. Zatím všimněme si jen ještě příkladů, uvedených na tomto místě a zdůrazněme při té příležitosti, co zdůrazňuje sám Bolzano na počátku svého rukopisu a co mu v něm hraje úlohu vskutku nadmíru důležitou.

Stejně totiž jako Hankel odchyluje se již i Bolzano od obvyklého způsobu definování funkcí, zaváděje výslovně s jistým důrazem vedle funkcí, „definovaných podle jediného zákona, platícího pro všechny hodnoty proměnné" i funkce, „welche mehreren, für verschiedene Werthe ihrer Veränderlichen verschieden lautenden Gesetzen folgen." [19])

Není třeba zajisté poukazovati k věcnému i historickému významu této věci. Odkazujeme k úvahám Schoenfliesovým, věnovaným tomuto předmětu. Zde poznamenáváme prostě, že

[19]) Function I., arch 1., str. 2.

Bolzano způsobu toho často užívá, mezi jiným i všude v těchto úvahách. Zde má příklady dva, z nichž prvý:

$$f(x) = 2^{2n-1}(1-x) - \frac{1}{2} \text{ pro } \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}} < x \leqq \frac{2^n-1}{2^{2n}},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = 2^n(x-1)+1 \text{ pro } \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} < x \leqq \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}$$

jest dokladem toho, co uvádíme, k druhému podotýká zvláště:

[Arch 11, str. 6. „Anmerkung": „Sachkundigen wird von selbst einleuchten, dasz auch Functionen, die durch ein einziges von dem besonderen Werthe ihre Veränderlichen ganz unabhängiges Gesetz bestimmbar sind, die Eigenschaft haben können, die dieser Lehrsatz beschreibt. So nimmt z. B.

sin log $(1-x)$ innerhalb $x = 0$ und $x = 1$

unendliche Mahle die Werthe $+1$ und -1 an."]

Uvádíme větu, která jest — jak řečeno — dokladem toho, že Bolzano unikl onoho „vnitřního rozporu", jaký vytýká Hankel. Má ráz všeobecnosti a tím, tuším, poněkud i vyniká nad onu prostou, příležitostnou poznámku Hanklovu.

Věta zní:

[Arch 11, str. 8. „Lehrsatz". „Wenn eine Function Fx blos dadurch, dasz ihre Veränderliche x gewisse innerhalb der meszbaren Grenze a und b gelegenen Werthe:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots$$

von unendlicher Menge annimmt, abwechselnd bald $\leqq$ als eine gewisse Beständige Zahl M, bald wieder $\leqq$ als eine gewisse von M verschiedene beständige Zahl m wird, und der Wechsel kehrt bey der unendlichen Menge der Zahlen

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots$$

unendliche Mahle wieder: so behaupte ich, dasz diese Function dem Gesetze der Stetigkeit gewisz nicht einschlieszlich von a bis b gehorche, sondern entweder für $x = a$ oder $x = b$ oder für irgend einen innerhalb a und b gelegenen Wert ihrer Veränderlichen, wenn nicht für mehrere dergleichen Werthe unstetig sey."]

V důkaze věty opakuje auktor — o třicet let dříve — týž chod myšlenkový jako Hankel, užívaje v něm tu a tam i pojmů a termínů, jež zdánlivě vytvořila teprve doba daleko pozdější. O tom však při jiné příležitosti.[20])

---

[20]) Ve zprávě o základech Bolzanova učení o množinách, obsažených ve dvou nedavno zjištěných částech celkového díla Bolzanova: »Die ersten Begriffe der allgemeinen Grösze nlehre« a »Die unendlichen Gröszen (Zahlen-)begriffe« ve vídeňské jeho pozůstalosti.

Přistupujeme k větě, ve které Bolzano i v positivním směru vyslovuje to, co zdůrazňuje Hankel a co vskutku jest poznatek rázu fundamentálního. Věta zní:

[Arch 12, str. 2. „Lehrsatz“. „Auch eine Function, welche für alle Werthe ihrer Veränderlichen x von a einschlieszlich bis b einschlieszlich dem Gesetze der Stetigkeit folgt, kann innerhalb eben dieser Grenzen unendliche Mahle abwechselnd steigen und fallen; doch wird erfordert, dasz der Unterschied zwischen den grösten und kleinsten Werthen, die sie abwechselnd erreicht, indem x fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt, in das Unendliche abnehme.“]

Není třeba podotýkati, že smysl této věty vyniká určitěji, uvažuje-li se v souvislosti s předešlými, které — zdá se — stilisovány jsou přiléhavěji. Leč věc jest jinak jasná a důkaz jmenovitě nenechává pochybností.[21])

Pokud příkladů se týká, uvádí Bolzano dva — ze stejných důvodů jako v odstavci předcházejícím. Jest to:

$$a)\ f(x)=x-\frac{2^n-1}{3\,.\,2^{n-1}}\ \text{pro}\ \frac{2^n-1}{2^{2n}}\leqq x\leqq\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}},\ n=0,1,2,3\ldots$$

$$f(x)=\frac{2^{2n+2}-1}{3\,.\,2^n}-x\ \text{pro}\ \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}\leqq x\leqq\frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+2}},$$

s dodatkem: $$f(1)=\frac{1}{3}$$

$b)$ arch 12., str. 6: $f(x)=(1-x)^2\sin\log(1-x),\ 0\leqq x\leqq 1.$

4. Tím rozřešil auktor hlavní problém, výše zmíněný a uzavírá tuto **první** část svých úvah:

[Doslova (arch 12, str. 7): „Es widerspricht also der Stetigkeit einer Function nicht, dasz sie — indem ihre Veränderliche x von a bis b fortschreitet — eine unendliche Reihe von Werthen

$$F(x_1),\ F(x_2),\ F(x_3),\ldots$$

durchgehe, welche abwechselnd bald gröszer, bald wieder kleiner werden, ingleichen auch dasz diese Werthe ihr Vorzeichen unendliche Mahle ändern, d. h. bald positiv bald wieder negativ werden, nur wird im ersten Falle erfordert, dasz die Unterschiede

$$F(x_1)-F(x_1),\ F(x_2)-F(x_1),\ F(x_3)-F(x_4),\ldots$$

[21]) Vynecháváme jej zase k vůli stručnosti.

nach ihren absoluten Werthen in das Unendliche abnehmen, im zweiten, dasz die Werthe

$$F(x_1),\ F(x_2),\ F(x_3), \ldots$$

selbst absolut genommen in das Unendliche abnehmen, weil sonst der Unterschied zwischen dem gröszten (positiven) und dem kleinsten (negativen) Werthe von F (x) nicht ins Unendliche abnehmen könnte."

Zbývá otázka, pro tu dobu ovšem nejvýznamnější, zda tento úkaz, jevící se zatím poblíž jediného bodu, resp. konečného počtu jich, lze zhustiti tak, že vznikne funkce všude oscilující, t. j. funkce, která ani v jednom sebe menším dílčím intervalu nechová se monotonně. Tomu účelu slouží známá nám již „funkce Bolzanova", o níž tudíž šířiti se není potřeba.[22])

5. Tolik tedy dodatkem ke zprávě o funkci Bolzanově s tohoto hlediska.

Není třeba zajisté zdůrazňovati, že celá věc — jakož ovšem i sama funkce Bolzanova — má dnes jen význam historický. Že však ten jest nemalý, svědčí důraz, jaký o třicet roků později klade na věc Hankel, i důraz, jaký klade na toto pojednání Hanklovo dnešní literatura matematická.

*

Sur les fonctions à un nombre infini d'oscillations dans les manuscrits de Bolzano.

(Extrait de l'article précédent).

C'est en 1871 que H. Hankel a traité, pour la première fois, des fonctions qui ont un nombre infini d'oscillations, dans son mémoire classique intitulé „Über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Funktionen". Voici les résultats pricipaux de ce mémoire: Hankel élargit la notion de fonction (d'une variable réelle) en lui donnant le sens qu'on lui attribue à présent. Il précise la notion de la continuité et il prouve que la continuité des fonctions n'exclue pas la possibilité de ce qu'elles possèdent un nombre infini d'oscillations. Dans les théoremes du § 3. de son mémoire il précise la condition fondamentale pour qu'une fonction continue puisse avoir un nombre infini d'oscillations. Il construit, en fin de compte, à l'aide de sa méthode „de condensation des singularités" les premiers exemples de fonctions continues qui oscillent en tout point d'un intervalle quelconque.

C'est presque aux mêmes résultats qu'est parvenu, en tous les points mentionnés, avant 1830, le mathématicien pragois Bernard

[22]) Příslušná k tomu úvaha otištěna jest v řeč. zprávě o funkci B-ově na str. 21 a 22.

Bolzano, dans son oeuvre inédite „Funktionenlehre“, dont le manuscrit est gardé dans la bibliothèque nationale à Vienne. L'auteur de l'article actuel constate ce fait important, et le prouve en citant les théorèmes respectifs de Bolzano, lesquels il compare à ceux de Hankel. Il complète par là son rapport intitulé „Aus dem handschriftlichem Nachlass Bernard Bolzano's“, traitant de la „fonction de Bolzano“ (la plus ancienne fonction continue sans dérivées) et publié dans le „Věstník král. spol. nauk“ (Bulletin de la Société Royale des sciences à Prague). Cette fonction est, en même temps, le premier exemple d'une fonction oscillant en tout point d'un intervalle. Il est à remarquer que Bolzano emploie — c'est ce qui arrive pour la première fois dans le développement des mathématiques — pour de telles construction une manière de définir les fonctions dont l'importance accentue Schönflies dans son „Bericht über die Mengenlehre.“ C'est ainsi que Bolzano peut être considéré, sous ce point de vue encore, comme le vrai fondateur de la théorie de ce qu'on a appelé „pathologie des fonctions“.

Součtový vzorec pro $S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{k=-n}^{+n} e^{-h^2 k^2}$.

Napsal *M. Kössler.*

Jednou ze základních úloh počtu pravděpodobností jest tento problem: Jest určiti součet konečné řady

$$\sum_{i=-n}^{n} p_i, \quad p_i = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 i^2} \left(1 + \varepsilon_i\right),$$

kdež ε_i jest číslo, jehož prostá hodnota nepřesahuje jistou mez ε. V podstatě jedná se tedy o stanovení součtu S uvedeného v nadpisu. K výpočtu jeho užívá se obyčejně vzorce *Euler-Maclaurinova*; vadou tohoto postupu jest obtížný odhad chyby.

Proto odvodíme v této poznámce jednak přesný součtový vzorec pro S a pak odhadneme na základě jeho horní mez chyby, které se dopouštíme, když se omezíme na obvyklé dva členy formule přibližné (viz vzorec (6))

$$S \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{nh} e^{-t^2}\, dt + \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 h^2}.$$

*

Nechť $f'(x)$ jest spojitá funkce v uzavřeném intervalu $\langle o, n \rangle$, n číslo celistvé kladné. Označme největší celistvé číslo menší nebo rovné x symbolem $[x]$.