Emil Schoenbaum

Příspěvek k matematické teorii pensijního pojištění

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 163--173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109357

body lze spojiti čarou lomenou probíhající v $G_{n-1,n}$ a nemající — nehledě k počátečnímu a koncovému bodu — s $G_{0,n-1}$ body společné. Ostrov tento má za hranici jednu z hlavních částí vnějšího polygonu k $\mathbf{g}_{0,n-1}$ a obsahuje ta hranice strany čtverců sítě druhu (1), (2) ..., $(n-2)$ a z důvodu symetrie ovšem také druhu (0), $(n-1)$. Rovněž vnější polygonu úseku rovinného příslušného k čáře C bude se skládati z jedné (druhé) hlavní části vnějšího polygonu k $\mathbf{g}_{0,n-1}$ a obsahuje strany čtverců sítě druhu (0), (1),... $(n-1)$.

Rozměr ostrova tu (pod 4.) popsaného jest dle (π) větší než $4\delta - 2\alpha$, t. j. větší než 3δ.

Tak získali jsme opětně větu odvozenou v odstavci 4. a tam ke konci vyslovenou týkající se úseku rovinného patřícího k spojité, uzavřené a se neprotínající čáře C. Důkaz věty Jordanovy by se pak jako důsledek její podal stejně jako svrchu v odst. 5. s tím jedině rozdílem, že vlastnost bodů položených na C — že každý z nich jest bodem hraničním — zde v podstatě jest dokázána již tím, že jsme dokázali během výkladu, že polygon Γ i polygon γ jsou polygony složené ze stran čtverců sítě všech druhů (0), (1), (2),..., $(n-1)$.

*

Une démonstration du théorème de Jordan sur les courbes continues.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne une démonstration du théorème de Jordan qui affirme qu'une courbe fermée C, continue et ne se coupant pas, divise tous les points du plan, n'appartenant pas à C, en deux domaines, celui des points extérieurs et celui des points intérieurs, dont la frontière commune est C. Pour démontrer ce théorème il emploie le réseau quadratique des parallèles aux axes X, Y et des polygones contenant un nombre fini de carrés de ce réseau. Il fait voir, en particulier, en détail que, si l'on choisit le côté du carré plus petit qu'un nombre positif δ, on peut former, en réunissant plusieurs de ces carrés, deux polygones Γ, γ tels que chaque point dont la distance de C est plus grande que δ (ou égale à δ) se trouve à l'extérieur de Γ ou à l'intérieur du γ; c'est de là que suit facilement la démonstration du théorème de Jordan.

Příspěvek k matematické teorii pensijního pojištění.

Napsal Dr. *Schoenbaum*.

Pensijní pojištění soukromých zaměstnanců upravené zákonem z 5./II. 1920, č. 89 sb. z. a n. poskytuje pojištěncům a jich pozůstalým nároky v případu invalidity, stáří a úmrtí pojištěncova. Výše těchto nároků závisí podobně jako v pensijním zaopatření státních a jiných veřejných zaměstnanců lineárně na příspěvkové (služební) době. Nehleďě k různosti pensijních schémat nárokových, vyplývající z různých konstant oné lineární funkce, jest rozlišovati dva podstatně různé druhy pojišťovacích nebo zaopatřovacích systémů: Buď vyměřují se nároky podle posledního pensijního základu (služné, mzda nebo jich určité části) nebo podle průměru těchto pensijních základů během příspěvkové (služební) doby.

Prvý typ užívaný na př. v zaopatření státních zaměstnanců a u pensijních ústavů jednoho zaměstnavatele vykazuje rozsáhlou teorii pojistně-matematickou, kdežto druhý systém užívaný v sociálním pojištění vykazuje dosud odbornou literaturu nepříliš bohatou, ačkoli klade problémy složitější a zajímavější než systém prvý. Důvod je pro matematika na snadě. V prvém systému jsou hodnoty nároků v určitém okamžiku časovém funkcemi dvou proměnných: dosaženého stáří x a dokonané příspěvkové doby n; v druhém systému závisí hodnoty nároků na funkci vyjadřující průběh pensijních základů (na př. služebních požitků) až do doby výpočtu a jsou tedy funkcemi čar ve smyslu Volterrově.

Chci rozřešiti v tomto článku úkol dosud neřešený a odvoditi ve formě výhodné též pro numerické aplikace přesné vzorce pro výpočet prémiové reservy pensijního (sociálního) pojištění za předpokladu, že nároky závisí kromě na příspěvkové době též na průběhu pensijních základů. Praktický význam úlohy vysvítá z toho, že každý přestup z veřejné služby do soukromé nebo naopak a veliká část přestupů ze soukromého zaměstnání do jiného musí býti po I./VII. 1920 provázena podle § 68. pens. zákona převodem premiových reserv takto počítaných.

K vůli jednoduchosti omezím se na toto schéma invalidních a starobních důchodů: Invalidní důchod obnáší po k-leté čekací době α proc. pensijního základu a stoupá každým rokem o ε proc., takže obnáší po ν letech $\beta = [\alpha + (\nu - k)\,\varepsilon]$ procent, a je pak splatný jako důchod starobní bez průkazu nezpůsobilosti. Příspěvek nechť se platí nejdéle do nápadu důchodu. Označme stáří, v němž pojištěnec přistoupil ξ, dobu příspěvkovou dokonanou v době výpočtu n, a stáří dosažené v době výpočtu x let, takže jest

$$x = \xi + n.$$

I. Předpokládejme, že pensijní základ se po celou dobu příspěvkovou nemění a obnáší s. K provedení výpočtů musíme znáti kromě intensity zúročení tabulky: intensity invalidnosti ν_x, intensity úmrtnosti v aktivním stavu μ_x^{aa}, a intensity úmrtnosti invalidů μ_x^i. Z těchto dat odvodíme čísla l_x^{aa} řádu aktivnosti, který udává, kolik zůstává na živu aktivních osob z počátečního počtu $l_{x_0}^{aa}$ osob x_0-letých, a sice ze vztahu

$$\frac{dl_x^{aa}}{dx} = -\, l_x^{aa} \, (\mu_x^{aa} + \nu_x). \tag{1}$$

Dále odvodíme na příklad jako integrály differenciálních rovnic[1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_x^{ai}}{dx} &= a_x^{ai} \,.\, (\mu_x^{aa} + \nu_x + \delta) - \nu_x \,.\, a_x^{i} \\ \frac{da_x^{i}}{dx} &= a_a^{i} \,.\, (\mu_x^{i} + \delta) - 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\frac{da_x^{aa}}{dx} = a_x^{aa} \,.\, (\mu_x^{aa} + \nu_x + \delta) - 1 \tag{3}$$

hodnotu a_x^{ai} nároku na stálý spojitý invalidní důchod 1, a_x^{aa} hodnotu nároku na podobný důchod aktivitní $x$leté osoby.

Označíme-li

$$a_x^{ai} = \frac{N_x^{ai}}{D_x^{aa}}, \qquad a_x^{aa} = \frac{N_x^{aa}}{D_x^{aa}}, \qquad D_x^{aa} = l_x^{aa} \,.\, v^x, \quad v = e^{-\delta}$$

a zavedeme-li označení

$$S_x^{ai} = N_x^{ai} + N_{x+1}^{ai} + \cdots = \sum_{k=0}^{\omega - x} N_{x+k}^{ai},$$

bude tak zvaná ryzí premie daného systému vyjádřena vzorcem

$$p_\xi = \frac{\alpha \, N_{\xi+k}^{ai} + \varepsilon \, (S_{\xi+k+1}^{ai} - S_{\xi+\nu+1}^{ai}) + \beta \, N_{\xi+\nu}^{aa}}{D_\xi^{aa}} : a_{\overline{\xi, \nu|}}^{aa}, \tag{4}$$

kdež

$$a_{\overline{\xi, \nu|}}^{aa} = \frac{N_\xi^{aa} - N_{\xi+\nu}^{aa}}{D_\xi^{aa}}$$

značí důchod aktivitní nejdéle trvající ν let.

Pro prémiovou reservu po uplynutí n let kdež $n > k$[2]) při pensijním základu 1 dostaneme pak ihned známý vzorec

$$_nV_x^{A} = \frac{[\alpha + \varepsilon\,(n-k)] \; N_x^{ai} + \varepsilon \; (S_{x+1}^{ai} - S_{x+\nu-n+1}^{ai}) + \beta N_{\xi+\nu-n}^{aa}}{D_x^{aa}} - p_\xi \,.\, a_{\overline{x, \nu-n|}}^{aa} \tag{5}$$

---

[1]) Viz část II. a III. mého pojednání: „Příspěvek k použití diferenciálních rovnic v pojistné matematice“, kde řešeny ovšem případy mnohem složitější s ohledem na reaktivisaci a závislost funkcí na dvou argumentech.

[2]) Jedině tento případ nás zde zajímá; pro $n < k$ lze premiovou reservu obdržeti nejlépe metodou retrospektivní.

Je-li pensijní základ s, stačí násobiti vzorec (5) číslem s. Tabelací hodnot ${}_nV_x^A$ jest úloha tedy úplně řešena.

II. Učiňme nyní další předpoklad, že pensijní základ obnáší nejprve po dobu n_1 let s a změní se pak na s_1. Jest vypočísti prémiovou reservu po uplynutí celkové doby

$$n > n_1 > k.$$

Vyjdeme-li z úvahy, že premiová reserva jest rozdíl hodnoty nároků a hodnoty budoucích příspěvků, obdržíme toto řešení

$$\begin{aligned} {}_nV_x^B(s, s_1) = \{\alpha . s + \varepsilon\,[s\,(n_1 - k) + s_1\,(n - n_1)]\}\,\frac{N_x^{ai}}{D_x^{aa}} + \\ + s_1 . \varepsilon\,\frac{S_{x+1}^{ai} - S_{x+\nu-n+1}^{ai}}{D_x^{aa}} + \qquad (6) \\ + \{\alpha . s + \varepsilon\,[s\,(n_1 - k) + s_1\,(\nu - n_1)]\}\,\frac{N_{x+\nu-n}^{aa}}{D_x^{aa}} - p_\xi . s_1 . a_{\overline{x,\,\nu-n}}^{aa}. \end{aligned}$$

Tento vzorec lze upraviti jednoduchou transformací takto:

$$\begin{aligned} {}_nV_x^B(s, s_1) = s_1\,\{\alpha + \varepsilon\,(n - k)\}\,\frac{N_x^{ai}}{D_x^{aa}} + s_1 . \varepsilon\,\frac{S_{x+1}^{ai} - S_{x+\nu-n+1}^{a}}{D_x^{aa}} + \\ + s_1\,\{\alpha + \varepsilon(\nu - k)\}\,\frac{N_{x+\nu-n}^{aa}}{D_x^{aa}} - s_1 . p_\xi . a_{\overline{x,\,\nu-n}}^{aa} - \\ - (s_1 - s)\,[\alpha + \varepsilon\,(n_1 - k)].\,\frac{N_x^{ai} + N_{x+\nu-n}^{aa}}{D_x^{aa}} \end{aligned}$$

čili

$${}_nV_x^B(s, s_1) = s_1 . {}_nV_x^A - (s_1 - s)\,(\alpha + \varepsilon . \overline{n_1 - k}).\,A_{x,\,n} \qquad (7)$$

kdež zavedeno označení

$$A_{x,\,n} = \frac{N_x^{ai} + N_{x+\nu-n}^{aa}}{D_x^{aa}}.$$

Máme-li tabulovaná čísla $A_{x,\,n}$, jest výpočet premiové reservy podle (7) velmi jednoduchý, neboť koeficient:

$$\begin{aligned} (s_1 - s) \cdot [\alpha + \varepsilon\,(n_1 - k)] = s_1\,[\alpha + \varepsilon\,(n - k)] - \\ - \{s\,[\alpha + \varepsilon\,(n_1 - k)] + s_1\,\varepsilon\,(n - n_1)\} \end{aligned}$$

značí rozdíl nároku v době n při základu s_1 po celou dobu n oproti skutečnému nároku.

Vzorec (7) byl podkladem pro počítání premiových reserv podle ustanovení[3]) nařízení ministerstva vnitra ze dne 26. září 1914 č. 259 ř. z.

[3]) Viz na př. *Blaschke:* Die Technik der Pensionsversicherung str. 13.

„Bylo-li získáno více než 120 měsíců, vypočtou se předem čáky na invalidní rentu, jednak, jak byly nabyty (skutečné čáky), jednak jak by byly získány, kdyby pojištěnec po celou příspěvkovou dobu byl býval v poslední dosažené platové třídě (početní čáky). Stý díl rozdílů ve výši každého z obou druhů čák násobí se pak příslušnými hodnotami tabulky Ia a IIa. (Výsledek 1.)

Dále budiž hodnota tabulky I. a II. za celou příspěvkovou dobu násobena činitelem platu posledně dosažené platové třídy. (Výsledek 2.)

Výsledek 2. buď o výsledek 1. zvětšen nebo zmenšen podle toho, byly-li při prvním výpočtu skutečné čáky větší nebo menší nežli početní čáky."

Hodnoty ${}_nV_x^A$ a $A_{x,\,n,}$ jsou tabelovány v tabulkách I. a Ia a II. a IIa.[4])

Z odvození je zřejmo, že výpočet je týž, je-li změn pensijního základu více než jedna.

Avšak odvození vzorce (7) je vadné a vzorec sám nesprávný, což jeví se v praksi vážnými nesrovnalostmi. Tak klesá premiová reserva s rostoucí dobou příspěvkovou, jestliže nastoupilo značné zvýšení pensijního základu, což je protimyslné. Na př. premiová reserva muže za 120 měsíců třídy VI. pro vstupní stáří 25 let obnáší Kč 3.601·45, avšak za další 4 měsíce třídy XVI. klesne na Kč 2626·83, a ještě po 12 měsících třídy XVI. obnáší teprve 3.190·53.

Zvýšení pensijního základu může dokonce podle vzorce 7. vésti k negativní premiové reservě!

III. Správný vzorec pro výpočet premiové reservy lze odvoditi touto úvahou:

Změnu pensijního základu s po uplynutí doby n_1 na s_1 jest nutno považovati za připojení nového pojištění k původnímu pojištění o pensijním základu s. Toto nové pojištění poskytuje nároky měřené z pensijního základu $(s_1 - s)$ a jest uhraženo novou ryzí prémií $p_{\xi,\,n_1}$, která závisí na argumentech ξ, n_1. Jest pak pro změnu pensijního základu o 1

$$p_{\xi,\,n_1} = \frac{\varepsilon\,(S^{ai}_{\xi+n_1+1} - S^{ai}_{\xi+\nu+1}) + \varepsilon\,(\nu - n_1)\,N^{aa}_{\xi+\nu}}{D^{aa}_{\xi+n_1}} : a^{aa}_{\xi+n_1,\,\nu-n_1|} \qquad (8)$$

Premiová reserva bude pak správně vyjádřena rozdílem hodnoty nároků P a hodnoty příspěvků Q

$${}_nV_x^C(s, s_1) = P - Q$$

---

[4]) *Blaschke* cit. tabulky I. a Ia pro muže; II. a IIa pro ženy str. 81—99.

hodnota nároků jest dána výrazem, jejž lze upraviti jako dříve takto:

$$P = s_1 \frac{[\alpha + \varepsilon (n - k)]\, N_x^{ai} + \varepsilon (S_{x+1}^{ai} - S_{x+\nu-n+1}^{ai}) + [\alpha + \varepsilon (\nu - k)]\, N_{x+\nu-n}^{aa}}{D_x^{aa}}$$

$$- (s_1 - s)\, [\alpha + \varepsilon (n_1 - k)] . \frac{N_x^{aa} - N_{x+\nu-n}^{aa}}{D_x^{aa}} .$$

Naproti tomu jest hodnota příspěvků dána správně pouze výrazem

$$Q = [s p_\xi + (s_1 - s)\, p_{\xi, n_1}] \,.\, a_{\overline{x, \nu - n|}}^{aa} .$$

Píšeme-li ještě $p_\xi = p_{\xi, 0}$, dosadíme-li zmíněné výrazy za P a Q a odečteme-li a přičteme-li v rovnici

$${}_n V_x^C (s, s_1) = P - Q$$

ještě člen

$$s_1 \,.\, p_{\xi, 0},$$

obdržíme vzhledem k (7)

$${}_n V_x^C (s, s_1) = {}_n V_x^B (s, s_1) - (s_1 - s)\, (p_{\xi, n_1} - p_{\xi, 0}) \,.\, a_{\overline{x, \nu - n|}}^{aa} . \tag{9}$$

Členem

$$(s_1 - s)\, (p_{\xi, n_1} - p_{\xi, 0}) \,.\, a_{\overline{x, \nu - n|}}^{aa} ,$$

jenž znamená tedy opravu původního výrazu, stává se pravá strana funkcí tří argumentů ξ, n_1, n, čímž úkol se značně ztěžuje.

Avšak lze účelnou transformací docíliti vhodné úpravy.

Podle definice jest (viz (8))

$$a) \quad p_{\xi, n_1} \,.\, a_{\overline{\xi + n_1, \nu - n_1|}}^{aa} = \frac{\varepsilon (S_{\xi+n_1+1}^{ai} - S_{\xi+\nu+1}^{ai}) + \varepsilon (\nu - n_1)\, N_{\xi+\nu}^{aa}}{D_{\xi+n_1}^{aa}}$$

podle vzorce (5) jest však

$${}_{n_1} V_\xi^A = \frac{[\alpha + \varepsilon (n_1 - k)]\, N_{\xi+n_1}^{ai} + \varepsilon (S_{\xi+n_1+1}^{ai} - S_{\xi+\nu+1}^{ai}) + \beta N_{\xi+\nu}^{aa}}{D_{\xi+n_1}^{aa}} -$$

$$- p_{\xi, 0} \,.\, a_{\overline{\xi + n_1, \nu - n_1|}}^{aa} .$$

Uvážíme-li, že jest

$$\beta = \alpha + \varepsilon (\nu - k) = \alpha + \varepsilon (n_1 - k) + \varepsilon (\nu - n_1),$$

lze psáti

$$(b) \quad p_{\xi, 0} \,.\, a_{\overline{\xi + n_1, \nu - n_1|}}^{aa} = [\alpha + \varepsilon (n_1 - k)]$$

$$\frac{N_{\xi+n_1}^{ai} + N_{\xi+\nu}^{aa}}{D_{\xi+n_1}^{aa}} + \frac{\varepsilon (S_{\xi+n_1+1}^{ai} - S_{\xi+\nu+1}^{ai}) + \varepsilon (\nu - n_1)\, N_{\xi+\nu}^{aa}}{D_{\xi+n_1}^{aa}} - {}_{n_1} V_\xi^A .$$

Odečtením vztahů *a)* a *b)* dostaneme

$$(p_{\xi, n_1} - p_{\xi, 0})\, a^{aa}_{\xi+n_1, \overline{\nu - n_1}|} = -[\alpha + \varepsilon\,(n_1 - k)]\, \frac{N^{ai}_{\xi+n_1} + N^{aa}_{\xi+\nu}}{D^{aa}_{\xi+n_1}} + {}_{n_1}V^A_\xi,$$

čili s použitím označení dříve zavedeného:

$$(p_{\xi, n_1} - p_{\xi, 0})\; a^{aa}_{\xi+n_1, \overline{\nu - n_1}|} = -[\alpha + \varepsilon(n_1 - k)]\, A_{\xi+n_1, n_1} + {}_{n_1}V^A_\xi. \quad (10)$$

Tím jest převedena funkce tří proměnných ξ, n_1, n na jednoduchý výraz složený ze známých funkcí o dvou proměnných. Použitím tohoto vyjádření mění se (9) v tento tvar

$${}_nV^C_x\,(s, s_1) = {}_nV^B_x\,(s, s_1) + (s_1 - s)\; a^{aa}_{x, \overline{\nu - n}|} \cdot \frac{[\alpha + \varepsilon\,(n_1 - k)]\; A_{\xi+n_1, n_1} - {}_{n_1}V^A_\xi}{a^{aa}_{\xi+n_1, \overline{\nu - n_1}|}}.$$

Zavedeme-li označení

$$B_{\xi, n_1} = \frac{[\alpha + \varepsilon\,(n_1 - k)]\; A_{\xi+n_1, n_1} - {}_{n_1}V^A_\xi}{a^{aa}_{\xi+n_1, \overline{\nu - n_1}|}} \quad (11)$$

bude B_{ξ, n_1} záviseti pouze na proměnných ε a n_1 a dá se vypočísti nejjednodušším způsobem ze známých veličin $A_{x, n}$ a ${}_nV_x$ a z tabulky hodnot $a^{aa}_{\overline{x, n}|}$, která jest nutna pro výpočet hodnot ${}_nV_x$.

Výpočet úplné premiové reservy děje se tedy podle vzorce

$${}_nV^C_x\;(s,\ s_1) = {}_nV^B_x(s, s_1) + (s_1 - s)\; a^{aa}_{x, \overline{\nu - n}|} \cdot B_{\xi, n_1} \quad (12)$$

anebo rozvedeme-li podle (7)

$$\begin{aligned} {}_nV^C_x\,(s, s_1) = s_1\, {}_nV^A_x - (s_1 - s)\; [\alpha + \varepsilon\,(n_1 - k)]\; A_{x,n} + \\ + (s_1 - s)\; a^{aa}_{x, \overline{\nu - n}|} \cdot B_{\xi, n_1} \end{aligned} \quad (12')$$

Vzorcem (12) nebo (12′) obdrželi jsme přesné a účelné řešení úlohy. Jest patrno, že podstatné jest při tom vyjádření veličiny p_{ξ, n_1} pomocí veličin ${}_{n_1}V_\xi$ a $A_{\xi+n_1, n_1}$.

IV. Uvažujme dále stručně případ, kdy nastanou dvě změny pensijního základu: po uplynutí doby n_1 změní se pensijní základ z s na s_1 a po uplynutí doby n_2 z s_1 na s_2. Jest stanoviti premiovou reservu po době n. Hodnota příspěvku

$$Q = [s\, p_{\xi, 0} + (s_1 - s)\; p_{\xi, n_1} + (s_2 - s_1)\; p_{\xi, n_2}] \cdot a^{aa}_{x, \overline{\nu - n}|}$$

dá se přidáním členu

$$s_2 \cdot p_{\xi, 0}$$

psáti

$$Q + s_2 \cdot p_{\xi,0} = [s(p_{\xi,0} - p_{\xi,n_1}) + s_1 (p_{\xi,n_1} - p_{\xi,n_2}) + \\ + s_2 (p_{\xi,n_2} - p_{\xi,0})] \cdot a^{aa}_{\overline{x,\nu - n}|}.$$

Výraz v hranaté závorce lze však upraviti takto:

$$(p_{\xi,n_1} - p_{\xi,0})(s_1 - s) + (p_{\xi,n_2} - p_{\xi,0})(s_2 - s_1).$$

Zavedeme-li opět veličiny ${}_{n_1}V_\xi$, ${}_{n_2}V_\xi$, $A_{\xi+n_1,n_1}$ a $A_{\xi+n_2,n_2}$ máme úplně stejným postupem jako ve III.[5])

$$(p_{\xi,n_1} - p_{\xi,0}) \cdot a^{aa}_{\overline{\xi + n_1, \nu - n_1}|} = {}_{n_1}V_\xi^A - [\alpha + \varepsilon(n_1 - k)] A_{\xi+n_1,n_1}$$

$$(p_{\xi,n_2} - p_{\xi,0}) \cdot a^{aa}_{\overline{\xi + n_2, \nu - n_2}|} = {}_{n_2}V_\xi^A - [\alpha + \varepsilon(n_2 - k)] A_{\xi+n_2,n_2}.$$

Zavedením veličin $B_{\xi,n}$ podle (11) jest konečně

$$\begin{aligned} {}_nV_x^C(s, s_1, s_2) = {}_nV_x^B(s, s_1, s_2) + [(s_1 - s) B_{\xi,n_1} + \\ + (s_2 - s_1) B_{\xi,n_2}] \cdot a^{aa}_{\overline{x,\nu - n}|}, \end{aligned} \qquad (13)$$

při čemž jest ve shodě s (7) ${}_nV_x^B(s, s_1, s_2)$ premiová reserva počítaná způsobem dosud obvyklým.

Explicitně jest

$${}_nV_x^B(s, s_1, s_2) = s_2 \, {}_nV_x^A - \Delta \cdot A_{x,n},$$

kdež Δ jest opět rozdíl mezi nárokem, jenž by tu byl, kdyby bylo pojištění od počátku trvalo s pens. základem s_2 a mezi nárokem skutečně nabytým

$$\Delta = [\alpha + (n - k)\varepsilon] s_2 - \{[\alpha + (n_1 - k)\varepsilon] s + \\ + \varepsilon(n_2 - n_1) s_1 + \varepsilon(n - n_2) s_2\} = (\alpha - \varepsilon k)(s_2 - s) + \\ + \varepsilon n_1 (s_1 - s) + \varepsilon n_2 (s_2 - s_1).$$

V. V zcela obecném případě, že nastane libovolný počet změn původního pensijního základu s_0 po uplynutí čekací doby a sice tak, v době $n_1, n_2, n_3, \ldots n_j$, že změní se pensijní základy na $s_1, s_2, s_3, \ldots s_j$, jest premiová reserva v době n dána opět vzorcem

$$\begin{aligned} {}_nV_x(s_0, s_1, s_2, \ldots s_j) = {}_xV_x^B(s_0, s_1, s_2, \ldots s_j) + \\ + \sum_{i=1}^{j} (s_i - s_{i-1}) B_{\xi,n_i} a^{aa}_{\overline{x,\nu - n}|} \end{aligned} \qquad (14)$$

---

[5]) Viz podrobné odvození ve zvláštní pojistně-matematické publikaci Všeobecného pensijního ústavu, jež vyjde v nejbližší době.

Člen ${}_nV_x^B$ počítá se známým způsobem, opravný člen

$$\sum_{i=1}^{j} (s_i - s_{i-1}) \,.\, B_{\varepsilon\, n_i}\; a^{aa}_{\overline{x,\, \nu - n|}}$$

počítá se snadno podle vzorců dříve vyložených; jest důležito poznamenati, že tento opravný člen může v mnohých případech převýšiti hlavní člen ${}_nV_x^B$, na nějž se dosavadní theorie omezovala. Při tom je důležito, že čísla B_{ε, n_i} nejsou závisla na x a n a že lze je tedy vypsati z tabulek ihned při ohlášení změny, čímž výpočet stane se pouhým sčítáním.

Pro pensijní schéma zákona o pensijním pojištění jest specielně $\alpha = 40$, $\varepsilon = 2$, $\nu = 40$, $k = 10$,

$$A_{x,\, n} = \frac{N_x^{ai} + N^{aa}_{\xi + 40 - n}}{D_x^{aa}}, \quad B_{x,\, n} = \frac{(20 + 2\,n)\, A_{x+n,\, n} - {}_nV_x^A}{a^{aa}_{\overline{x+n,\, 40-n|}}}.$$

VI. Úvahy právě provedené platí v nejširší míře i bez restrikcí dosud učiněných z důvodu přehlednosti. Především platí vztah odvozený je-li některé z čísel $n < k$ t. j. jestliže nastala změna pensijního základu během čekací doby. V tomto případě nastupují pouze místo čísel $A_{x,n}$, nová čísla definovaná takto:

$$A_{x,\, n} = \frac{N^{ai}_{x+k-n} + N^{aa}_{x+\nu-n}}{D_x^{aa}},$$

jimiž jest nutno tabulku čísel $A_{x,n}$ doplniti.

Dále platí vztah, je-li $\varepsilon + \nu = \text{konst.} = \tau$, t. j. důchod starobní splatný nejdéle při dosažení určitého stáří τ (v zákoně 70 let). V tomto případě zjednodušuje se dokonce výpočet čísel $B_{x,n}$ velmi podstatně.

Odvození platí dále samozřejmě též pro jiné nároky než invalidní a starobní. Pokud jsou tyto v přímém poměru s nárokem na invalidní důchod lze všechny příslušné členy seskupiti v jediný. Není-li tomu tak, obměňují se vzorce jednoduchým způsobem.

Pro nároky zákona o pensijním pojištění, kde jest na př. vdovský důchod roven polovině invalidního, ale vychovávací příspěvek pro děti nestoupá, bylo by lze počítati čísla $B_{x,n}$ z výrazu

$$B_{x,\, n} = \frac{(20 + 2\,n)\, A_{x+n,\, n} + \frac{40}{3}\, A'_x - {}_nV_x}{a^{aa}_{\overline{x+n,\, 40-n|}}},$$

kdež

$$A_{x+n,\, n} = \frac{N^{ai}_{x+n} + N^{aa}_{x+40} + \frac{1}{2}\, N^{a}_{x+n\,(\nu)}}{D_x^{aa}}.$$

VII. Vzorec (13), jehož důležitost je dána jeho obecnou platností, obsahuje přesné řešení předloženého problému, stanoviti premiovou reservu pensijního pojištění za libovolného průběhu služebních požitků; při tom jest praktické použití vzorce velmi snadné. Lze však vzorec ten samozřejmě ještě zjednodušiti učiníme-li oprávněné předpoklady o průběhu různých funkcí skládajících pravou stranu (13).[7])

*

Contribution à la théorie mathématique de l'assurance des retraites.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne la solution d'un problème qu'on resolvait, jusqu'ici, en théorie aussi bien qu'en pratique, incorrectement. C'est le problème suivant: Si les rentes découlant des assurances des retraites ou bien de l'assurance des rentes d'invalidité, ne dépendent pas de la valeur des derniers appointements, mais de la marche des valeurs de ces appointements, de manière qu'on compte les appointements avec les poids correspondant au temps de jouissance des appointements, déduire l'expression pour la réserve des primes. Ce problème a été résolu, en théorie et dans la législation autrichienne, par la formule (7), laquelle est inexacte et mène à des inconséquences. La faute tient à ce que cette formule suppose que les primes netto p_ξ dépendent, suivant la formule (4), seulement de l'âge d'entrée. Pour corriger la formule, il faut introduire les primes p_{ξ, n_i} qui dépendent non seulement de ξ, mais encore du temps où a changé la base des retraites. Par une transformation convenable et — chose principale — par l'introduction des réserves de primes ${}_nV_x^A$ pour une base de retraites invariable, on déduit ce résultat général:

Si les appointements primitifs de valeur s ont pris, au temps n_1 la valeur s_1, au temps n_2 la valeur s_2, ..., au temps n_j la valeur s_j, la réserve des primes de cette assurance est exprimée par la formule (14):

$$
{}_nV_x\,(s, s_1, s_2, \ldots, s_j) = {}_nV_x^B\,(s, s_1, s_2, \ldots, s_j) + \\
+ \sum_{i=1}^{j} (s_i - s_{i-1})\, B_{\xi, n_i} \cdot a^{aa}_{x, \overline{v-n|}}.
$$

---

[7]) Učiníme-li na př. supposici, že průběh funkce $B_{x,\,n}$ je pro $n > k$ přibližně vyjádřen lineární funkcí, obdržíme velmi jednoduchý výsledek pro ${}_nV_x^B$, který umožňuje vyčísliti tyto veličiny přibližně, jak odvodil jinou cestou p. prof. Lad. Truksa.

Dans cette formule B_{ξ, n_i} est un nombre auxiliaire qu'on calcule simplement à l'aide de la formule (11). Le second terme du deuxième membre donne la correction, qui peut, dans certains cas, être supérieure au premier membre. La formule (14) se prête bien, vu sa forme simple, à des calculs collectifs.

Příspěvky k nauce o čtyřstěnu.

Napsal Dr. *Jan Schuster* v Praze.

1. Nedávno vydaná práce Rudolfa Sturma „Über das grösste Tetraeder, wenn die Inhalte der Flächen gegeben sind" (J. für die reine und angew. Math. (Crelle) 1922, Bd. 152, str. 90. násl.) je podnětem k této publikaci. Sturm vychází z pojednání v Baltzerových „Elemente" a „Determinanten" a užívá jako pomůcek cosinů v rožném sinu a čtyřúhelníku přidruženého ke stěnám čtyřstěnu.

Při svých úvahách se přidržím výhradně svých method početních, obsažených jednak v „Einige Bemerkungen über das Tetraeder," Zeitschr. für d. Realschulw. 1917. XLII, již cituji jako I, jednak v práci „O čtyřstěnu největšího obsahu, v němž dány velikosti stěn", Rozpravy Akademie v Praze ročník XXVII., č. 30. z r. 1918; cituji jako II.

Pokud se týče Sturmova tvrzení (l. c. § 3.), že při daných velikostech stěn jsou protější úhly stěnové spolu vázány, odkazuji na II. rov. (*b*), kde odvozeno obecně.

V 1. odst. se zabývá Sturm čtyřstěnem maximálním, kde

$$\triangle^2_4 = \triangle^2_1 + \triangle^2_2 + \triangle^2_3.$$

Tento případ je trivialní řešení mých rovnic II (3), neboť se splní pro

$$x = B + C, \quad y = C + A, \quad z = A + B,$$

z čehož

$$A + B + C = \frac{K}{2} \text{ a } \varphi = -(BC + CA + AB) = -\frac{1}{2}\left(\frac{K^2}{4} - E\right).$$

Dle II (9) se rovnice I (10) vyloučením příslušného kořenového činitele sníží na

$$9\varphi^3 - \varphi\left(\frac{15}{2}E + \frac{K}{8}\right) + \varphi\left\{\frac{7}{4}\left(\frac{K^2}{4} - E\right)^2 - 6K\sqrt{g}\right\} +$$

$$+\left(\frac{K^2}{4} - E\right)\left\{\left(\frac{K^2}{4} - E\right)^2 \frac{1}{8} - K\sqrt{g}\right\} = 0,$$