Bolzano, dans son oeuvre inédite „Funktionenlehre“, dont le manuscrit est gardé dans la bibliothèque nationale à Vienne. L'auteur de l'article actuel constate ce fait important, et le prouve en citant les théorèmes respectifs de Bolzano, lesquels il compare à ceux de Hankel. Il complète par là son rapport intitulé „Aus dem handschriftlichem Nachlass Bernard Bolzano's“, traitant de la „fonction de Bolzano“ (la plus ancienne fonction continue sans dérivées) et publié dans le „Věstník král. spol. nauk“ (Bulletin de la Société Royale des sciences à Prague). Cette fonction est, en même temps, le premier exemple d'une fonction oscillant en tout point d'un intervalle. Il est à remarquer que Bolzano emploie — c'est ce qui arrive pour la première fois dans le développement des mathématiques — pour de telles construction une manière de définir les fonctions dont l'importance accentue Schönflies dans son „Bericht über die Mengenlehre.“ C'est ainsi que Bolzano peut être considéré, sous ce point de vue encore, comme le vrai fondateur de la théorie de ce qu'on a appelé „pathologie des fonctions“.

Součtový vzorec pro $S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} e^{-h^2 k^2}$.

Napsal *M. Kössler.*

Jednou ze základních úloh počtu pravděpodobností jest tento problem: Jest určiti součet konečné řady

$$\sum_{i=-n}^{n} p_i, \quad p_i = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 i^2} \left(1 + \varepsilon_i\right),$$

kdež ε_i jest číslo, jehož prostá hodnota nepřesahuje jistou mez ε. V podstatě jedná se tedy o stanovení součtu S uvedeného v nadpisu. K výpočtu jeho užívá se obyčejně vzorce *Euler-Maclaurinova;* vadou tohoto postupu jest obtížný odhad chyby.

Proto odvodíme v této poznámce jednak přesný součtový vzorec pro S a pak odhadneme na základě jeho horní mez chyby, které se dopouštíme, když se omezíme na obvyklé dva členy formule přibližné (viz vzorec (6))

$$S \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{nh} e^{-t^2} dt + \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 h^2}.$$

*

Nechť $f'(x)$ jest spojitá funkce v uzavřeném intervalu $< o, n >$, n číslo celistvé kladné. Označme největší celistvé číslo menší nebo rovné x symbolem $[x]$.

V integrálním vzorci

$$\int_o^n f'(x)\left\{[x]-x+\frac{1}{2}\right\}dx=\frac{1}{2}\left\{f(n)-f(o)\right\}+$$

$$+\int_o^n [x]f'(x)\,dx-\int_o^n xf'(x)\,dx$$

transformujeme per partes

$$\int_o^n xf'(x)\,dx=nf(n)-\int_o^n f(x)\,d(x)$$

a dále vypočteme

$$\int_k^{k+1}[x]f'(x)\,dx=k\left(f(k+1)-f(k)\right),$$

značí-li k číslo celistvé. Celkem obdržíme[1])

$$f(0)+2\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(n)+2\int_o^n f(x)\,dx-2\int_o^n f'(x)\left\{[x]-x+\frac{1}{2}\right\}dx.$$

Položme zde $f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$; levá strana přejde v S definované v nadpisu článku, takže vychází

$$S=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_o^n e^{-h^2x^2}dx+\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2n^2}+\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\int_o^n xe^{-h^2x^2}\left\{[x]-x+\frac{1}{2}\right\}dx\,..\,(1)$$

Tím jest řešena prvá část úlohy. V druhé části chceme odhadnouti horní mez třetího sčítance na pravé straně rovnice (1). Označme tohoto sčítance R_n a užívejme zkratek

$$\psi(x)=xe^{-h^2x^2};\quad y=\varphi(x)=\left\{[x]-x+\frac{1}{2}\right\},$$

takže jest

$$R_n=\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\int_o^n\varphi(x)\;\psi(x)\;dx\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Čára definovaná nespojitou funkcí $y=\varphi(x)$ skládá se jak známo z rovnoběžných úseček, spojujících body

$$\left(0,\frac{1}{2}\right)-\left(1,-\frac{1}{2}\right);\ \left(1,\frac{1}{2}\right)-\left(2,\frac{1}{2}\right);\ \left(2,\frac{1}{2}\right)-\left(3,-\frac{1}{2}\right)\text{atd.}$$

[1]) *Wirtinger* v Acta mathem. sv. 26., 1902 p. 255. užívá tohoto vzorce k odvození formule *Euler-Maclaurinovy*.

V dalším budeme potřebovati integrály z této funkce, které si čtenář lehko vypočte nejsnáze použitím právě uvedeného geom. významu; jsou to rovnice

$$\int_{a}^{a+1} \varphi(x)\, dx = 0, \quad -\frac{1}{8} < \int_{z}^{c} \varphi(x)\, dx \leqq 0, \quad -\frac{1}{8} \leqq \int_{z_1}^{z_2} \varphi(x)\, dx \leqq \frac{1}{8}, \ldots \quad (3)$$

kdež c jest celistvé číslo, $z < c$, $z_1 < z_2$.

Vraťme se nyní k vzorci (2). V integrálu tom jest $\psi(x)$ funkce nejdříve stále rostoucí a pak stále klesající. Maxima svého dosáhne pro x splňující rovnici

$$\psi'(x) = e^{-h^2 x^2} - 2h^2 x^2\, e^{-h^2 x^2} = 0; \quad x = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Proto rozlišíme vzorec (2) na dva případy:

$$A) \quad n \leqq \frac{1}{h\sqrt{2}}; \qquad B) \quad n > \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

V prvém případě jest $\psi(x)$ v integračním intervalu funkce neklesající a můžeme tedy užiti na vzorec (2) druhé (Bonnet-ovy) věty o střední hodnotě,[2]) které pro náš účel dáme znění:

Jestliže $\psi(x)$ v integr. intervalu stále stoupá, pak platí

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = \psi(a) \int_{a}^{\xi} \varphi(x)\, dx + \psi(b) \int_{\xi}^{b} \varphi(x)\, dx, \quad a < \xi < b.$$

V našem případě $A)$ jest tedy

$$R_n = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\, n e^{-h^2 n^2} \int_{\Theta n}^{n} \varphi(x)\, dx = -\frac{nh^3}{2\sqrt{\pi}} e^{-h^2 n^2} \vartheta \quad \ldots . \quad (4)$$

$$0 \leqq \vartheta < 1, \qquad 0 < \Theta < 1.$$

Při tom použili jsme druhého ze vzorců (3).

V případě $B)$ rozdělíme R_n na dva sčítance

$$\overset{(1)}{R_n} = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{1}{h\sqrt{2}}}, \qquad \overset{(2)}{R_n} = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{h\sqrt{2}}}^{n}.$$

[2]) *O. Bonnet:* Journal de math. p. et a. sv. 14. Viz též *Petr:* Počet integrální p. 127. vzorce (10) a (11).

Jest tedy

$$\overset{(1)}{\underset{n}{R}} = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{h\sqrt{2}} \int_{\frac{\Theta}{h\sqrt{2}}}^{\frac{1}{h\sqrt{2}}} \varphi(x)\, dx = \frac{h^2 e^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \vartheta'$$

$$0 < \Theta < 1; \qquad -1 \leqq \vartheta' \leqq 1,$$

při čemž jsme použili třetího ze vzorců (3).

Pro $R_n^{(2)}$ užijeme původní věty *Bonnet-ovy*, která zní:

Jestliže $\psi(x)$ jest v integr. intervalu stále *kladná* a klesající pak jest

$$\int_a^b \varphi(x)\ \psi(x)\ dx = \psi(a) \int_a^\xi \varphi(x)\ dx, \qquad a < \xi < b.$$

Tedy

$$\overset{(2)}{\underset{n}{R}} = \frac{4h^2}{\sqrt{2\pi e}} \int_{\frac{1}{h\sqrt{2}}}^{\Theta n} \varphi(x)\ dx = \frac{h^2}{2\sqrt{2\pi e}}\, \vartheta'',$$

$$0 < \Theta < 1; \qquad -1 \leqq \vartheta'' \leqq 1,$$

při čemž jsme použili opět třetího ze vzorců (3). Jest tedy

$$\underset{n}{R} = \overset{(1)}{\underset{n}{R}} + \overset{(2)}{\underset{n}{R}} = \frac{h^2}{\sqrt{2\pi e}}\, \vartheta_1; \qquad -1 \leqq \vartheta_1 \leqq 1 \ldots\ldots (5)$$

Výsledek celého počtu můžeme shrnouti do vzorců[3]):

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{nh} e^{-t^2}\, dt + \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 n^2} + R_n, \\ R_n &= \begin{cases} -\dfrac{nh^3}{2\sqrt{\pi}} e^{-h^2 n^2} \vartheta & \text{pro } n \leqq \dfrac{1}{h\sqrt{2}} \\ \dfrac{h^2}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \vartheta_1 & \text{pro } n > \dfrac{1}{h\sqrt{2}}, \end{cases} \\ 0 &\leqq \vartheta < 1; \qquad -1 \leqq \vartheta_1 \leqq 1. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

Z toho pak vyplývá pro úlohu, kterou jsme naznačili v úvodu

$$\sum_{i=-n}^{n} p_i = S \cdot (1 + \varepsilon\, \Theta); \qquad -1\ \Theta < 1.$$

Jestliže tedy $\varepsilon \to 0$, blíží se součet ten k S.

[3]) Pro $n = \infty$ obdržíme výsledek přesnější než *Wirtinger* (l. c.) pro funkci theta $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 k^2} = 1 + \frac{h^2}{\sqrt{2\pi e}} \vartheta_1$, kdež samozřejmě musí $\vartheta_1 > 0$

*

La formule sommatoire pour la série

$$S = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} e^{-h^2k^2}$$

(Extrait de l'article précédent.)

La formule sommatoire précise est

$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{nh} e^{-t^2} dt + \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2n^2} + R_n, \quad R_n = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^n x e^{-h^2x^2} \left\{[x] - x + \frac{1}{2}\right\} dx$$

On peut exprimer le reste R_n approximativement par la formule (6).

Příspěvek k sestrojování meze vlastního stínu zborcených ploch šroubových za osvětlení rovnoběžného.

Napsal *Jos. Kounovský*.

1. Při metodickém zpracování přednášek na vysokých školách technických jest třeba často přihlížeti z praktických důvodů k tomu, aby teoretické důkazy byly uspořádány pokud možná jednoduše. Z takové potřeby vznikla také následující úvaha; konstrukce z ní plynoucí podávají rovnoběžné osvětlení všech zborcených ploch šroubových bez použití geometrie projektivní a kinematické, opírajíce se jen o definici šroubového pohybu a o vztah mezi jeho oběma složkami; na tomto vztahu jest ostatně kinetická nauka o plochách šroubových založena.

Tečná rovina křivé plochy v libovolném jejím bodu jest dána tečnami ku dvěma křivkám, jež procházejí bodem na ploše. U zborcené plochy jest jednou touto čarou výtvarná povrchová přímka, jež bodem prochází; ta leží v tečné rovině. Mez vlastního stínu na zborcené ploše jest určena dotyčnými body světelných rovin, jež procházejí výtvarnými povrchovými přímkami. A tu jest možná určiti dotyčný bod takové světelné roviny z podmínky, že *tečna šroubovice procházející bodem dotyčným na ploše leží v jeho tečné rovině.*

2. Budiž dána v obr. 1. *pravoúhlá uzavřená šroubová plocha* o poloměru r v půdorysně a s osou o; šroubový pohyb určen jest redukovanou výškou závitu v_o, úměrnou rotačnímu pohybu po oblouku základní kružnice, jenž se rovná poloměru r. Je-li výška závitu v a sklon šroubovice σ, jest $2\pi r \,.\, \mathrm{tg}\, \sigma = v$, $r \,\mathrm{tg}\, \sigma = v_0$, a $v_o \,\mathrm{cotg}\, \sigma = r$.