Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Petr

Důkaz Jordanovy věty o spojitých čarách

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 1-2, 149--163

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109361

miroirs peut être corrigé par l'observation d'une autre paire d'étoiles, après avoir éxécuté une rotation des miroirs autour de l'axe horizontal. Une erreur personnelle systématique est éliminée, et en même temps la durée de l'observation prolongée, si l'on pose derrière l'objectif trois plaques à faces parallèles, dont deux d_1 et d'_1 tournent contrairemeut au mouvement de la plaque d_2. Les miroirs peuvent être remplacés par un prisme (fig. 5.).

Důkaz Jordanovy věty o spojitých čarách.

Napsal *K. Petr.*

Že spojitá uzavřená čára se neprotínající dělí rovinu ve dva obory (v obor bodů vnitřních a obor bodů vnějších), kteréžto obory mají onu čáru jako společnou hranici, jevilo se dříve tak samozřejmým, že nevznikla potřeba onu větu dokazovati. Teprve, když se seznalo, že spojitá čára, jejíž body $[x, y]$ jsou dány rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, při čemž φ, ψ jsou funkce spojité parametru t a parametr tento probíhá všecky hodnoty intervalu (t_0, t_1), jest útvar, který se vymyká úplně našemu názoru — byloť ku př. ukázáno, že body takové spojité čáry při vhodné volbě funkcí φ, ψ mohou úplně vyplňovati nějaký obor dvojrozměrný, na př. čtverec, — nastala nutnosť zevrubněji tou větou se zabývati. První, který podal její důkaz a který přesně vymezil pojem spojité čáry se neprotínající (jež v důsledku toho nazývají se často *Jordanovy čáry* resp. *křivky*) byl *Jordan* (Cours d'analyse, III. sv; r. 1887, str. 587; v 2. vyd. (r. 1893) sv. 1., str. 90.; v 3. vyd. (r. 1909.) sv. 1. str. 90). Důkaz jeho opírá se o možnost uzavříti čáru mezi dva jednoduché polygony a takovýmito polygony se křivce libovolně přiblížiti. Jordanově důkazu se vytýká jednak, že větu předpokládá pro polygony, jednak, že důkaz není zevrubně proveden a že zevrubné provedení jeho se prokázalo velmi obšírným.[1]) První z obou námitek jest významu zcela podřízeného, neboť věta specielní pro polygon jistě snadno se dá prokázati. Druhá jest oprávněna jenom s časovým omezením a správněji by zněla, že dosud nebyla nalezena cesta, jež by umožňovala, aby postupná approximace vedla jednoduše k zevrubnému důkazu Jordanovy věty.

V následujícím podávám důkaz Jordanovy věty zevrubně provedený, který se právě opírá o takovou approximaci a který není podstatně obšírnější než důkaz Jordanovy věty založený na jiném podkladě.[2]) Při tom předpokládám sice platnost Jordanovy věty pro polygony, avšak pro polygony velmi specielní, jež se totiž skládají

[1]) Viz *A. Winternitz*, Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs., Math. Zeitschrift, I. (1918), str. 329.

[2]) Viz *L. E. J. Brouwer*, Beweis des Jordan'schen Kurvensatzes, Math. Annalen sv. 69., (1910), str. 169., dále *A. Winternitz*, l. c.

z jistého počtu čtverců spolu podél strany (stran) souvisících, vytvořených sítí rovnoběžek s osami X, Y, z nichž každá od sousedních má touž vzdálenosť. Pro takovéto polygony jest důkaz Jordanovy věty tak snadný, že netřeba se jím vůbec zabývati.[3])

Podávám na společném základě dvě různé modifikace důkazu, z nichž druhá má výhodu, že užívá téhož postupu, jako společný základ a poskytuje tedy přímější a snad také kratší cestu k cíli.

K vůli porozumění následujícímu podotýkám, že jsem používal označení užívaného v „Diff. počtu". Znamená tedy ku př. $d\ (t_1, t_2)$ odchylku (vzdálenost) dvou bodů $[t_1]$, $[t_2]$, bodů to křivky, jimž příslušÍ parametry t_1, t_2. Odchylka bodů jest pak rovna, jsou-li $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ souřadnice těch bodů, většímu z obou čísel $|x_1 - x_2|$ $|y_1 - y_2|$. Obdobně značí $d\ (A, t)$ vzdálenost bodu A od bodu křivky $[t]$. Dále značí $O\ (A, \delta)$ okolí bodu A, jež jest definováno jako *čtverec se středem A, o stranách rovných $2\,\delta$ a rovnoběžných s osami X, Y.* Pojmy nejmenší vzdálenost dvou spojitých čar, bodu od spojité čáry, největší rozměr čáry, polygonu a pod. jsou, jak doufám, jasny bez obšírného vysvětlování; jenom podotýkám, že všechny tyto délky jsou měřeny v následujícím stejně jako odchylka (vzdálenost) dvou bodů právě definovaná.

I.

1. Budiž dána čára C spojitá, uzavřená a sebe neprotínající. Rovnice její nechť jsou

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

kde t probíhá interval (t_0, T), $T > t_0$. Jest tedy (jelikož čára jest uzavřená) $\quad \varphi(t_0) = \varphi(T),\ \psi(t_0) = \psi(T).$

Označíme-li $T - t_0 = \omega$ a definujeme-li funkce $f(t)$, $g(t)$ rovnicemi $\quad f(t) = \varphi(t),\ g(t) = \psi(t)$

pro všecka t intervalu (t_0, T) a rovnicemi

$$f(t+\omega) = f(t),\ g(t+\omega) = g(t)$$

pro všecka t vůbec, můžeme rovnice čáry C psáti ve tvaru

$$x = f(t),\ y = g(t), \tag{1}$$

při čemž t probíhá interval o délce ω s libovolným počátečným bodem. Funkce $f(t)$, $g(t)$ jsou pak funkce definované v celém intervalu s periodou ω. Jsou to dále funkce v celém intervalu spojité (neboť C jest čára spojitá) a rovnice

$$f(t') = f(t),\ g(t') = g(t)$$

[3]) V podstatě nám nepraví Jordanova věta pro takové polygony nic více než, co nám praví jich definice, tak že není ani třeba takového důkazu v tomto případě a příslušný výrok lze pokládati za samozřejmý.

mohou býti současně splněny tenkráte a jenom tenkráte, když $t' = t + k\omega$ (neboť C jest čarou sebe neprotínající).

Se zřetelem k tomu, že $f(t)$ a $g(t)$ jsou funkce spojité a periodické s periodou ω lze, zvolíme-li nějak číslo kladné δ, k němu vždy vyhledati číslo kladné ε tak, aby

$$\text{(I)} \qquad d(t', t'') < \delta$$

pro všecka t', t'', pro něž $|t' - t''| < \varepsilon$; při tom mohou hodnoty t', t'' probíhati všechny hodnoty v $(-\infty, \infty)$ a tudíž body $[t']$, $[t'']$ všecky body křivky C, avšak k jednotlivým bodům té křivky volíme takové hodnoty parametru — zvětšujíce parametr případně o celistvý násobek čísla ω, — aby $|t' - t''|$ pro dva body v úvahu přicházející bylo co nejmenší.

Se zřetelem pak k tomu, že C jest křivkou se neprotínající, lze ke kladnému číslu ε právě stanovenému nalézti kladné číslo η tak, aby $d(t', t'') \geqq \eta$ pro všechna t', t'', pro něž $|t' - t''| \geqq \varepsilon$, při čemž pro volbu parametrů t', t'' platno jest totéž stanovení jako v (I).

Číslo η lze stanoviti jakožto minimum spojité funkce

$$d\,(t', t'')$$

proměnných t', t'', jež jsou vázany ku př. podmínkami

$$0 \leqq t' \leqq \omega, \quad 0 \leqq t'' \leqq \omega, \quad \varepsilon \leqq t' - t'' \leqq \omega - \varepsilon.$$

Obor těmito podmínkami vymezený jest spojitý uzavřený; minimum tedy vskutku existuje pro určitou dvojici (určité dvojice proměnných) ku př. pro $[t', t''] = [t'_1, t''_1]$ a jest kladné, jelikož C jest křivkou se neprotínající.

Číslo δ jest při tom voliti již tak malé, aby ε bylo menší než $\frac{1}{2}\,\omega$; každá jiná volba jest ostatně vzhledem k významu (I) triviální a tudíž bezvýznamná. Vhodně volíce číslo celé, kladné n — tak, aby zachována byla platnosť vztahu (I) — stanovíme dále pro ε takovou hodnotu, aby bylo

$$\varepsilon = \frac{\omega}{n}, \qquad n > 2.$$

2. Zavedeme si nejprve některé pomocné pojmy se zřetelem ku C, resp. jejím částem a číslům δ, ε v předcházejícím voleným. Budiž C' část čáry C, jež po případě může býti celou čarou C, obsahující všecky body čáry C, jichž parametry jsou v intervalu (t_0, t'_0). Bude pak, aby každý bod byl charakterisován toliko jedinou

hodnotou $$0 < t'_0 - t_0 \leqq \omega.$$

Část C' budeme značiti v následujícím též obšírněji symbolem $\{t_0, t'_0\}$.

Sestrojme nyní čtvercovou síť vytvořenou systémy rovnoběžek jednak s osou X, jednak s osou Y, z nichž dvě sousední jsou od sebe o $\alpha \leqq \frac{1}{4}\eta$ vzdáleny. Tím pokryje se celá rovina XY mřížovou sítí čtverců o straně α. Ty ze čtverců, které mají společný bod s C' (kterýž může ležeti i na hranici dotyčného čtverce), vyčárkujme. Pak vyčárkované čtverce pokrývají souvislou část roviny. Vnější ohraničení její bude dáno mnohoúhelníkem o konečném počtu stran rovnoběžných s osami X, Y, se neprotínajícím. Označíme mnohoúhelník ten Γ'. Jeho nitro jest vyplněno jistým počtem čtverců z části vyčárkovaných, z části však nevyčárkovaných. Čtverce nevyčárkované splývají v několik „ostrovů", jichž ohraničení jsou rovněž mnohoúhelníky se neprotínající o stranách rovnob. s osami X, Y, které však obsahují uvnitř čtverce vesměs nevyčárkované; mnohoúhelníky tyto označíme $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots$[4]) Mnohoúhelníky Γ', γ_1', $\gamma'_2, \ldots$ vzájemně se ovšem nepronikají, mohou však míti společné vrcholy (nikdy však strany). Γ' budeme nazývati *vnějším polygonem* příslušným ku C' v dané čtvercové síti o straně α; $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots$ *vnitřními polygony* příslušnými ku C' v té síti. Plochu vyčárkovanou (jejížto hranice zevní jest polygon Γ', vnitřní pak dána jest polygony $\gamma_1', \gamma_2' \ldots$) vyznačovati budeme $\mathbf{G}'$ a nazývati budeme *úsekem rovinným příslušným ve čtvercové síti ku* C'. Γ', resp. $\gamma_1', \ldots$ budeme též nazývati vnějším, resp. vnitřními, polygonem úseku $\mathbf{G}'$.

Jest patrno, že $\mathbf{G}'$ jest obor roviny XY souvislý, rozumíme-li pod tímto pojmem obor, jehož dva body dají se spojiti čarou polygonální probíhající uvnitř toho oboru.

3. Budeme se nyní zabývati podrobněji úsekem rovinným příslušným ve čtvercové síti ku $\{t_0, t_0 + m\varepsilon\}$, kde $m < n$. Odvodíme si větu pro takovéto úseky se zřetelem k našim úvahám základní tím, že vycházíme od úseku patřícího ku $\{t_0, t_0 + \varepsilon\}$, připojíme úsek ku $\{t_0 + \varepsilon, t_0 + 2\varepsilon\}$, pak postupně úseky ku $\{t_0 + 2\varepsilon, t_0 + 3\varepsilon\}$, $\{t_0 + 3\varepsilon, t_0 + 4\varepsilon\}, \ldots \{t_0 + (m-1)\varepsilon, t_0 + m\varepsilon\}$.

Zavedeme si pro okamžik pro úsek rovinný příslušný ve čtvercové síti ku části $\{t_0 + i\varepsilon, t_0 + k\varepsilon\}$ označení $\mathbf{g}_{i,k}$. A tu jest nejprve patrno, že úsek $\mathbf{g}_{0,1}$ jest takový, že nemá ostrovu, jehož největší rozměr by byl větší ($\leqq$) než $2\,\delta$; neboť část křivky $\{t_0, t_0 + \omega\}$, k níž úsek ten přísluší, jest dle (I) uvnitř čtverce $O\,(t_0, \delta)$. Přidáme-li k $\mathbf{g}_{0,1}$ úsek $\mathbf{g}_{1,2}$, dostaneme (sloučením těchto úseků) úsek $\mathbf{g}_{0,2}$; ani tento úsek nemá ve svém nitru ostrovů, jichž největší rozměr by byl $\geqq 2\,\delta$; neboť příslušná část křivky $\{t_0, t_0 + 2\varepsilon\}$ jest dle (I) uvnitř čtverce $O\,(t_0 + \varepsilon, \delta)$.

Připojme nyní k $\mathbf{g}_{0,2}$ úsek $\mathbf{g}_{2,3}$, dostaneme sloučením těchto úseků $\mathbf{g}_{0,3}$. Se zřetelem k ostrovům, které po sloučení vzniknou, budeme uvažovati trojí možnosti.

Nejprve ostrovy, které jsou v $\mathbf{g}_{0,2}$ buď zůstanou nezměněny anebo tím, že do nich zasáhne úsek připojovaný, se umenší. Budou tyto ostrovy tedy takové, že jejich největší rozměr bude menší než $2\,\delta$,

[4]) Netřeba snad ani zvlášť vytýkati, že každá strana mnohoúhelníka Γ' a mnohoúhelníků $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots$ má na jednom břehu svém čtverce jenom vyčárkované, na druhém pak nevyčárkované.

Za druhé ostrovy, které jsou v připojovaném $g_{2,3}$ a jež buď zůstanou nezměněny anebo tím, že do nich vnikne úsek $g_{0,2}$ se umenší. I tyto ostrovy mají největší rozměr menší než $2\,\delta$.

Za třetí jest možno, že vzniknou nové ostrovy ohraničené vnějšími polygony obou úseků k sobě připojovaných; k vyšetření těchto jest možno mysliti si tyto vnější polygony cele vyčárkované (tedy bez ostrovů). K tomu však jest nutno a postačitelno, aby vnější polygon úseku $g_{2,3}$ vytínal[5]) na vnějším polygonu úseku $g_{0,2}$ aspoň dvě části toho polygonu spolu nesouvisící (nemající společných bodů ani na svých hranicích), kteréžto části mohou se redukovati i na body, a by bylo zároveň možno spojiti body jedné té části s body druhé části čarou lomenou probíhající vně vnější hranice úseku $g_{0,2}$ (nehledě ovšem ke koncovým bodům lomené čáry) a ležící cele uvnitř vnějšího polygonu úseku připojovaného $g_{2,3}$ včetně jeho hranic. Avšak úseky $g_{2,3}$, $g_{0,1}$ nemají bodů společných, je-li ovšem $3 < n$, jak chceme předpokládati; neboť nejmenší vzdálenosť obou částí dané křivky: $\{t_0 + 2\varepsilon, t_0 + 3\varepsilon\}$, $\{t_0, t_0 + \varepsilon\}$ jest dle (II) větší než η a tedy úseky $g_{2,3}$, $g_{0,1}$ mají nejmenší vzdálenosť větší než $\frac{1}{2}\eta \geqq 2\alpha$. Tvoří-li tedy naznačeným právě způsobem $g_{2,3}$ nový ostrov s $g_{0,2}$, v němž jest ku př. bod A, vzniká také týmž způsobem již připojením úseku $g_{2,3}$ ku $g_{1,2}$ nový ostrov, v němž jest bod A. V prvém případě vznikající ostrov (s bodem A) může býti ovšem menší než ostrov (s bodem A) vznikající v druhém případě a to právě o části úseku $g_{0,1}$ jež snad zasahují do nitra ostrova vznikajícího v druhém případě. Jelikož však ostrovy vznikající sloučením $g_{1,2}$ s $g_{2,3}$ mají největší rozměr menší než $2\,\delta$ (neboť $\{t_0 + \varepsilon, t_0 + 3\varepsilon\}$ jest celá uvnitř čtverce $O\,(t_0 + 2\,\varepsilon, \delta)$, tím spíše budou ostrovy při sloučení $g_{0,2}$ s $g_{2,3}$ nově způsobem naznačeným vznikající míti největší rozměr menší než $2\,\delta$.

Celkem jest tedy možno říci, že ostrovy v úseku $g_{0,3}$, jsou-li jaké, mají největší rozměr menší než $2\,\delta$. Je-li $n > 4$, připojíme ke $g_{0,3}$ úsek $g_{3,4}$ a není třeba, abychom opakovali úvahu právě podanou, stačí jenom upozorniti, že úseky $g_{0,2}$, $g_{3,4}$ nemají bodů společných a že tedy ostrovy teď nově vznikající (různé od ostrovů vzniklých umenšením ostrovů v $g_{0,3}$, $g_{3,4}$) lze odvoditi z ostrovů vznikajících ze sloučení $g_{2,3}$, $g_{3,4}$ náležitým umenšením. Atd.

Lze pak v důsledku úvahy podané vysloviti větu: *Úsek rovinný příslušný v uvažované čtvercové síti ku* $\{t_0, t_0 + m\varepsilon\}$, *kde*

$$m < n, \qquad \varepsilon = \frac{\omega}{n}$$

nemá ostrovů, jichž největší rozměr by byl větší ($\geqq$) *než* $2\,\delta$.

---

[5]) Pod rčením jednoduchý polygon P vytíná na polygonu jednoduchém Q část AB vyrozumívám, že část AB polygonu Q jest obsažena ve vnitru polygonu P po př. na polygonu P samotném, tak, že zároveň vně AB v okolí bodu A a B nejsou na Q body, jež by byly uvnitř P a na P.

Úvahou zcela shodnou plyne i věta: *Úsek rovinný příslušný ve čtvercové síti ku* $\{t_0, t_0 + m\varepsilon\}$ *nemá ostrovů, jež by obsahovaly body, jichž nejmenší vzdálenost od* $\{t_0, t_0 + m\varepsilon\}$ *by byla větší* ($\geqq$) *než* δ. V tomto případě stačí si uvědomiti, že, je-li bod A, jehož nejmenší vzdálenost od $\{t_0, t_0 + m\varepsilon\}$ jest $\geqq \delta$, uvnitř čtverce $O(A, \delta)$ není bodů, jež by byly na $\{t_0, t_0 + m\varepsilon\}$.

Konečně jest patrno, že místo, abychom ke konci k předcházejícím úsekům připojovali úsek $g_{m-1,m}$ příslušný k $\{t_0 + (m-1)\varepsilon, t_0 + m\varepsilon\}$, možno připojiti úsek příslušný ku $\{t_0 + (m-1)\varepsilon, t_0 + (m-1+\theta)\varepsilon\}$, kde θ jest číslo kladné menší než 1, aniž by tato záměna měla vliv na podstatnou vlastnost námi pro výsledný úsek dokazovanou; lze tedy vysloviti i větu:

Úsek rovinný příslušný v uvažované čtvercové síti ku $\{t_0, t_1\}$, *kde* $t_1 > t_0$, $t_0 + \omega \geqq t_1 + \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{\omega}{n}$ *nemá ostrovů, jichž největší rozměr by byl větší* ($\geqq$) *než* 2δ *ani ostrovů obsahujících body, jichž nejmenší vzdálenost od* $\{t_0, t_1\}$ *by byla větší* ($\geqq$) *než* δ.

Zbývá jenom vyšetřiti úsek rovinný příslušný ve čtvercové síti ku celé uzavřené křivce C. Tento úsek dostaneme, připojíme-li k úseku $g_{0,n-1}$ úsek $g_{n-1,n}$. V tomto případě nelze užiti myšlenkového postupu svrchu vylíčeného při připojení g_{23} ku g_{02}; neboť $g_{n-1,n}$ má společné body (čtverce sítě) s $g_{0,n-2}$. Rovnice křivky dává totiž, pro dvě hodnoty parametru, jichž rozdíl jest ω, tytéž body roviny XY. Při onom připojení mohou tedy vznikati ostrovy, jich největší rozměr jest $> 2\delta$. Abychom vyšetřili hodnoty pro δ, při kterých v úseku příslušném ku C takové ostrovy vskutku jsou, a také počet ostrovů, budeme uzavřenou křivku C poněkud zevrubněji se zřetelem k jejím rozměrům bráti v úvahu. I naskytá se při vyšetřování příslušném dvojí cesta; první z nich vylíčena v odst. následujícím, druhá, ke které teprve později jsem dospěl, vyložena v odst. 6.

II.

4. Funkce $g(t)$ v rovnici čáry C se vyskytující má v intervalu o délce ω jistou horní a jistou dolní hranici. Dolní hranice nechť nabývá ku př. pro hodnotu $t = u_0$, horní pak pro hodnotu $t = u'_0$; při tom můžeme (a budeme) předpokládati, že $u'_0 > u_0$ a $u_0 + \omega > u'_0$. Označíme

$$x_0 = f(u_0),\ y_0 = g(u_0);\ x'_0 = f(u'_0),\ y'_0 = g(u'_0).$$

Čára C jest pak celá obsažena v pásu P vytvořeném rovnoběžkami $y = y_0$, $y = y'_0$; $y'_0 > y_0$. Označíme dále arithmetický střed čísel y_0, y'_0 krátce η_0 a najdeme dvě čísla ξ_0, ξ'_0 taková, aby

$$\xi_0 < f(t) < \xi'_0$$

pro všecka t intervalu o délce ω. Můžeme pak říkati: bod $[\xi_0, \eta_0]$ jest v pásu P na levo od křivky C; bod $[\xi'_0\ \eta_0]$ pak na pravo.

Sestrojme čtvercovou síť, v níž číslo základní δ zvolíme tak, aby

$$(\sigma) \qquad \delta < \tfrac{1}{6}(y'_0 - y_0).$$

Sestrojíme dále úsek rovinný příslušný v této čtvercové síti ku části $C' = \{u_0, u'_0\}$. Jelikož $d\,(u_0, u'_0) \geqq y'_0 - y_0 > 6\,\delta$, jest $|u'_0 - u_0| > \varepsilon$, avšak také $|u_0 + \omega - u'_0| > \varepsilon$ a lze použíti věty odstavce předcházejícího pravící, že úsek k $\{u_0, u'_0\}$ nemá ostrovů, v nichž by byly body, jichž nejmenší vzdálenost od $\{u_0, u'_0\}$ jest větší ($\geqq$) než δ. Vnější polygon Γ' příslušný ku $\{u_0, u'_0\}$ nebude míti tedy ve svém nitru (a ovšem také ne na obvodě) bodů, jichž nejmenší vzdálenost od $\{u_0, u'_0\}$ — a tedy také bodů, jichž nejmenší vzd. od C — by byla $> \delta$. Všecky takové body jsou vně toho polygonu.

Doplňme čáru $C' = \{u_0, u'_0\}$ paprsky z bodů $[x_0, y_0]$, $[x'_0, y'_0]$ vycházejícími a rovnoběžnými s osou Y; body paprsku prvého hoví podmínkám $x = x_0$, $y \leqq y_0$, druhého podmínkám $x = x'_0$, $y \geqq y'_0$. Čára tak vzniklá — označme ji $\mathfrak{C}$ — dělí rovinu na dvě části. Neboť bod $[\xi_0, \eta_0]$ nelze spojiti s bodem $[\xi'_0, \eta_0]$ čarou lomenou (t. j. čarou skládající se z konečného počtu úseček), jež by neprotínala $\mathfrak{C}$ (jež by neměla s $\mathfrak{C}$ body (bod) společné). To následuje ihned z vlastnosti spojité čáry (každé spojité čáry), kterou tu sice jako známou předpokládáme, jíž by však snadno bylo dokázati také pomocí čtvercové sítě tu používané. Na druhé straně však z úvahy podané následuje bezprostředně, že každý bod, jehož nejmenší vzdálenost od C' jest $\geqq \delta$ — to však znamená vůbec každý bod neležící na C' jelikož kladné číslo δ si můžeme voliti libovolně malé, — lze spojiti čarou lomenou neprotínající $\mathfrak{C}$ buď s bodem $[\xi_0, \eta_0]$ aneb s bodem $[\xi'_0, \eta_0]$. Neboť všecky body, jichž vzdálenost od C' jest $\geqq \delta$ leží vně polygonu Γ' svrchu zavedeného a o bodech, které leží vně vnějšího polygonu Γ' po případě i na jeho obvodě, jest to patrno.

Dělí tedy čára $\mathfrak{C}$ rovinu XY vskutku ve dvě části souvislé (a to jednoduše souvislé) a budeme říkati, že bod $[x, y]$ leží na levo od $\mathfrak{C}$ v rovině XY — anebo také na levo od C' v pásu P, je-li v pásu P, — jestliže jest v téže části roviny XY (resp. pásu P) jako bod $[\xi_0, \eta_0]$. Jestliže je v té části, ve které jest bod $[\xi'_0, \eta_0]$, budeme říkati, že leží na pravo od $\mathfrak{C}$ (je-li v pásu P, pak jest na pravo od C' v pásu P). Stejně budeme se vyjadřovati o poloze bodu (že leží na pravo nebo na levo) vzhledem k polygonální čáře, po případě vzhledem k polygonální čáře uzavřené se neprotínající doplňujíce vhodným způsobem (jako jsme to učinili při C') onu polygonální čáru dvěma paprsky; ku př. čáru Γ' bychom doplnili paprsky o rovnicích $x = x_0$, $y \leqq y_0 - \alpha$; $x = x'_0$ $y \geqq y'_0 + \alpha$, vycházejících z bodů $A = [x_0, y_0 - \alpha]$, $A = [x'_0, y'_0 + \alpha]$ ležících na Γ'. Body

A, A' dělí Γ' na dvě části; té, která leží na levo od $\mathfrak{C}$, budeme říkati levá, jež na pravo, pravá část polygonální čáry Γ'.

Vezmeme v úvahu nyní úsek rovinný příslušný ku části $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$. I tento úsek nemá ostrovů, v nichž by se nacházely body, jichž nejmenší vzdálenost od $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ by byla $\leqq$ než δ. Úsek tento zasahuje do čtverců $O(u'_0, \delta)$, $O(u_0, \delta)$, neboť body $[u'_0+\varepsilon]$, $[u_0+\omega-\varepsilon]=[u_0-\varepsilon]$ jsou dle (I) uvnitř těchto čtverců. Největší rozměr úseku jest tedy $\leqq 4\delta$. Úsek ten nemá dále společných bodů s úsekem k $\{u_0, u'_0\}$, neboť nejmenší vzdálenost části $\{u_0, u'_0\}$ od $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ jest dle (II) větší ($\geqq$) než η, Se zřetelem k rozměrům svým nemůže býti úsek ku $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ na ostrově vytvořeném na úseku k $\{u_0, u'_0\}$, který nemá ostrovů jichž rozměr by byl větší než 2δ, a leží tedy oba úseky k $\{u_0, u'_0\}$, $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ vedle sebe, t. j. vnější polygon ku $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ jest vně vnějšího polygonu k $\{u_0, u'_0\}=\Gamma'$, a naopak; nejmenší vzdálenost obou vnějších polygonů jest $\geqq 2\alpha$. Leží tedy vnější polygon k $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ buď na pravo nebo na levo od Γ' (ve smyslu dříve vymezeném). *Dejme tomu, že leží na levo.* Pak i $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ leží na levo od $\{u_0, u'_0\}$ v pásu P a poněvadž δ i ε můžeme si voliti libovolně malé jest i $\{u'_0, u_0+\omega\}$ celá — nehledě ovšem ke koncovým bodům t. j. k bodům $[u'_0]$, $[u_0+\omega]=[u_0]$ — na levo od $\{u_0, u'_0\}$ v pásu P.

Stejně ovšem následuje, že pak $\{u_0, u'_0\}$ jest v pásu P celá (nehledě ke konc. b.) na pravo od $\{u'_0, u_0+\omega\}$.

Z toho dále následuje, že žádný bod levé části vnějšího polygonu ku $\{u_0, u'_0\}$ není na levo od levé části vnějšího polygonu ku $\{u'_0, u_0+\omega\}$. Neboť v opačném případě by existoval čtverec sítě na úseku rovinném příslušném ku $\{u_0, u'_0\}$, který by ležel na levo od levé části vnějšího polygonu ku $\{u'_0, u_0+\omega\}$ — jeho obvod však částečně s tímto polygonem by mohl splývat; — t. j. existoval by bod na $\{u_0, u'_0\}$, který by byl na levo od $\{u'_0, u_0+\omega\}$.

Stejně následuje, že žádný bod pravé části vnějšího polygonu k $\{u'_0, u_0+\omega\}$ neleží na pravo od pravé části vnějšího polygonu ku $\{u_0, u'_0\}$.

Dále následuje bezprostředně z předcházejícího, že levá část vnějšího polygonu ku $\{u'_0, u_0+\omega\}$ a pravá část vnějšího polygonu k $\{u_0, u'_0\}$ nemají bodů společných — nehledě ovšem k počátečnímu a koncovému bodu obou těch částí, totiž k bodům $[x_0, y_0-\alpha]$, $[x'_0, y'_0+\alpha]$ — a tvoří dohromady celý vnější polygon příslušný ku celé uzavřené křivce C (t. j. vnější ohraničení úseku rovinného příslušného k uzavřené křivce C).

Poněvadž dále úseky rovinné příslušné ku $\{u'_0, u_0+\omega)$ a k $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ se liší toliko o čtverce sítě, jež jsou součástí úseků příslušných k $\{u'_0, u'_0+\varepsilon\}$ a k $\{u'_0+\omega-\varepsilon, u_0+\omega\}\equiv$ $\equiv\{u_0-\varepsilon, u_0\}$ a tyto úseky jsou prvý ve čtverci $O(u'_0, \delta+\alpha)$

druhý ve čtverci $O(u_0, \delta+\alpha)$ — v důsledku (I), — shoduje se vně těchto dvou čtverců úsek k $\{u'_0, u_0+\omega\}$ s úsekem k $\{u'_0+\varepsilon, u+\omega-\varepsilon\}$, o kterémž bylo svrchu ukázáno, že leží na levo od vnějšího polygonu k $\{u_0, u_0\}$. Jest tedy vnější polygon k $\{u'_0, u_0+\omega\}$ a specielně jeho pravá část, pokud obojí probíhá vně čtverců $O(u'_0, \delta+\alpha)$, $O(u_0, \delta+\alpha)$ na hranici úseku rovinného příslušného k C a budou oddíly pravé části vnějšího polygonu příslušného k $\{u'_0, u+\omega\}$ probíhající vně čtverců $O(u'_0, \delta+\alpha)$, $O(u_0+\delta+\alpha)$ spolutvořiti vnitřní ohraničení úseku příslušného k C, t. j. budou součástkami polygonů vnitřních k C příslušných (součástkami hranic ostrovů na úseku vznikajících). Jeden z těch oddílů pravé části vnějšího polygonu k $\{u'_0, u_0+\omega\}$ probíhající vně zmíněných čtverců jistě bude spojovati jeden bod obvodu čtverce $O(u_0, \delta+\alpha)$ s jedním bodem obvodu čtverce $O(u'_0, \delta+\alpha)$ a bude míti tento oddíl rozměr $>6\delta-2\delta-2\alpha>2\delta$. *V úseku k C příslušném aspoň jeden ostrov tedy bude o největším rozměru větším než* 2δ. Avšak můžeme snadno dokázati, že bude toliko jeden takový ostrov.

Neboť ostrov každý, jehož největší rozměr jest větší než 2δ, anebo, v němž nacházejí se body, jichž vzdálenost nejmenší od C jest $\geqq\delta$, zasahuje do čtverce $O(u_0, \delta+\alpha)$. Kdybychom totiž odejmuli od C část $\{u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon\}$, pak k zbývající části čáry C příslušný úsek nebude, jak jsme svrchu dokázali míti již takových ostrovů. Nutně tedy jsou při hranici těch ostrovů čtverce sítě z úseku k $\{u_0-\varepsilon; u_0+\varepsilon\}$ a tedy dle (I) atd. Ze stejné příčiny zasahuje každý takový ostrov do čtverce $O(u'_0, \delta+\alpha)$. Vně obou čtverců jsou na úseku k C jenom ty čtverce sítě, jež přináleží buď úseku příslušnému k $\{u_0+\varepsilon, u'_0-\varepsilon\}$, anebo úseku příslušnému k $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$. Oba úseky poslední však nemají bodů společných (ani na hranicích, nejmenší jich vzdálenost jest $\geqq 2\alpha$) a tedy ostrovy, o něž jde, jsou ohraničovány buď pásy (po případě i řetězy) čtverců sítě, jež přináleží všechny buď jednomu nebo druhému z obou posledních úseků. Avšak z úseku $\{u_0+\varepsilon, u'_0-\varepsilon\}$ může býti toliko jediný takový pás (resp. řetěz), neboť kdyby byly dva po případě více, byly by v úseku příslušném ku $\{u_0-\varepsilon, u'_0+\varepsilon\}$[6]) jeden po případě více ostrovů, jichž rozměr největší jest $\geqq 2\delta$, což jest, jak jsme ukázali, nemožno.

I z úseku k $\{u'_0+\varepsilon, u_0+\omega-\varepsilon\}$ existuje pouze jeden pás a jsou celkem dva pásy čtverců sítě spojující čtverce $O(u_0\ \delta+\alpha)$, $O(u'_0, \delta+\alpha)$ a nemající bodů společných, jež mohou ohraničovati toliko jediný ostrov, jehož rozměr největší jest větší ($\geqq$) než 2δ a který jediný může obsahovati body, jichž vzdálenost nejmenší od C jest větší ($\geqq$) než δ.

Máme tak celkem tento výsledek: *Úsek rovinný příslušný k čáře C o rovnici (1) ve čtvercové síti sestrojené na základě*

---

[6]) Úsek příslušný k $\{u_0-\varepsilon, u'_0+\varepsilon\}$ skládá se z úseků k $\{u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon\}$, $\{u_0+\varepsilon, u'_0-\varepsilon\}$ $\{u'_0-\varepsilon, u'_0+\varepsilon\}$.

čísla δ, menšího než šestina oscillace funkce $g(t)$, jest ohraničen jednak polygonem vnějším Γ, jednak jedním polygonem vnitřním γ, jehož největší rozměr jest větší než 2δ, a vedle toho mohou tvořiti hranici toho úseku polygony vnitřní, jichž největší rozměr jest však menší než 2δ. Body, jichž nejmenší vzdálenost od C jest větší ($\geqq$) než δ, jsou buď vně polygonu Γ anebo uvnitř polygonu γ (kteréžto polygony oba jsou polygony se neprotínající složené z úseček rovnoběžných buď s osou X anebo s Y).

5. Zvolme si v rovině XY bod $[\xi_0, \eta_0]$, kde ξ_0 jest ku př. menší než dolní hranice funkce $f(t)$ (z rovnice (1) dané čáry C). Na základě bodu $[\xi_0, \eta_0]$ podáme pak tuto definici:

Každý bod roviny, neležící na C který se dá spojiti s bodem $[\xi_0, \eta_0]$ čarou lomenou nemající s C společné body, sluje bod vnější ku C.

Každý bod roviny, neležící ua C, který se nedá spojiti s bodem $[\xi_0, \eta_0]$ čarou lomenou nemající s C společné body, sluje bod vnitřní ku C.

Z definice následuje:

1. *Jsou body vnější ku C a jsou body vnitřní ku C.* Že jsou body vnější ku C, jest bezprostředně patrno. Každý bod vně Γ má vlastnost v definici požadovanou. Že jsou body vnitřní lze snadno dokázati. Lze totiž dokázati, že každý bod uvnitř γ jest bodem vnitřním. Neboť dejme tomu, že by byl bod $[\xi'_0, \eta'_0]$ uvnitř γ, který by nebyl bodem vnitřním a který by tudíž bylo možno spojiti čarou lomenou nemající s C body společné — značme ji pro okamžik A — s bodem, $[\xi_0, \eta_0]$. Pak by A od C měla jistou nejmenší vzdálenost ϱ od nully různou (jak z vlastností spojitých funkcí ihned následuje). Sestrojme místo dosud užívané čtvercové sítě o straně α, novou čtvercovou síť se stejným počátečným bodem a z přímek opět rovnoběžných s osami X, Y, jejíž strana však jest $\frac{\alpha}{N}$, kde N jest číslo celé, kladné. Pak místo vnitřního polygonu γ dostaneme polygon γ_N; při tom γ_N bude obsahovati ve svém nitru celou část roviny XY, kterou obsahuje γ, a vedle toho ještě další čtverce o straně $\alpha . N^{-1}$. Bod $[\xi'_0\ \eta'_0]$ bude tudíž také uvnitř γ_N; lomená čára spojující $[\xi'_0, \eta'_0]$ s $[\xi_0, \eta_0]$ protínati bude polygon γ_N aspoň v jednom bodě, tento bod má od C vzdálenost menší než $\alpha . N^{-1}$, i jest na A bod, který má od C vzdálenost menší než $\alpha . N^{-1}$. Zvolíme-li si však N dosti veliké, jest $\alpha . N^{-1}$ menší než ϱ a nemá tedy A nejmenší vzdálenost od nully různou; t. j. A má nejmenší vzdálenost od C rovnou nulle a protíná C.

2. *Každý bod roviny neležící na C jest buď bodem vnějším ku C anebo bodem vnitřním ku C.* Je-li dán totiž, kterýkoliv bod roviny neležící na C, jehož nejmenší vzdálenost od C jest σ, sestrojíme čtvercovou síť na základě čísla δ, jež jest jednak menší

než σ, jednak menší než šestina oscillace funkce $g(t)$. Pak bod daný se nachází buď vně Γ anebo uvnitř γ a tvrzení učiněné jest ihned patrno.

3. *Každé dva body vnitřní ku C lze spojiti lomenou čarou neprotínající C. Totéž jest platno pro dva body vnější ku C. Bod vnitřní ku C nelze spojiti s bodem vnějším k C lomenou čarou neprotínající C.* Jsou-li vzdálenosti nejmenší obou bodů od C dány čísly σ_1, σ_2, vyjdeme od δ, které jest menší než všecka čísla σ_1, σ_2 a šestina oscilace funkce $g(t)$ a věta jest ihned patrna. Ostatně lze výrok tu uvedený aspoň z části pokládati jako důsledek definice bodů vnitřních a vnějších.

Z předcházejícího jest jasno, *že spojitá čára C o rovnicích* (1) *dělí vskutku rovinu ve dvě části: v obor bodů vnějších ku C a v obor bodů vnitřních ku C. Obě ty části jsou obory souvislé; hraniční body těchto oborů jsou pak dány všemi body čáry C.*

Že každý bod čáry C, ku př. bod $[t']$, jest hraničním bodem obou oborů, jest patrno z okolnosti, že odejmeme-li od C část $\{t-\varepsilon, t'+\varepsilon\}$, pak k zbytku bude příslušeti úsek rovinný $\mathbf{G}_0$ neobsahující již ostrovy o největším rozměru větším než $2\,\delta$. Při přechodu tedy od úseku příslušného ku C (majícího ostrov omezený polygonem γ) k úseku $\mathbf{G}_0$ změní se jistý pás čtverců vyčárkovaných spojující hranici polygonu γ s hranicí vnějšího polygonu Γ v pás čtverců nevyčárkovaných. Poněvadž však $\{t'-\varepsilon, t'+\varepsilon\}$ jest celá uvnitř čtverce $O(t', \delta)$, jsou jistě uvnitř čtverce $O(t', \delta+\alpha)$ body i z vnitřka polygonu γ i z vnějška polygonu Γ.

Věta Jordanova jest tak ve všech svých částech dokázána.

III.

6. Obrátím se nyní k druhé modifikaci důkazu Jordanovy věty. Vycházeti budou opět od výsledku odst. 3. a budou uvažovati ještě podrobněji proces vytvoření úseku rovinného $\mathbf{g}_{0,m}$ postupným přidáváním úseků $\mathbf{g}_{i,i+1}$ k úseku již stávajícímu, jak v odst. 3. již částečně byl popsán. Provedu tu za předpokladu

$$\delta \leqq \tfrac{1}{6}\Delta, \tag{π}$$

kde Δ jest největší rozměr čáry C.

Nejprve jest patrno, že přidáme-li úsek $\mathbf{g}_{i,i+1}$ k úseku $\mathbf{g}_{0,i}$, výsledný úsek rovinný $\mathbf{g}_{0,i+1}$ bude obsahovati více čtverců sítě než obsahuje úsek $\mathbf{g}_{0,i}$; neboť v $\mathbf{g}_{i,i+1}$ jest ku př. bod $[t_0+(i+1)\varepsilon]$ jehož vzdálenost ode všech bodů části $\{t_0, t_0+i\varepsilon\}$, k níž patří právě úsek $\mathbf{g}_{0,i}$, jest $\geqq \eta$; tedy atd, Mohlo by se však státi, že by *všecky* čtverce sítě, o něž $\mathbf{g}_{0,i+1}$ od $\mathbf{g}_{0,i}$ se takto liší, (čtverce nově přibylé) spadly do nitra ostrova v $\mathbf{g}_{0,i}$ se nacházejícího. Pak by do nitra téhož ostrova zapadl úsek $\mathbf{g}_{i+1,i+2}$, který souvisí toliko se čtverci úseku $\mathbf{g}_{i,i+1}$ a nestýká — maje větší vzdálenost od něho než $\frac{1}{2}\eta$ — se s úsekem $g_{0,i}$) a také následující úseky $g_{i+2,\,i+3}$, $g_{i+3,\,i+4}, \ldots$ postupně byvše přidávané by zapadly do nitra toho ostrova.

Dejme tomu, že by v řadě úseků $g_{k,k+1}$, $k = 1, 2, 3 \ldots n-2$, úsek $g_{i,\,i+1}$ měl první vlastnost právě vylíčenou (že by čtverce sítě nově v $g_{0,i+1}$, přibylé spadly do nitra nějakého ostrova úseku $g_{0,i}$). Pak by tyto čtverce zapadaly buď do ostrova, který jest v $g_{i-1,i}$ aneb do ostrova vytvořeného vnějšími polygony úseků $g_{i-2,\,i-1}$, $g_{i-1,\,i}$ anebo konečně do ostrova vytvořeného vnějšími polygony $g_{i-3,\,i-2}$, $g_{i-2,\,i-1}$, do kteréhož to ostrova by zapadla též část čtverců nově přibylých při připojení úseku $g_{i-1,\,i}$ ku $g_{0,\,i-1}$ (k nimž pak by se připojil úsek $g_{i,i+1}$, jenž by *celý* zapadl do onoho ostrova).[7])

Uvažujme z těchto tří případů poslední (jakožto nejnepříznivější pro další úvahu). Pak do ostrova utvořeného vnějšími polygony úseků $g_{i-3,\,i-2}$, $g_{i-2,\,i-1}$ zapadá celý úsek $g_{i,i+1}$ a zapadnou tudíž dle předcházejícího i úseky

$$g_{i+1,\,i+2},\ g_{i+2,\,i+3},\ \ldots,\ g_{n+i-5,\,n+i-4} \equiv g_{i-5,\,i-4},$$

postupně-li tyto úseky přidáváme; t. j. celá čára C s výjimkou části $\{t_0 + (i-4)\,\varepsilon,\ t_0 + (i-3)\,\varepsilon\}$ jest uvnitř vnějšího polygonu úseku $g_{i-3,i}$ (kterýž vzniká právě sloučením tří úseků $g_{i-3,\,i-2}$, $g_{i-2,\,i-1}$, $g_{i-1,i}$). Úsek tento má největší rozměr menší než $3\,\delta + 2\,\alpha$ (neboť první dva úseky, z nichž jest složen, jsou uvnitř čtverce $O\,(t_0 + (i-2)\,\varepsilon,\ \delta + \alpha)$ se stranou $2\,\delta + 2\,\alpha$; třetí pak úsek jest ve čtverci $O\ (t + (i-1)\,\varepsilon,\ \delta + \alpha)$, jehož střed jest uvnitř čtverce $O\,(t_0 + (i-2)\,\varepsilon,\ \delta)$). Avšak, odejmeme-li z C část $\{t_0 + (i-4)\,\varepsilon,\ t_0 + (i-3)\,\varepsilon\}$, pak zbytek čáry má jistě rozměr větší než $3\,\delta$ — v důsledku (π) — a nemůže býti zbytek obsažen na úseku $g_{i-3,i}$. Nemůže nastati tudíž třetí z případů svrchu uvedených a tím spíše nenastanou také prvé dva případy.

Přidáme-li tedy k úseku $g_{0,i}$ úsek $g_{i,i+1}$, kterýmžto přidáním změní se $g_{0,i}$ v $g_{0,\,i+1}$ jest aspoň část přírůstku (o který se $g_{0,i+1}$ liší od $g_{0,i}$) obsažena vně vnějšího polygonu úseku $g_{0,i}$. Jest patrno dále, že bod $[t_0]$, od kterého vycházíme, může býti kterýkoliv bod čáry C; místo od bodu $[t_0]$ můžeme vycházeti od $[t_0 + j\,\varepsilon]$ a věta právě dokázaná rozšiřuje se i pro ten případ, že bychom k úseku $g_{j,e}$ přidávali úsek $g_{e,\,e+1}$. Rovněž jest jasno, že bychom stejně mohli postupovati ve směru protivném, t. j. k úseku $g_{j,\,e}$ přidávati úsek $g_{j-1,\,j}$.

Jsou tudíž v důsledku předcházejícího při vnějším polygonu úseku $g_{0,m}$, kde $m < n$, čtverce sítě z úseku $g_{0,\,m}$, jež patří úseku $g_{m-1,m}$, a čtverce sítě z úseku $g_{0,\,m}$, jež patří úseku $g_{0,1}$ (tak že

7) Aby jenom část úseku $g_{i,i+1}$, zapadala do ostrova utvořeného vněj. pol. úseků $g_{i-3,\,i-2}$, $g_{i-2,\,i-1}$, jest nemožno; neboť jednak každý rovinný úsek jest souvislý, jednak $g_{i,i+1}$ nemá společných bodů ani s $g_{i-3,\,i-2}$ ani s $g_{i-2,\,i-1}$.

strany těch čtverců spolutvoří vnější polygon úseku $g_{0,m}$). Abychom se v následujícím stručněji mohli vyjadřovati, budeme říkati straně čtverce sítě, který patří úseku $g_{i,i+1}$, a žádnému jinému úseku $g_{k,k+1}$, kde $k \neq i$, že jest druhu (i); následkem toho můžeme vysloviti svrchu činěný důsledek takto: Na vnějším polygonu úseku $g_{0,m}$ jsou strany druhu (m) a strany druhu (0). Dále budeme říkati, že strana jest druhu $(i, i+1)$, je-li stranou čtverce patřícího současně oběma úsekům $g_{i,i+1}$, $g_{i+1,i+2}$.[8])

Vyjděme nyní z bodu O ležícího na vnějším polygonu úseku $g_{0,m}$ a na straně druhu m a postupujme na vnějším polygonu stále týmž směrem; přijdeme nutně k stranám druhu (0) resp. druhu (0, 1). Budiž bod A počáteční bod prvé z těchto stran, k nimž takto dospějeme (na části OA vnějšího polygonu není tedy stran druhu (0), (0, 1)). Postupujeme-li od A na vnějším polygonu úseku $g_{0,m}$ dále (stále týmž směrem) přijdeme nutně k bodu B, který jest koncovým bodem jedné ze stran druhu (0), (0, 1) a který jest takový, že postupujeme-li dále od B k O nesetkáme se již se stranami druhu (0), (0, 1). Na AB[9]) jsou tedy všecky strany druhu (0), (0, 1) nacházející se na vnějším polygonu úseku $g_{0,m}$. Obdobně vyhledáme body C, D takové, že na části CD jsou všecky strany druhu (m), $(m-1, m)$ nacházející se na vnějším polygonu úseku g_{0m}. Na CD jest ovšem také bod O a body C, D jsou koncovými body stran druhu (m), $(m-1, m)$.

Tu nejprve jest patrno: Na DA jsou jistě strany druhu (1), (2), (3),... $(m-1)$ a vedle toho mohou tam býti též strany druhu $(j, j+1)$, kde $j = 1, 2, \ldots, m-2$. Neboť strana druhu (i) může sousediti toliko se stranami druhu (i) $(i-1)$, $(i+1)$ $(i, i+1)$, $(i-1, i)$. Strana druhu $(i-1, i)$ může pak sousediti toliko se stranami druhu (i), $(i-1)$, $(i-1, i)$; t. j. se stranami, jichž druh není charakterisován jinými indexy, než jsou ty, které charakterisují stranu samu. Přejdeme-li od D k A (stále v témž směru) nutně tedy setkáme na DA se stranami druhu (1), (2)... $(m-1)$. V bodě D samotném ku př. začíná strana druhu $(m-1)$. Totéž co platno pro DA, jest platno i pro BC.

Dále snadno lze dokázati: Na AB není stran druhu charakterisovaného indexem (indexy) většími než 1. Předpokládejme ku př., že by tam byly strany charakterisované indexem 2, t. j. strany jednoho ze tří druhů (2), (1, 2), (2, 3). Pak kdybychom od úseku

[8]) Dvěma jiným z úseků $g_{k,k+1}$ (než úsekům, jichž indexy jsou rozdílny o 1) nemůže jeden a týž čtverec současně patřit, jak v důsledku (II) nám známo.

[9]) Při tom pod AB vyrozumíváme část vnějšího polygonu úseku $g_{0,m}$ omezenou body A a B, kterou proběhneme, postupujeme-li od A ku B na onom polygonu týmž směrem, jako jsme postupovali od O ku A. Stejný význam mají v násl. CD, DA, BC.

$g_{0,m}$ odebrali všechny čtverce úseku $g_{2,3}$ i když snad patří ty čtverce také jiným úsekům (ku př. úseku $g_{1,2}$ nebo $g_{2,3}$), pak by se úsek $g_{0,m}$ rozpadl aspoň na tři kusy (neboť $g_{2,3}$ jest úsek souvislý a jeho hranice stýká se s hranicí podél tří různých částí, jedna jest na DA, druhá na BC a třetí dle předpokladu právě učiněného na AB). Strany druhu (0), (0, 1) by připadly aspoň dvěma různým z těch kusů, v něž $g_{0,m}$ se rozpadlo. Tedy by se i $g_{0,1}$ nutně v důsledku onoho odebrání bylo rozpadlo, což jest nemožno, neboť $g_{0,1}$ a $g_{2,3}$ nemají žádný čtverec sítě (a vůbec žádný bod) společný.

Stejně se dokáže: Na CD není stran druhu charakterisovaného indexy menšími než $m - 1$. Nazveme AB, CD *koncovými částmi* vnějšího polygonu úseku $g_{0,m}$; části pak BC, DA *hlavními částmi* toho polygonu.

Nyní můžeme přistoupiti k tomu, abychom vyšetřili za předpokladu daného nerovninou (π) úsek rovinný patřící celé uzavřené čáře C. Úsek tento vznikne, připojíme-li ku úseku $g_{0,n-1}$ úsek $g_{n-1,n}$. Ostrovy, které ve výsledném úseku vzniknou, budou čtvery:

1. Ostrovy, které jsou v $g_{0,n-1}$; z těchto některé připojením se mohou umenšiti o čtverce sítě příslušné k $g_{n-1,n}$ zasahující do těch otvorů.

2. Ostrovy, které jsou v $g_{n-1,n}$; tyto připojením rovněž mohou býti umenšeny o čtverce sítě příslušné k $g_{0,n-1}$.

3. Ostrovy, jež vzniknou stykem vnějšího polygonu k $g_{n-1,n}$ s jednou nebo druhou koncovou částí vnějšího polygonu příslušného k $g_{0,n-1}$.

Všecky tyto ostrovy pod 1., 2., 3. právě vyjmenované jsou z důvodů svrchu obšírně vylíčených v odst. 3. takové, že jich rozměr jest menší než 2δ a že neobsahují bodů ve svém nitru, jichž nejmenší vzdálenost od C by byla větší ($\geqq$) δ. Všecky tyto ostrovy jsou pro následující bezvýznamné a aby v následující úvaze nás nerušily, upravíme si připojované k sobě části rovinné (úseky rovinné) takto: Úsek $g_{0,n-1}$ zvětšíme o ostrovy, jež v něm jsou. Tím vznikne z něho část roviny omezená jedinou polygonální čárou uzavřenou se neprotínající, kterouž část označíme $G_{0,n-1}$. Úsek $g_{n-1,n}$ naproti tomu zvětšíme také o ostrovy, jež v něm jsou, avšak také o ostrovy, jež vzniknou dle 3.; i tu vznikne část roviny omezená jediným (vnějším) polygonem se neprotínajícím, kterouž označíme $G_{n-1,n}$. Vnější polygon úseku $g_{0,n-1}$ shoduje se úplně polygonem ohraničujícím $G_{0,n-1}$, vnější polygon úseku $g_{n-1,n}$ jest celý obsažen na části $G_{n-1,n}$, která může býti o jistý počet čtverců větší než $g_{n-1,n}$.

Vedle ostrovů pod 1., 2., 3. vznikne ještě:

4. Ostrov utvořený hranicí rovinné části $G_{0,n-1}$ a hranicí rovinné části $G_{n-1,n}$. Ostrov takový jest jenom jeden; neboť $G_{n-1,n}$ vytíná z ohraničení rovinné části $G_{0,n-1}$ pouze dva nesouvislé kusy, jichž

body lze spojiti čarou lomenou probíhající v $G_{n-1,n}$ a nemající — nehledě k počátečnímu a koncovému bodu — s $G_{0,n-1}$ body společné. Ostrov tento má za hranici jednu z hlavních částí vnějšího polygonu k $\mathbf{g}_{0,n-1}$ a obsahuje ta hranice strany čtverců sítě druhu (1), (2)..., $(n-2)$ a z důvodu symetrie ovšem také druhu (0), $(n-1)$. Rovněž vnější polygonu úseku rovinného příslušného k čáře C bude se skládati z jedné (druhé) hlavní části vnějšího polygonu k $\mathbf{g}_{0,n-1}$ a obsahuje strany čtverců sítě druhu (0), (1),... $(n-1)$.

Rozměr ostrova tu (pod 4.) popsaného jest dle (π) větší než $4\delta - 2\alpha$, t. j. větší než 3δ.

Tak získali jsme opětně větu odvozenou v odstavci 4. a tam ke konci vyslovenou týkající se úseku rovinného patřícího k spojité, uzavřené a se neprotínající čáře C. Důkaz věty Jordanovy by se pak jako důsledek její podal stejně jako svrchu v odst. 5. s tím jediné rozdílem, že vlastnost bodů položených na C — že každý z nich jest bodem hraničním — zde v podstatě jest dokázána již tím, že jsme dokázali během výkladu, že polygon Γ i polygon γ jsou polygony složené ze stran čtverců sítě všech druhů (0), (1), (2),..., $(n-1)$.

*

Une démonstration du théorème de Jordan sur les courbes continues.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne une démonstration du théorème de Jordan qui affirme qu'une courbe fermée C, continue et ne se coupant pas, divise tous les points du plan, n'appartenant pas à C, en deux domaines, celui des points extérieurs et celui des points intérieurs, dont la frontière commune est C. Pour démontrer ce théorème il emploie le réseau quadratique des parallèles aux axes X, Y et des polygones contenant un nombre fini de carrés de ce réseau. Il fait voir, en particulier, en détail que, si l'on choisit le côté du carré plus petit qu'un nombre positif δ, on peut former, en réunissant plusieurs de ces carrés, deux polygones Γ, γ tels que chaque point dont la distance de C est plus grande que δ (ou égale à δ) se trouve à l'extérieur de Γ ou à l'intérieur du γ; c'est de là que suit facilement la démonstration du théorème de Jordan.

Příspěvek k matematické teorii pensijního pojištění.

Napsal Dr. *Schoenbaum.*

Pensijní pojištění soukromých zaměstnanců upravené zákonem z 5./II. 1920, č. 89 sb. z. a n. poskytuje pojištěncům a jich pozůstalým nároky v případu invalidity, stáří a úmrtí pojištěncova. Výše