Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 6, 320--336

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109372

Soustava (I) znamená tehdy *hyperbolický paraboloid*, když $\Delta = 0$; jinak znamená *jednodílný hyperboloid*.

Věta o asymptotické ploše kuželové platí doslovně o *hyperboloidu*; vzhledem ku *paraboloidu* se poněkud modifikuje.

Úlohy.

Řešení úlohy 25.

Střed O daného kruhu budiž počátkem a OA osou X pravoúhlé soustavy souřadnic. Tečna kruhu v bodu D nechť protíná osu X v bodu B a tečnu bodu A v C. V trojúhelníku pravoúhlém ABC jest AM medianou, tedy

$$\sphericalangle \mathrm{ABM} = \mathrm{BAM} = \varphi,$$

a v trojúhelníku pravoúhlém BOD

$$\sphericalangle \mathrm{BOD} = 90 - \varphi.$$

Tečna BD a přímka AM mají rovnice

$$y \cos\varphi + x \sin\varphi = r,$$
$$y \cos\varphi - (x - r)\sin\varphi = 0.$$

Z rovnic těchto jest nám φ vyloučiti, výsledek eliminace jest rovnicí geom. místa bodu M. Řešením rovnic zmíněných obdržíme

$$\sin\varphi = \frac{r}{2x - r}, \quad \cos\varphi = \frac{r(x - r)}{y(2x - r)},$$

a dle vzorce $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$,

jest $r^2(x - r)^2 = 4xy^2(x - r)$.

Z rovnice této plyne dále

$$x - r = 0,$$
$$y^2 = \frac{r^2(x - r)}{4x}.$$

Rovnice předposlední náleží tečně AC, a rovnice poslední vyjadřuje, že geom. místem bodu M jest křivka stupně třetího, dotýkající se kružnice dané ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka a mající své asymptoty v přímkách $x = 0$, $y = \pm\frac{r}{2}$.

Sestrojení tečny. Rychlosť bodu M lze rozložiti: 1. v rychlosť pošinutí ve směru AM a rychlosť úhlovou (cirkulační) kolem bodu A; 2. v rychlosť pošinutí ve směru DM a rychlosť úhlovou kolem okamžitého středu otáčení D tečny BD (centre instantané de rotation). Ježto $\sphericalangle BAM = - ABM$, jest úhlová rychlosť průvodce AM kolem bodu A rovna úhlové rychlosti tečny BD kolem bodu dotyčného D, avšak smyslu protivného. Obě tyto rychlosti lze co do velikosti a polohy kolmé ku jejich skutečné poloze vyjádřiti úsečkami $MN = AM$ a DM. Dle pravidla o čtyrúhelníku rychlostí (quadrilatère des vitesses), je-li P průsečíkem kolmic vztýčených v bodu N ku AN a v bodu D ku BD, jest MP normálou křivky v bodu M.

Řešení úlohy této zaslal p. *Václav Felix* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.

Řešení úlohy 26.

Budiž střed O základny $AC = 2b$ počátkem a AC osou Y pravoúhlé soustavy souřadnic. Položíme-li $OB = a$, $OM = m$, $ON = n$, budou body M $(x_1\ y_1)$, N $(x_2\ y_2)$ míti souřadnice

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0;\quad y_1 = m,\ y_2 = n.$$

Přímky AB a MP mají rovnice

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\quad y = m, \tag{1}$$

a rovnice přímek BC, NQ jsou

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1,\quad y = n. \tag{2}$$

Rovnicemi (1) a (2) určeny jsou souřadnice bodů P $(x_3\ y_3)$ a Q $(x_4\ y_4)$, a to

$$x_3 = \frac{a}{b}(b - m),\quad y_3 = m;\quad x_4 = \frac{a}{b}(b + n),\quad y_4 = n.$$

Přímkám MQ a NP náležejí rovnice

$$y - m = \frac{b(n - m)}{a(b + n)}x,\quad y - n = \frac{b(m - n)}{a(b - m)}x.$$

Dle podmínky v úloze obsažené jest

$$m - n = b, \tag{3}$$

proto lze rovnice předešlé upraviti takto:

$$a(b + n)y + b^2x - am(b + n) = 0, \tag{4}$$

$$a(b - m)y - b^2x - an(b - m) = 0. \tag{5}$$

Sečteme-li rovnice tyto, obdržíme po odstranění společného činitele a

$$(2b + n - m)y = b(m + n).$$

Dle podmínky (3) plyne z rovnice této rovnice nová, kterou činitelem b můžeme krátiti, a tím obdržíme

$$y = m + n. \tag{6}$$

Řešíme-li rovnice (3) a (6) dle m a n, bude

$$m = \frac{y+b}{2}, \quad n = \frac{y-b}{2}.$$

Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice (4) nebo (5), obdržíme snadnou redukcí

$$ay^2 + 4b^2x - ab^2 = 0.$$

Píšeme-li v rovnici této $\left(x + \frac{a}{4}\right)$ místo x, t. j. zvolíme-li nový počátek O′ ve vzdálenosti $OO' = \frac{a}{4}$, bude míti rovnice křivky tvar jednodušší, totiž

$$y^2 = -\frac{4b^2x}{a}. \tag{7}$$

Z rovnice této patrno, že geom. místem bodu R jest parabola jdoucí vrcholy A a C trojúhelníka daného a mající svůj vrchol v bodu O′, při čemž $OO' = \frac{a}{4}$.

Poznámka. Zvolíme-li na místo trojúhelníka rovnoramenného trojúhelník jakýkoliv, a jsou-li příčky MP a NQ rovnoběžny s medianou BO trojúhelníka ABC, pak vzhledem k dalším podmínkám v úloze obsaženým lze AC a OB pokládati za osy X a Y kosoúhlé soustavy souřadnic. Řešení úlohy provede se právě tak, jako v úloze předešlé. Přímka OP bude průměrem paraboly, a rovnice její jest s obdrženou rovnicí (7) totožna.

V. J.

Řešení úlohy 27.

1. Zvolme O za počátek a OA za osu X pravoúhlé soustavy souřadnic. Budiž úhlem $XOM = \varphi$ určen polopaprsek OM z počátku O vycházející a poloměry r a R kružnic K a K′ buďtež jakékoliv. Poloměry r a R buďtež hodnot kladných, nebo záporné dle toho, zapadají-li do polopaprsku OM úhlem φ určeného, nebo do jeho prodloužení přes počátek O. V každém případu bude míti tečna MP rovnici

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = r,$$

a rovnici přímky AN jdoucí body $A(r, O)$, $N(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ můžeme psáti ve tvaru

$$Ry \cos\varphi + R(r - x)\sin\varphi = ry.$$

Řešením těchto rovnic obdržíme

$$\cos\varphi = \frac{r(y^2 + Rx - Rr)}{R(x^2 + y^2 - rx)}, \quad \sin\varphi = \frac{ry(R - x)}{R(x^2 + y^2 - rx)}.$$

Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

vyloučíme tím φ z hořejších rovnic, a rovnice

$$r^2[y^2 + R(x - r)]^2 + r^2y^2(R - x)^2 = R^2(x^2 + y^2 - rx)^2$$

takto obdržená značí, že (P) jest křivkou stupně čtvrtého, mající v bodu A svůj bod uvratový.

Dělíme-li rovnici poslední na R^2, bude

$$r^2\left[\frac{y^2}{R} + (x - r)\right]^2 + r^2y^2\left(1 - \frac{x}{R}\right)^2 = (x^2 + y^2 - rx)^2;$$

pro $\lim R = \infty$ jest

$$r^2[(x - r)^2 + y^2] = (x^2 + y^2 - rx)^2.$$

Z rovnice této jest patrno, že geom. místem bodu P pro $\lim R = \infty$ jest kardioida, což ostatně i z toho vysvítá, že v tomto případě stojí AP kolmo na MP, a že tedy křivka (P) jest průmětnicí kružnice K.

Pro $R = -r$ splynou kruhy K a K′ v kruh jediný K, body M a N jsou diametrálně protilehlými body kružnice K a rovnici křivky (P) lze po několika redukcích rozložiti ve dva činitele

$$(x + r)[y^2(3r - x) - (x - r)^3] = 0.$$

Křivka uvažovaná skládá se tedy z přímky

$$x + r = 0$$

a cissoidy Dioklovy

$$y^2 = \frac{(x - r)^3}{3r - x}.$$

2. Budiž B polem, BO osou soustavy polární, a poloměry r a R kružnic K a K′ buďtež jakékoliv. Polárný úhel φ a středový úhel 2φ určují polopaprsky BN a ON, které z bodů B a O vycházejí a v bodu N kružnice K′ se protínají. Průvodce zapadající do těchto polopaprsků zaveďme jakožto hodnotu kladnou do počtu, pak budou míti průvodce, které zapadají do jejich prodloužení přes body B a O hodnotu zápornou. I bude všeobecně

$$BN = 2R\cos\varphi,$$

a v trojúhelníku MNQ

$$QN = \frac{R - r}{\cos\varphi},$$

neboť $\sphericalangle QNM = \sphericalangle OBN = \varphi$.

Poněvadž $BQ = \varrho = BN - QN$ co do velikosti i směru, bude rovnice polární geom. místa (Q)

$$(1) \qquad \varrho = 2R\cos\varphi - \frac{R - r}{\cos\varphi}.$$

Křivka (Q) má svůj vrchol v bodu A, jehož polární souřadnice jsou $\varphi = 0$ a $\varrho = R - r$, mimo to má (Q) v bodu B bod dvojný buďto s realnými, nebo imaginárnými tečnami dle toho, je-li absolutně vzato $R \gtreqless r$.

Přejdeme-li k souřadnicím pravoúhlým užitím všeobecně platných vzorců $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, obdržíme

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)(x + R - r) - 2Rx^2 = 0.$$

Z rovnice této jest patrno, že geom. místem bodu Q jest cirkulárná křivka stupně třetího.

Pro $r = +\frac{R}{2}$ plyne z (2) rovnice

$$(x^2 + y^2)(2x + R) - 4Rx^2 = 0,$$

i jest tedy v tomto případě Q trisektorií Maclaurinovou.

Položíme-li do rovnice (2) $r = 0$, bude rovnice

$$(x^2 + y^2)(x + R) - 2Rx^2 = 0$$

náležeti strophoidě, a položíme-li v rovnici (2) $r = -R$ obdržíme rovnici

$$x^3 + y^2(x + 2R) = 0,$$

která značí cissoidu Dioklovu.

Poznámka. Vedeme-li tečnu kružnice K v bodu C, který diametrálně leží naproti vrcholu A křivky (Q), protne tečna tato průvodce BQ v bodu D, a ze shodných trojúhelníků BCD, NMQ obdržíme $BD = QN$ i co do smyslu, pročež jest (Q) křivkou cissoidálnou, jejíž realná asymptota jest souměrně položena s přímkou CD vzhledem ku středu souměrnosti B. *V. J.*

Sestrojení tečny křivky (Q) plyne z pojednání prof. V. Jeřábka: „Konstrukce tečen křivek cissoidalních." Čas. math. roč. XV.

Řešení úlohy 29.

(Podal p. *Břetislav Tolman*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Poněvadž jest

$$N_2 = a + 10b = 21a + 10(b - 2a) = 21a + 10c',$$

jest dvouciferné číslo N_2 dělitelno 7mi, je-li 7mi dělitelen rozdíl $b - 2a = c'$.

Při čísle trojciferném jest

$$N_3 = a + b \,.\, 10 + c \,.\, 10^2 = 21a + 10(c' + 10c),$$

pročež dělitelnost jeho 7mi závisí na dělitelnosti čísla dvouciferného $c' + 10c$ a tato opět na dělitelnosti rozdílu $c - 2c' = d'$; jestiť $N_3 = 21a + 10(21c' + 10d')$.

Podobně při čísle čtyřciferném jest

$$N_4 = a + b \,.\, 10 + c \,.\, 10^2 + d \,.\, 10^3$$
$$= 21a + 210c' + 100(d' + 10d);$$

toto číslo bude dělitelno 7mi, kdykoli takým jest číslo $d' + 10d$, t. j. bude-li 7mi dělitelen rozdíl $2d - d' = e'$.

Jest již patrno, že tímto způsobem lze důkaz konati i dále při číslech vícemístných.

Příklad: $N = 376194$.

$9 - 2.4 = 1$, $1 - 2.1 = -1$, $6 - 2(-1) = 8$, $7 - 2.8 = -9$, $3 - 2(-9) = 21$; pročež N jest 7mi dělitelno.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Lad. St. Rybka* ze VII. tř. r. v Brně, *Bohumil Novák* z VIII. tř. g. v Táboře a *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Řešení úlohy 30.

(Podal p. *Frant. Kasík*, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě.)

Z pozůstalosti připadá na prvého nyní x, na druhého y, na třetího z, tak že

$$x + y + z = 6000;$$

dle podmínky obsažené v závěti má býti

$$xq^4 = yq^6 = zq^8 = t,$$

při čemž $q = 1{\cdot}05$.

Vyloučením neznámých y, z obdržíme rovnici

$$x(1 + q^{-2} + q^{-4}) = 6000;$$

dle tabulek úročitelů sestupných najdeme

$$q^{-2} = 0{\cdot}907029, \quad q^{-4} = 0{\cdot}822702$$

a tedy

$$x = 2198{\cdot}02 \text{ zl.}, \quad y = 1993{\cdot}67 \text{ zl.}, \quad z = 1808{\cdot}31 \text{ zl.}$$

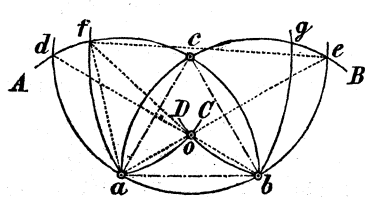
Každý z těchto podílů vyroste do 24. roku svého majitele na hodnotu $t = 2671{\cdot}71$ zl.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Břetislav Tolman*, *Václav Chmelař*, *Rudolf Stárek* a *František Veit* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Josef Smrt* z VIII. tř. gymn. v Písku, *Jar. Sobotka* z VIII. tř., *Václav Felix* a *Jar. Chládek* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Ant. Doležal* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Boh. Novák* z VIII. tř. g. v Táboře, *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Frant. Lukeš* a *Vincenc Vodička* ze VI. tř. české v. real. šk. v Praze, *Jos. Bartoš* ze VII. tř. g. v Č. Budějovicích, *Václav Studnička* z VIII. tř. g. ve Slaném a *Jar. Chloupek* ze VII. tř. g. v Kolíně.

Řešení úlohy 31.

(Podal p. *Václav Chmelař*, stud. VI. tř. r. v Hradci Král.)

a) Sestrojení. Buďtež a, b dva z vrcholů rovnostranného trojúhelníka; opišme z nich poloměrem ab oblouky A, B, jichž průsečík c jest třetím vrcholem. Od tohoto přeneseme tětivy $cd = ce = ab$ a opišme z bodů d, e poloměrem $ae = bd$ oblouky stanovící body f, g na obloucích A, B. Sestrojíme-li ještě z bodu f oblouk C poloměrem af a z bodu g oblouk D poloměrem bg, jest průsečík oblouků těchto středem trojúhelníka abc.



b) Důkaz. Je-li $ab = bc = ca = 1$,

jest poloměr kružnice opsané o trojúhelník abc roven $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Dle sestrojení jest ae stranou pravidelného trojúhelníka vepsaného do kružnice poloměru 1, pročež

$$ae = bd = \sqrt{3}.$$

Průsečík o přímek ae, bd jest patrně středem trojúhelníka abc, a proto jest

$$ao = bo = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,.$$

Ježto však $$ao : af = af : ac,$$
jest $\triangle aof \sim \triangle aef$, pročež $af = of = 1$. Bod o leží tedy na oblouku C a dle obdoby též na oblouku D, i může býti sestrojen bez užití přímek ae, bd.

Poznámka. Úloha tuto řešená náleží v řadu úloh, jichž sestrojení užitím pouhého kružítka (bez pravítka) lze vykonati. Úlohami takovými zabýval se *Mascheroni* ve spise „La geometria del compasso" (Pavia, 1797), který též do frančiny a do němčiny byl přeložen. Volné zpracování jeho podal *Hutt* (Die Mascheronischen Konstruktionen. Halle 1880).

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Aug.* hrabě *Wodzicki* v Kościelnikách, *Ant. Kříž* a *Frant. Novotný* z V. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Frant. Kosík* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Jar. Chládek* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Břetislav Tolman* a *Frant. Veit* ze VI. tř. r. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 32.

(Zaslal p. *Ant. Doležal*, stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Danou převratnou rovnici stupně 4ho řešíme známou substitucí $x + \frac{1}{x} = y$; obdržíme tak rovnici kvadratickou

$$4y^2 - 10y\sqrt{6} + 33 = 0\,,$$

ze které vypočítáme

$$y_{1,2} = \frac{5\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}}{4}\,.$$

Z rovnice $$x^2 - xy_1 + 1 = 0$$
najdeme, použivše k úpravě kořenů vzorce

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}\,,$$

dva kořeny

$$x_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad x_2 = \sqrt{6} + \sqrt{2}\,;$$

podobně z rovnice

$$x^2 - xy_2 + 1 = 0$$

nalezneme

$$x_3 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad x_4 = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

Nejmenší ze čtyř kořenů x jest patrně x_1 a sice jest

$$x_1 = 0{\cdot}25882 = \sin 15^0;$$

poněvadž pak jest

$$x_1^2 + x_3^2 = 1, \quad x_1 x_2 = 1, \quad x_3 x_4 = 1,$$

jest $x_2 = \operatorname{cosec} 15^0, \quad x_3 = \cos 15^0, \quad x_4 = \sec 15^0.$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Jos. Bartoš* ze VII. tř. g. v Č. Budějovicích, *Břetislav Tolman*, *Rudolf Stárek*, *Frant. Veit* a *Václav Chmelař* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Václav Felix* a *Jan Chládek* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze a *Frant. Kosík* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě.

Řešení úlohy 33.

(Zaslal p. *Lad. St. Rybka*, stud. VII. tř. r. v Brně.)

Dle sestrojení jest

$$\overline{ak} = r(\sqrt{3}-1)$$

a proto, klademe-li $\sphericalangle abf = \alpha$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \operatorname{tg} 20^0 6' 16''.$$

Potom jest $\overline{af} = 2r \sin \alpha = 0{\cdot}68747\, r$.

Strana pravidelného 9tiúhelníka vepsaného v kružnici poloměru r jest však

$$2r \sin 20^0 = 0{\cdot}68413\, r;$$

jest tedy vskutku $\overline{af}$ rovno přibližně straně vepsaného pravidelného 9tiúhelníka a sice s chybou $0{\cdot}003\, r$.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Bohumil Novák* z VIII. tř. g. v Táboře, *Břetislav Tolman*, *Rudolf Stárek*, *Václav Chmelař* a *Frant. Veit* ze VI. tř. r. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 34.

(Zaslal p. *Josef Smrt*, stud. VIII. tř. g. v Písku.)

Krajními body dané tětivy t omezen jest oblouk s kružnice hlavní A a oblouk s' kružnice menší B, jejíž poloměr jest ϱ. K oběma těmto obloukům nechť přísluší středové úhly duté a to k oblouku s úhel α, k oblouku s' úhel β. Jest pak

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{t}{2r}, \quad \sin\frac{\beta}{2}=\frac{t}{2\varrho}$$

a při daných hodnotách číselných najdeme z tabulek

$$\alpha = 45^0\,14'\,23'', \quad \beta = 87^0\,12'\,20'';$$

potom bude

$$s = \frac{\pi r \alpha}{180} = 41{\cdot}06\,cm$$

$$s' = \frac{\pi \varrho \beta}{180} = 44{\cdot}14\,cm$$

a tudíž

$$s' - s = 3{\cdot}08\,cm.$$

Spojíme-li střed m tětivy t se středem koule o i se středem o' kružnice B a klademe-li

$$\overline{mo} = a, \quad \overline{mo'} = b, \quad \overline{oo'} = c, \quad \sphericalangle omo' = \gamma,$$

najdeme $a = r\cos\frac{\alpha}{2} = 48\,cm$, $b = \varrho\cos\frac{\beta}{2} = 21\,cm$,

$$c = \sqrt{r^2 - \varrho^2} = 9\sqrt{23}.$$

Úhel sevřený rovinami obou kružnic určen jest rovnicí

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7}{16} = \cos 64^0\,3'\,19''.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Jar. Chloupek* ze VII. tř. g. v Kolíně, *Břetislav Tolman*, *Václav Chmelař* a *Rudolf Stárek* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Vincenc Tachecí* a *Vincenc Vodička* ze VI. tř. české v. real. šk. v Praze, *Boh. Novák* z VIII. tř. g. v Táboře, *Václav Felix* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze a *Jos. Bartoš* ze VII. tř. g. v Č. Buďějovicích.

Řešení úlohy 35.

(Zaslal p. *Jind. Balcar,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

a) Spůsobem paterým. Vepíšeme-li do koule pravidelný mnohostěn a promítneme-li jeho hrany ze středu na povrch koule, bndou průměty děliti povrch na sférické úhelníky pravidelné a shodné.

Vepsaným pravid. 4-, 6-, 8-, 12- a 20-stěnem rozdělíme takto plochu kulovou

1. na 4 pravid. shodné sfér. trojúhelníky,
2. na 6 „ „ „ čtverců,
3. na 8 „ „ „ trojúhelníků,
4. na 12 „ „ „ pětiúhelníků,
5. na 20 „ „ „ trojúhelníků.

b) Spojíme-li středy těchto úhelníků s vrcholy pomocí oblouků hlavních kružnic, bude plocha kulová rozdělena v případě

$$\left.\begin{array}{l}1.\ \text{na}\ \ 4.3 = 12\\ 2.\ \text{na}\ \ 6.4 = 24\\ 3.\ \text{na}\ \ 8.3 = 24\\ 4.\ \text{na}\ 12.5 = 60\\ 5.\ \text{na}\ 20.3 = 60\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{rovnoramenných}\\ \text{sférických trojúhelníků}\\ \text{shodných.}\end{array}$$

Řešení úlohy 36.

(Zaslal p. *Vincenc Vodička,* stud. VI. tř. české v. r. v Praze.)

Vyšetřme nejprvé, kolik úhlopříčen vychází z jednoho vrcholu, na př. A. Všech vrcholů na mnohostěnu buď v. Vylučme z nich vrcholy obsažené v $(y+2)$ stěnách, jež mají společný vrchol A. Především A; potom konce $(y+2)$ hran, jež vycházejí z vrcholu A, celkem již $(y+3)$ vrcholy; mimo tyto každá z řečených stěn obsahuje ještě $[(x+2)-3] = x-1$ vrcholů, všecky tedy $(x-1)(y+2)$. Celkem vyloučili jsme vrcholů

$$(y+3)+(x-1)(y+2) = xy+2x+1.$$

Z každého vrcholu vychází tedy úhlopříčen

$$v-(xy+2x+1).$$

Ze všech v vrcholů v-krát tolik; že však tu každá úhlopříčna čítána dvakrát, dvojím směrem, jest množství úhlopříčen:

$$u = \frac{v}{2}\cdot[v-(xy+2x+1)].$$

Dosadíme-li konečně

$$v = \frac{4(x+2)}{4-xy}$$

(viz II. díl 1. vydání Jarolímkovy Deskr. geometrie, str. 166.), obdržíme po redukci

$$u = \frac{2(x+2)}{(4-xy)^2}\cdot(x^2y^2+2x^2y-3xy-4x+4).$$

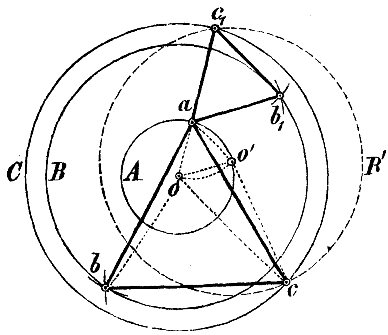
Dle toho ve 4-stěnu $(x = y = 1)$ úhlopříčen není $(u = 0)$, v 6-stěnu $(x = 2,\ y = 1)$ jest $u = 4$, v 8-stěnu $(x = 1,\ y = 2)$ jsou **3**, ve dvanáctistěnu $(x = 3,\ y = 1)$ *sto*, a ve dvacetistěnu $(x = 1,\ y = 3)$ 36 úhlopříčen.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Ant. Doležal* z VIII. tř. v Chrudimi, *Lad. St. Rybka* ze VII. tř. r. v Brně, *Boh. Novák* z VIII. tř. g. v Táboře a *Václav Felix* ze VII. tř. g. v Praze.

Řešení cenné úlohy z mathematiky.*)

a) **Prvý způsob.**

Rozbor. Mějme rovnostranný trojúhelník abc, jehož vrcholy a, b, c leží na soustředných kružnicích A, B, C. Kdybychom bod b otočili kolem a o úhel 60°, sjednotil by se s bodem c. Vrchol tento leží tudíž na kružnici B', která vznikne otočením kružnice B kolem bodu a o úhel 60°.



Sestrojení. Z daného bodu o opišme kružnice A, B, C, jichž poloměry jsou dané vzdálenosti a, b, c. Na kružnici A zvolme bod a, přenesme pak tětivu $ao' = ao$. Z bodu o' sestrojme shodnou s B kružnici B', která stanoví v C dva body c, c_1; tyto jsou vrcholy dvou hledaných rovnostranných trojúhelníků abc, $a\, b_1\, c_1$.

Důkaz plyne přímo z rozboru.

Omezení. Dle vzájemné polohy kružnice B' a C má úloha buď dvé řešení, nebo jedno aneb žádné. Je-li $b + c > a > c - b$, protínají se kružnice B' a C ve dvou bodech c a c_1; je-li $b + c = a$, dotýkají se v bodě jediném c (bod o leží pak na kružnici opsané trojúhelníku abc); je-li posléz $b + c < a$, nemají ony kružnice bodu společného.

Poznámka. K témuž sestrojení dospěl pan Dr. W. L. na základě následující věty, jejíž důkaz redakci tohoto Časopisu zaslal:

Opíšeme-li ze dvou vrcholů rovnostranného trojúhelníka dvé shodných kružnic, spojíme-li pak třetí vrchol s kterýmkoli

*) Viz str. 212.

bodem kružnice jedné a sestrojíme-li nad touto spojnicí trojúhelník rovnostranný, leží třetí vrchol jeho na kružnici druhé.

b) **Druhý způsob.**

Otočíme-li trojúhelník abc kolem bodu a o úhel 60^0, sjednotí se s trojúhelníkem aco'; jest tedy $ob = o'c$ a strany trojúhelníka $oo'c$ jsou

$$\overline{ao'} = a, \ \overline{co'} = b, \ \overline{co'} = c.$$

Vlastnosť tato odůvodňuje následující konstrukci:

Z daných délek a, b, c sestrojme trojúhelník $oo'c$ a nad jednou jeho stranou oo' vyrýsujme rovnostranný trojúhelník $oo'a$; potom jest $\overline{ca}$ stranou hledaného trojúhelníka rovnostranného. Jelikož nad oo' dva rovnostranné trojúhelníky sestrojiti lze (vně neb vnitř trojúhelníka $oo'c$), má úloha obecně dvě řešení.

c) **Výpočet.**

Délku strany žádaného trojúhelníka označme x, a mimo to znamenejme $\sphericalangle\, oab = \alpha$. Jest pak

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + a^2 - b^2}{2ax}, \ \cos(60^0 - \alpha) = \frac{x^2 + a^2 - c^2}{2ax}.$$

Abychom z rovnic těchto vyloučili α, užijme vzorce

$$\cos(60^0 - \alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha;$$

odtud vypočítáme

$$\sin\alpha = \frac{x^2 + a^2 + b^2 - 2c^2}{2ax\sqrt{3}}$$

a obdržíme rovnici

$$\frac{(x^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2x^2} + \frac{(x^2 + a^2 + b^2 - 2c^2)^2}{12a^2x^2} = 1.$$

Tuto upravivše na tvar

$$x^4 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = 0$$

najdeme řešením

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \pm 2\triangle\sqrt{3}, \tag{1}$$

kdež

$$\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}$$

značí ploský obsah trojúhelníka, sestrojeného ze stran a, b, c. Mají-li tyto délky dané hodnoty

$$a = 3,\ b = 7,\ c = 8,$$

bude
$$x^4 - 112\, x^2 + 2425 = 0$$

a tedy
$$x_1 = 5,\ x_2 = \sqrt{97} = 9{\cdot}84886\ldots$$

Sestrojení při hodnotách těchto vykonáno jest v obrazci, který zároveň může kontrolovati výpočet.

Poznámka. Násobíme-li rovnici (1) zlomkem $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a označíme-li $\triangle_k$ ploský obsah rovnostranného trojúhelníka o straně k, dojdeme výsledku

$$2\triangle_x = \triangle_a + \triangle_b + \triangle_c \pm 3\triangle,$$

který též přímo geometricky stvrditi lze.

d) **Dodatek.**

Je-li y vzdálenosť bodu o od středu trojúhelníka abc, jest, jak snadný výpočet stvrzuje,

$$(2) \qquad y^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) \mp \frac{2}{3}\triangle\sqrt{3}.$$

Z rovnic (1) a (2) plyne pak

$$x^2 + 3y^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$x^2 - 3y^2 = 4\triangle\sqrt{3};$$

při stálém x a y jest proto stálým též $a^2 + b^2 + c^2$ i $\triangle$. Tím přicházíme k následujícímu zajímavému výsledku:

*Máme-li rovnostranný trojúhelník a soustřednou s ním kružnici, a má-li kterýkoli bod její od vrcholů trojúhelníka vzdálenosti a, b, c, lze z délek těchto vždy sestrojiti realný trojúhelník; všechny takto stanovené trojúhelníky mají pak týž ploský obsah $\triangle$ i stejný úhel Brocardův ϑ.**) Jestiť $\cot g\, \vartheta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\triangle}$.

e) **Přisouzení cen.**

Po návrhu autora této úlohy, prof. A. Strnada, uznal výbor Jednoty českých mathematiků, aby za správné a úplné její řešení obdrželi cenu tito studující:

Jindřich Balcar ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
František Císař ze VII. tř. r. městské střední školy v Praze.
Václav Chmelař ze VI. tř. r. v Hradci Králové.
Bohuslav Khom ze VII. tř. r. v Pardubicích.
Antonín Legner z VIII. tř. g. v Příbrami.

---

*) O významu téhož úhlu viz tohoto Časopisu ročník XV. str. 27.

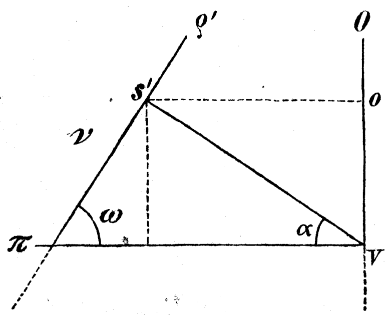
Bohumil Novák z VIII. tř. g. v Táboře.
František Šoreys ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi.
August hr. Wodzicki, priv. stud. VIII. tř. g. v Kościelnikách.
Ostatní řešitelé zaslali práce buď pochybené buď neúplné.

Řešení cenné úlohy z deskriptivní geometrie (28).*)

Rozbor. Kužel stanoven jest vrcholem a podstavou. Rovina tečná dotýká se kužele v povrchové přímce, procházející vrcholem v.

Má-li daný kužel dotýkati se 1. průmětny (π), musí jedna povrchová přímka jeho ležeti v π, pak-li i 2. průmětny (ν), musí jiná povrchová přímka ležeti v ν, jich průsek v tudíž na ose X.

Středem s kruhové podstavy přímého kužele jest pata kolmice spuštěné s vrcholu jeho v na rovinu ϱ podstavy jeho a ježto dán poloměr její, zbývá toliko ustanoviti bod s (načež $\varrho_s \perp \overline{sv}$) aneb rovinu ϱ (pak $\overline{vs} \perp \varrho$).



Řešení 1. Odchylka osy $\overline{vs}$ daného kužele od π i ν rovná se $\sphericalangle \alpha$; jest tedy sestrojiti úlohu: „*Zobraziti přímku, která daným bodem* (v) *procházejíc, má od průměten odchylky α' β*“ ($\sphericalangle \alpha = \beta$). [Viz Č. Jarolímek, Desk. geom. str. 41. obr. 39. (17., 7.), 1. vyd., str. 21., obr. 38. (v, 4) 2. vyd.].

Jiný způsob sestrojení této úlohy bez *postranní konstrukce* jest následující: Zobrazme měřické místo úsečky $\overline{vs}$, jejíž odchylka od π rovná se $\sphericalangle \alpha$ t. j. zobrazme rotační plochu kuželovou K', jejíž vrchol v jest, osa její $O_v \perp \pi$, délka p. přímek

---

*) Viz str. 209.

$= vs$ a odchylka jich od π rovnej se $\sphericalangle \alpha$, a $K'' \cong K'$, jejíž vrchol týž bod v, osa $Q_v \perp \nu$. Tyto dvě shodné plochy kuželové, mající společný vrchol v, protínají se v povrchových přímkách, jichž koncové body (s) leží v průsecích jich podstav (8 průseků).

Řešení 2. Zobrazíme-li daný kužel v rovině $\varrho' \perp \nu$, aby se π dotýkal (jen v 2. obraze), $\varrho'' \perp \pi$, aby se ν dotýkal, (jen v 1. obraze, ač i ten lze vynechati), a otočíme-li jej kolem $O_v \perp \pi$ a $Q_v \perp \nu$, až se jich středy podstav s sjednotí, obdržíme hledané polohy kužele. [Viz Č. Jarolímek, Deskr. geom. „*Točení bodu kol přímé osy*“ str. 119. obr. 171. (XIV., 36., 6) 1. vyd., str. 72., obr. 154. (XIX., 4.), 2. vyd.].

Řešení 3. Odchylka roviny podstavy daného kužele od π a ν rovná se $\sphericalangle \omega$; jest tedy „*Sestrojiti rovinu ϱ, jíž náležejí dané odchylky od průměten*“ ve vzdálenosti $\overline{vs}$ od bodu v. [Viz Č. Jarolímek, Desk. geom. str. 136. (40., 5.), obr. 194., vyd. 1.].

Řešení 4. Stopy roviny ϱ (P^ϱ, N^ϱ), činí s osou průmětnou X trojhran, jehož 3 stranové úhly jsou dány ($\sphericalangle \omega$, ω, 90^0); jest tedy „*sestrojiti trojhran z daných tří úhlů stranových*“. [Viz Č. Jarolímek, Deskr. geom. str. 163. (44., 10.), obr. 215. 1. vyd.]. Položme třetí hlavní průmětnu $\mu_v \perp X$, kde obdržíme 3. stopu roviny ϱ (M^ϱ_3) a pomocí této stopy P^ϱ_1, N^ϱ_2.

Řešení 5. Rovina σ (τ) položena osou $\overline{vs}$ přímého kužele a průsečnicí X dvou rovin tečných (π, ν), rozpoluje jich úhel; nachází se tudíž střed s v rovině souměrnosti (totožnosti.). [s_3 v σ_3 (τ_3), $z_s = y_s = \overline{vs}.$ sin α, $\overline{s_1 v_1} = \overline{s_2 v_2} = \overline{vs.}$ cos α]. Táž rovina σ (τ) seče rovinu ϱ v přímce $S_s \perp \overline{sv}$, procházející průsekem P^ϱ a N^ϱ na ose prům. X, čehož užiti lze k jich stanovení místo obvyklého užívání hlavních přímek, třeba jen sklopiti S_s kol X do některé z obou průměten.

Řešení 6. Měřické místo (m. m.) středu s přímého kužele, jehož vrchol v jest dán a výška jeho $\overline{vs}$, jest plocha kulová o středu v a poloměru $= \overline{vs}$; druhé m. m. středu s, jehož $\pm z_s = \pm y_s = \overline{vs}.$ sin α, jest $A \parallel X$ v téže vzdálenosti od π a ν. Průseky těchto dvou m. m. stanoví hledané polohy bodu s. Jest tedy „*sestrojiti průseky přímky A s plochou kulovou*“. [Viz Č.

Jarolímek, Deskr. geom. str. 283. (XXVIII., 74., 6.) 1. vyd., str. 172. XXXVI., 7. vyd. 2.].

Připomenutí.

Sestrojení těchto průseků rovinami různými, položenými přímkou A, nemůže však považovati se za *různé řešení.*

Řešení 7. Zobrazme plochu kulovou jako v 6. řeš. a položme k ní rovinu tečnou φ (ψ), jejíž odchylka od π (ν) rovná se $\measuredangle \omega$ a ustanovme průseky měřických míst jejich tečných bodů. [Viz Č. Jarolímek, Deskr. geom. str. 284., 1. vydání, str. 172., 2. vyd.].

Poznámka. Sestrojí-li se všecka tato řešení v jediném obrazci, shodují se některé konstrukce, jiné jsou zkouškou přesného rýsování předcházejících.

Pan Fl. Pohl, professor městské střední školy v Praze, který úlohu tuto navrhl, uznal vypsané ceny hodnými ze zaslaných prací 6.

Řešiteli jsou následující studující realn. škol:

Balcar Jindřich, abitur. české realky Králové-Hradecké,

Bradáč Josef, abitur. měšť. střední školy v Praze,

Khom Bohuslav, abitur. české realky Pardubické,

Lukeš František, stud. 6. tř. české realky Pražské,

Šulc Viktorin, priv. stud. v Praze a

Vodička Vincenc, stud. 6. tř. české realky Pražské.

Poznámka. V „Instructionen für den Unterricht an den Realschulen in Oesterreich, Wien 1881, 2. Auflage, str. 265., 13. Wiederholung“ praví se: „Den Schluss des dreijährigen Lehrganges bildet eine eingehende Wiederholung der *wichtigsten Partien* aus dem Gesammtgebiete des Gegenstandes. Diese Wiederholung kann am besten mittels combinirter *Aufgaben* geschehen . . . Solche combinirte Aufgaben *brauchen nicht eben immer compliciert* zu sein, wenn sie nur in *verschiedene Partien zugleich eingreifen.* Eine Auswahl von wenigen aber *instructiven* Aufgaben dürfte in der Regel genügen, um das *ganze Gebiet* des Gegenstandes gelegentlich zu durchwandern.“

Zda-li tato úloha požadavkům v „Instruct.“ vyhovuje, páni kollegové snadno rozhodnou.