Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Rössler

Příspěvek k teorii determinantů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 6, 229--230

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109421

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1932

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Příspěvek k teorii determinantů.

Karel Rössler.

(Došlo 28. ledna 1932.)

V tomto článku zobecňuji jednu známou větu z teorie determinantů.

Budiž dána n-řadová matice (a_{ik}). Utvořme matici $(A_{(i)(k)})$, kde $A_{(i)(k)}$ je q-řadový determinant z (a_{ik}), jehož indexy řádkové tvoří kombinaci $(i) \equiv (i_1, \ldots, i_q)$ čísel $1, \ldots, n$ a indexy sloupcové kombinaci $(k) \equiv (k_1, \ldots, k_q)$. Pak platí známá věta:[1]) Má-li matice (a_{ik}) hodnost q, má matice $(A_{(i)(k)})$ hodnost 1. Dokážeme větu obecnější:

Má-li matice (a_{ik}) hodnost p, má matice $(A_{(i)(k)})$ hodnost $\binom{p}{q}$.

Důkaz: V následujícím budeme předpokládati, že $p < n$, neboť případ $p = n$ jest důsledkem věty Sylvester-Frankeovy. V matici (a_{ik}) zaměňme řady tak, aby $\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1p} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{p1} \ldots a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$. Tím se v matici $(A_{(i)(k)})$ některé řady nejvýše znásobily (-1) a vyměnily. Její hodnost zůstala ovšem beze změny. V matici (a_{ik}) je po této úpravě prvních p řádků lineárně nezávislých a všechny ostatní řádky jsou jejich lineárními kombinacemi. Platí tedy pro každé a_{ik}:

$$a_{ik} = \sum_{r=1}^{p} c_{ir}\, a_{rk}. \tag{1}$$

Vyloučíme-li triviální případ $q > p$, máme:

$$A_{(i)(k)} = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} \ldots a_{i_1k_q} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i_qk_1} \ldots a_{i_qk_q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\Sigma c_{i_1r}\, a_{rk_1}) \ldots (\Sigma c_{i_1r}\, a_{rk_q}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (\Sigma c_{i_qr}\, a_{rk_1}) \ldots (\Sigma c_{i_qr}\, a_{rk_q}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{i_11} \ldots c_{i_1p} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{i_q1} \ldots c_{i_qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k_1} \ldots a_{pk_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1k_q} \ldots a_{pk_q} \end{pmatrix} = \sum_{[r]} \begin{vmatrix} c_{i_1r_1} \ldots c_{i_1r_q} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{i_qr_1} \ldots c_{i_qr_q} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{r_1k_1} \ldots a_{r_qk_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r_1k_q} \ldots a_{r_qk_q} \end{vmatrix},$$

[1]) Viz B. Bydžovský: Základy teorie determinantů, odst. 52.

kde $[r] \equiv [r_1, \ldots, r_q]$ značí kombinaci čísel $1, \ldots, p$. Označíme-li $C_{(i)[r]} = \begin{vmatrix} c_{i_1 r_1} \ldots c_{i_1 r_q} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{i_q r_1} \ldots c_{i_q r_q} \end{vmatrix}$, platí pro každé $A_{(i)(k)}$:

$$A_{(i)(k)} = \sum_{[r]} C_{(i)[r]} A_{[r](k)}. \tag{2}$$

Srovnáme-li rovnice (1) a (2), máme výsledek: Řádky matice $(A_{(i)(k)})$ jsou lineární kombinace těch $\binom{p}{q}$ řádků, jež obsahují determinanty z prvních p řádků matice (a_{ik}). Z věty Sylvester-Frankeovy plyne: Subdeterminanty $A_{(i)(k)}$, vybrané z determinantu $\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1p} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{p1} \ldots a_{pp} \end{vmatrix}$, tvoří nenulový, $\binom{p}{q}$-řadový determinant v matici $(A_{(i)(k)})$. Hodnost matice $(A_{(i)(k)})$ je tedy rovna $\binom{p}{q}$.

*

Contribution à la théorie des determinants.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur généralise un théorème connu de la théorie des determinants.