Mathematická logika a theorie množin

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 3, 132--155

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109427`

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 74 (1949)

V.

Přednášky v sekcích.

I. sekce:

Matematická logika a theorie množin.

CERTAIN NOTIONS OF THE THEORY OF NUMBERS AS APPLIED TO THE PROPOSITIONAL CALCULUS.

HENRYK GRENIEWSKI, Warszawa.

1.

In the propositional calculus functions containing more than two variables have been as yet very little studied.[1]) It seems advisable to elaborate general methods of studying functions containing n variables and belonging to the propositional calculus. It appears that in such studies rather unexpected assistance may be obtained from certain notions of the theory of numbers, in particular from several functions built by means of the „Entier", and among these from the notion of binary development of the natural number. The present communication refers exclusively to the two-valued propositional calculus.

The symbolism used in this paper is as follows: propositional variables are letters $pp_1p_2 \ldots qq_1q_2 \ldots rr_1r_2 \ldots ss_1s_2 \ldots$, falsum $\wedge$, verum $\vee$, negation $'$, sum $\oplus$, product $\odot$, implication $\rightarrow$, equivalence $\longleftrightarrow$, quanti-

[1]) To the exceptions known to the author belongs the paper by S. JAŚKOWSKI, *Trois contributions au calcul des propositions bivalent*, Toruń 1948. Functions containing n variables and belonging to the propositional calculus were the subject-matter of the author's communication *Functors of the Propositional Calculus*, VI Congress of Polish Mathematicians, Warsaw 1948, hereafter called „the previous communication".

fiers $\sum\limits_{p_1 \ldots p_n} \prod\limits_{p_1 \ldots p_n}$.[2]) The definitions of difference and symmetrical difference are introduced:

$$p \ominus q =_{Df} p \odot q' \tag{1.01}$$

$$p \dot{-} q =_{Df} (p \ominus q) \oplus (q \ominus p) \tag{1.02}$$

Natural variables (i. e., variables for which only the names of natural numbers may be substituted) are letters $k k_1 k_2 \ldots l l_1 l_2 \ldots m m_1 m_2 \ldots \ldots n n_1 n_2 \ldots$. By the „scheme of the propositional variable "an expression is meant which contains at least one natural variable and which becomes a propositional variable after substitution in it of a name of a natural number for every natural variable contained in it. Thus schemes of propositional variables are, e. g., the expressions $p_k q_l r_m s_n$ and the expressions $p_{k+l}\, q_{k \cdot l}\, s_k^l$. By the „scheme of an expression belonging to the language of the propositional calculus" an expression is meant which contains at least one natural variable and which, after substitution in it of a name of a natural number for every natural variable contained in it, becomes an expression belonging to the language of the propositional calculus. Thus schemes of expressions belonging to the language of the propositional calculus are, e. g., the expressions

$$p_k \rightarrow q_l \quad p_n \longleftrightarrow r_n \quad p_{k+l} \dot{-} r_{m \dot{-} 1} \ .$$

Finally, by the „schemes of a thesis belonging to the propositional calculus" an expression is meant which contains at least one natural variable and which, after substitution in it of a name of a natural number for every natural variable contained in it, becomes either a thesis belonging to the propositional calculus or an implication in which the hypothesis is a thesis belonging to the arithmetics of natural numbers, and the thesis is true in the propositional calculus. Thus schemes of theses belonging to the propositional calculus are, e. g., the two following expressions:

$$p_k \rightarrow p_k$$

$$(m + m = 2 \,.\, m) \rightarrow (p_{m+m} \rightarrow p_{2 \,.\, m})$$

Instead of	we write briefly
$p_1, p_2, \ldots, p_n$	$\overset{n}{\underset{k=1}{S}}\, p_k$
$p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$	$\overset{m}{\underset{k=1}{S}}\, p_k \overset{n}{\underset{l=1}{S}}\, q_k$
$p_1 \oplus \ldots \oplus p_n$	$\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$

[2]) In the previous communication the author formulated the method of introducing the quantifiers into the propositional calculus.

$$p_1 \odot \ldots \odot p_n \qquad \prod_{k=1}^{n} p_k$$

$$(p_1 \odot p_2) \rightarrow q \qquad p_1 \odot p_2 \rightarrow q$$

In the study of propositional functions each containing n propositional variables an essential role is played by the following scheme of the propositional function containing $n + 2^n$ propositional variables

$$\underset{k=1}{\overset{n}{S}}\, p_k \in \underset{l=1}{\overset{2^n}{S}}\, q_l$$

recursively defined as follows[3])

$$p_1 \in q_1 q_2 =_{Df} (p_1{}' \rightarrow q_1) \odot (p_2 \rightarrow q_2) \tag{1.11}$$

$$\underset{k=1}{\overset{n+1}{S}} p_k \in \underset{l=1}{\overset{2^{n+1}}{S}} q_l . =_{Df}\, p_{n+1} \in (\underset{k=1}{\overset{n}{S}} p_k \in \underset{l=1}{\overset{2^n}{S}} q_l)(\underset{k=1}{\overset{n}{S}} p_k \in \underset{l=2^n+1}{\overset{2^{n+1}}{S}} q_l) \tag{1.12}$$

In conformity with this scheme we obtain, e. g.,

$$p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4 =_{Df}\, p_2 \in (p_1 \in q_1 q_2)(p_1 \in q_3 q_4). \tag{1.13}$$

Three operations on natural numbers, all of them built by means of the ,,Entier" (E), will be useful:

$$m * n =_{Df} E\,\frac{n-1}{2^{m-1}} - 2\,.\,E\,\frac{n-1}{2^m} \tag{1.21}$$

$$m \,\mathrm{X}\, n =_{Df} m - 2^n\,.\,E\,\frac{m-1}{2^n} \tag{1.22}$$

$$m \,\mathrm{Y}\, n =_{Df} 1 + E\,\frac{m-1}{2^n} \tag{1.23}$$

The expression $m * n$ is read ,,the m-th digit (figure) of the binary development of the number $n - 1$".

The expression p^n is defined so that

$$p^\circ \longleftrightarrow p' \qquad p^1 \longleftrightarrow p \tag{1.31}$$

For values other than 0 or 1 of the exponent n the expression p^n is indefinite. Since, as can be easily noticed,

$$(m * n = 0) \oplus (m * n = 1) \tag{1.41}$$

then the expression p^{m*n} possesses definite value for all correct substitutions for the propositional variable p and the natural variables m, n.

2.

The following schemes of theses belonging to the propositional calculus have been proved:

---

[3]) Compare the previous communication, propositions 3. 11. — 3. 12.

$$\left(\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} q_l\right) \longleftrightarrow \sum_{l=1}^{2^n} \left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\,k*l}\right) \odot q_l \tag{2.11}$$

$$\left(\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} q_l\right) \longleftrightarrow \prod_{l=1}^{2^n} \left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\,k*l}\right) \to q_l \tag{2.12}$$

For instance,

$$(p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \longleftrightarrow \tag{2.13}$$

$$\longleftrightarrow (p_1{}' \odot p_2{}' \odot q_1) \oplus (p_1 \odot p_2{}' \odot q_2) \oplus (p_1{}' \odot p_2 \odot q_3) \oplus (p_1 \odot p_2 \odot q_4)$$

$$(p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \longleftrightarrow \tag{2.14}$$

$$\longleftrightarrow (p_1{}' \odot p_2{}' \to q_1) \odot (p_1 \odot p_2{}' \to q_2) \odot (p_1{}' \odot p_2 \to q_3) \odot (p_1 \odot p_2 \to q_4).$$

Each of the schemes 2.11, 2.12 may well replace the recursive scheme 1.11—1.12.

$$\sum_{p_1 \ldots p_n} \left(\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} q_l\right) \longleftrightarrow \sum_{l=1}^{2^n} q_l \tag{2.21}$$

For instance,

$$\sum_{p_1 p_2} (p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \longleftrightarrow q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \oplus q_4 \tag{2.22}$$

$$\prod_{p_1 \ldots p_n} \left(\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} q_l\right) \longleftrightarrow \prod_{l=1}^{2^n} q_l. \tag{2.23}$$

For instance,

$$\prod_{p_1 p_2} (p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \longleftrightarrow q_1 \odot q_2 \odot q_3 \odot q_4 \tag{2.24}$$

$$\left(\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} q_l\right)' \longleftrightarrow \left(\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} q'_l\right). \tag{2.31}$$

For instance,

$$(p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4)' \longleftrightarrow (p_1 p_2 \in q_1{}' q_2{}' q_3{}' q_4{}'). \tag{2.32}$$

If the following expression

$$\left[\left(\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} q_l\right) \circ \left(\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} r_l\right)\right] \longleftrightarrow \left[\overset{n}{\underset{k=1}{S}} p_k \in \overset{2^n}{\underset{l=1}{S}} (q_l \circ r_l)\right] \tag{2.41}$$

is considered, then, after substitution in it for the ,,circle" of one of the following symbols:

$$\oplus \quad \odot \quad \to \quad \longleftrightarrow \quad \ominus \quad \dot{-}$$

a scheme of a thesis belonging to the propositional calculus is obtained,[4]) for insta ce

$$[(p_1 \in q_1 q_2) \oplus (p_1 \in r_1 r_2)] \longleftrightarrow [p_1 \in (q_1 \oplus r_1)(q_2 \oplus r_2)] \tag{2.42}$$

$$[(p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) \dot{-} (p_1 p_2 \in r_1 r_2 r_3 r_4)] \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow [p_1 p_2 \in (q_1 \dot{-} r_1)(q_2 \dot{-} r_2)(q_3 \dot{-} r_3)(q_4 \dot{-} r_4)]. \tag{2.43}$$

[4]) Compare the previous communication, scheme 3. 31.

If the following expression

$$\left[\left(\mathop{S}_{k=1}^{m} p_k \in \mathop{S}_{l=1}^{2^m} r_l\right) \bigcirc \left(\mathop{S}_{k=1}^{n} q_k \in \mathop{S}_{l=1}^{2^n} s_l\right)\right] \longleftrightarrow \left[\mathop{S}_{k=1}^{m} p_k \mathop{S}_{k=1}^{n} q_k \in \mathop{S}_{l=1}^{2^{m+n}} (r_{lXm} \bigcirc s_{lYm})\right] \quad (2.51)$$

is considered, then, after substitution in it for the „circle" of one of the following symbols:

$$\oplus \; \odot \; \rightarrow \; \longleftrightarrow$$

a scheme of a thesis belonging to the propositional calculus is obtained, for instance

$$[(p_1p_2 \in r_1r_2r_3r_4) \odot (q_1 \in s_1s_2)] \longleftrightarrow [p_1p_2q_1 \in (r_1 \odot s_1)$$
$$(r_2 \odot s_1)(r_3 \odot s_1)(r_4 \odot s_1)(r_1 \odot s_2)(r_2 \odot s_2)(r_3 \odot s_2)(r_4 \odot s_2)] \quad (2.52)$$

$$[(q_1 \in s_1s_2) \odot (p_1p_2 \in r_1r_2r_3r_4)] \longleftrightarrow [q_1p_1p_2 \in (s_1 \odot r_1)$$
$$(s_2 \odot r_1)(s_1 \odot r_2)(s_2 \odot r_2)(s_1 \odot r_3)(s_2 \odot r_3)(s_1 \odot r_4)(s_2 \odot r_4)] \quad (2.53)$$

$$[(q_1 \in \vee \wedge) \odot (p_1p_2 \in \vee \wedge \wedge \wedge)] \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow (q_1p_1p_2 \in \vee \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge). \quad (2.54)$$

*

Streszczenie. — Summary.

Zastosowanie pewnych pojęć teorii liczb do rachunku zdań.

HENRYK GRENIEWSKI, Warszawa.

W komunikacie niniejszym formułuję ogólną metodę badania funkcyj wielu zmiennych w rachunku zdań. W metodzie tej dość niespodziewanie odgrywają istotną rolę niektóre (elementarne zresztą) pojęcia teorii liczb (zdefiniowane przy pomocy „Entier").

Z BADAŃ NAD ROZSTRZYGALNOŚCIĄ ROZSZERZONEJ ALGEBRY BOOLE'A.

STANISŁAW JAŚKOWSKI, Toruń.

Przez elementarne wyrażenie sensowne algebry Boole'a rozumiemy wyrażenia sensowne nie zawierające innych zmiennych, niż wolne lub związane zmienne elementarne tzn. reprezentujące elementy ciała Boole'a. W r. 1940 TARSKI znalazł metodę rozstrzygania elementarnej algebry Boole'a; metoda ta jest dotychczas nieogłoszona[1]) i nieznana mi. Otrzy-

[1]) A. TARSKI: A decision method for elementary algebra and geometry, Santa Monica Cal., 1948, 1—47.

małem obecnie wynik nieco ogólniejszy, mianowicie rozstrzygalność elementarnej teorii pierścieni Boole'a. Ponadto badałem zagadnienie rozstrzygalności rozszerzonej czyli całkowicie addytywnej algebry Boole'a. Metoda rozstrzygania daje się łatwo uogólnić w taki sposób, aby rozstrzygała klasę elementarnych wyrażeń sensownych rozszerzonej algebry Boole'a. Istnienie sum $\sum_{\Phi(x)} x$ i iloczynów $\prod_{\Phi(x)} x$ w przypadku elementarnego warunku $\Phi(x)$ wynika z założenia stwierdzającego istnienie sumy wszystkich atomów.

Wśród twierdzeń rozszerzonej algebry Boole'a niech E_1 będzie klasą równości zawierających zmienne elementarne i jedną zmienną reprezentującą zbiory elementów ciała Boole'a. Klasa E_1 jest nierozstrzygalna, gdyż zagadnienie rozstrzygalności węższego rachunku predykatów sprowadza się do zagadnienia rozstrzygalności klasy E_1.

*

Summary. — Streszczenie.

On the decision problem of the totally additive Boolean algebra.

STANISŁAW JAŚKOWSKI, Toruń.

By elementary formulae of Boolean algebra we understand formulae which contain free or bounded elementary variables i. e. only such as represent elements of a Boolean field. In 1940 Tarski found a decision method for the elementary Boolean algebra, but his method is still unpublished[1]) and unknown to me. I have now obtained a somewhat more general result, namely the decisibility of the elementary Boolean ring theory. Moreover I examined the decision problem of the totally additive Boolean algebra. The decision method may be easily generalized so as to give the decision of the class of elementary formulae of the totally additive Boolean algebra. The existence of sums $\sum_{\Phi(x)} x$ and products $\prod_{\Phi(x)} x$ in the case of elementary conditions $\Phi(x)$, is a consequence of the existence of the sum of all atoms.

Among the theorems of the totally additive Boolean algebra let E_1 be the class of equalities which contain elementary variables and one variable representing sets of elements of a Boolean field. The class E_1 is undecisible, since the decision problem of the lower predicate calculus may be reduced to the decision problem of the class E_1.

SUR UNE ÉQUIVALENCE POUR LES FONCTIONS.

BRONISŁAW KNASTER, Wrocław.

[Colloquium Mathematicum, **2** (1949—1950), 1—4.]

En rapport avec les résultats de J. ACZÉL, Bull. Amer. Math. Soc., **54** (1948), 392—400, et de C. RYLL-NARDZEWSKI, Studia Math., **11** (1949), 31—37, concernant les moyennes, le théorème général suivant est démontré pour les fonctions croissantes arbitraires $M(x, y)$ de deux variables arbitraires: *la réunion des trois propriétés, à savoir la bisymétrie* $M[M(x, y), M(z, u)] = M[M(x, z), M(y, u)]$, *la réflexivité* $M(x, x) = x$ *et la symétrie* $M(x, y) = M(y, x)$, *équivaut à la propriété* $M[x, M(y, z)] = M[M(x, y), M(z, x)]$, dite par l'auteur *distributivité en soi* et qui a été introduite par J. G.-MIKUSIŃSKI.

*

Streszczenie. — Résumé.

O pewnej równoważności dla funkcyj.

BRONISŁAW KNASTER, Wrocław.

[Colloquium Mathematicum, **2** (1949—1950), 1—4.]

W związku z wynikami J. ACZÉLA, Bull. Amer. Math. Soc., **54** (1948), 392—400, i C. RYLLA-NARDZEWSKIEGO, Studia Math., **11** (1949), 31—37, dotyczącymi średnich, autor dowodzi następującego twierdzenia ogólnego o dowolnych funkcjach rosnących $M(x, y)$ dwu zmiennych dowolnych: *koniunkcja bisymetrii* $M[M(x, y), M(z, u)] = M[M(x, z), M(y, u)]$, *zwrotności* $M(x, x) = x$ *i symetrii* $M(x, y) = M(y, x)$ *jest równoważna własności* $M[x, M(y, z)] = M[M(x, y), M(z, x)]$, zwanej przez autora *samorozdzielnością*, a wprowadzonej przez J. G.-MIKUSIŃKIEGO.

SUR LA NOTION D'INDÉPENDANCE DANS LA MÉTAMATHÉMATIQUE.

JERZY ŁOŚ, Wrocław.

Le but de cette Note est d'établir une correspondance entre deux notions d'indépendance: celle de la métamathématique (indépendance d'axiomes) et celle de la Théorie générale des ensembles (indépendance dans les algèbres de Boole).

$\mathfrak{B} = \langle A, \sim, +, ^{-}\rangle$ étant une algèbre de Boole généralisée, l'ensemble $X \subset A$ s'appelle ensemble des éléments *indépendants algébriquement dans* $\mathfrak{B}$ lorsque l'équivalence

$$\overline{a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \bar{a}_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{m+k}} \sim \overline{a_1 + \bar{a}_1} \qquad (1)$$

n'a lieu pour aucun m, k naturel ni pour aucune suite $a_1, \ldots, a_{m+k}$ d'éléments de X différents deux à deux.[1])

Soit maintenant $\mathfrak{T} = \langle S, L, \rightarrow, ^{-}\rangle$ une théorie déductive[2]); posons pour $a, b \in S$ et $X \subset S$:

$$a + b = \bar{a} \rightarrow b; \tag{2}$$

$$a \sim b \tag{3}$$

lorsque

$$a \rightarrow b \in L \text{ et } b \rightarrow a \in L;$$

$$a \in Cn(X) \tag{4}$$

lorsqu'il existe une suite $a_1, \ldots, a_n \in X$, *telle que*

$$\overline{\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_n} \rightarrow a \in L.$$

M. A. Tarski a établi le théorème suivant:[2])

Si
$$\mathfrak{T} = \langle S, L, \rightarrow, ^{-}\rangle \tag{5}$$
est une théorie déductive, alors

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}} = \langle S, \sim, +, ^{-}\rangle$$

est une algèbre de Boole.

Nous dirons que l'ensemble $X \subset S$ est un ensemble d'éléments *indépendants métamathématiquement*, si pour chaque $a \in X$ on a

$$Cn(X - \{a\}) \neq Cn(X). \tag{6}$$

On prouve facilement que

Si
$$\mathfrak{T} = \langle S, L, \rightarrow, ^{-}\rangle \tag{7}$$
est une théorie déductive et si $X \subset S$ est un ensemble d'éléments indépendants algébriquement dans $\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}}$, alors X est un ensemble d'éléments indépendants métamathématiquement. L'implication inverse n'a pas lieu.

Ainsi la notion d'indépendance algébrique de la théorie générale des ensembles se montre plus forte que l'indépendance métamathématique. Elle a été étudiée par certains auteurs, au point de vue métamathématique, sous le nom d'indépendance complète.[3])

---

[1]) Voir E. Marczewski: *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures*, Coll. Math., **I** (1948), 122.

[2]) Voir A. Tarski: *Grundzüge des Systemenkalküls*, Fund. Math., **25** (1935), 501—526.

[3]) Voir p. ex. Shinanghaw Wang: *A system of completely independent axioms for the sequence of natural numbers*, Journal of Symbolic Logic, **8** (1943), 41—44.

*

Streszczenie. — Résumé.

O pojęciu niezależności w metamatematyce.

JERZY ŁOŚ, Wrocław.

Zestawienie niezależności w sensie działań ogólnej teorii mnogości z niezależnością metamatematyczną (aksjomatów) na gruncie algebry Boole'a wykazuje, że ta pierwsza jest pojęciem istotnie mocniejszym. Była ona rozpatrywana przez niektórych autorów pod nazwą niezależności zupełnej.

SUR LA NOTION DE DÉCISION SIMPLE POUR LES MATRICES DE LA LOGIQUE À DEUX VALEURS.

JERZY ŁOŚ, Wrocław.

L'auteur établit une correspondance entre la notion de décision simple pour les matrices de la logique à deux valeurs[1]) et la notion d'indépendance algébrique des ensembles[2]) en se servant du fait que toute matrice équivalent à la matrice à deux valeurs de Schröder et normale peut être envisagée comme une algèbre de Boole.

*

Résumé. — Streszczenie.

O pojęciu pojedynczej rozstrzygalności matryc dwu-wartościowego rachunku zdań.

JERZY ŁOŚ, Wrocław.

Korzystając z tego, że każda matryca normalna i równoważna zwykłej dwu-wartościowej matrycy Schrödera może być rozpatrywana jako algebra Boole'a, autor bada związki, jakie zachodzą między pojęciem pojedynczej rozstrzygalności dla takich matryc, a pojęciem niezależności algebraicznej zbiorów.

O PEWNYM KRYTERIUM PRZELICZALNEJ ADDYTYWNOŚCI MIARY.

EDWARD MARCZEWSKI, Wrocław.

Miara (t. j. addytywna nieujemna funkcja zbioru określona w ciele zbiorów $\boldsymbol{M}$) nazywa się przeliczalnie addytywna, gdy dla każdego ciągu

[1]) Voir J. Łoś: *Sur les matrices logiques*, Coll. Math., **I** (1948), 337—339.

[2]) Voir E. Marczewski: *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures*, Coll. Math., **I** (1948), 122.

zbiorów rozłącznych $E_n \in \boldsymbol{M}$ takich, że $E_1 + E_2 + \ldots \in \boldsymbol{M}$, mamy

$$\mu(E_1 + E_2 + \ldots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots$$

O rodzinie zbiorów $\boldsymbol{F}$ mówimy, że ma *własność* (c), gdy dla każdego ciągu zbiorów $F_n \in \boldsymbol{F}$ relacja $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ pociąga za sobą $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \neq 0$.

O mierze μ w ciele $\boldsymbol{M}$ mówimy, że ma *własność* (l), gdy istnieje rodzina $\boldsymbol{F}$ o własności (c) taka, że dla każdego $M \in \boldsymbol{M}$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiory $F \in \boldsymbol{F}$ i $M_0 \in \boldsymbol{M}$ spełniające warunki

$$M_0 \subset F \subset M \text{ i } \mu(M - M_0) < \varepsilon.$$

Twierdzenie 1. *Każda miara o własności* (l) *jest przeliczalnie addytywna.*

Twierdzenie 2. *Jeżeli miara* μ *w* $\boldsymbol{M}$ *na własność* (l), *to jej przeliczalnie addytywne rozszerzenie na najmniejsze* σ*-ciało zawierające* $\boldsymbol{M}$ *ma również własność* (l).

Z hipotezy continuum wynika

Twierdzenie 3. *Istnieje miara przeliczalnie addytywna w pewnym* σ*-ciele, nie mająca własności* (l).

*

Summary. — Streszczenie.

On a test of the σ-additivity of measure.

EDWARD MARCZEWSKI, Wrocław.

A measure (i. e. anon negative set function in a field $\boldsymbol{M}$ of sets) μ is called *σ-additive* if

$$\mu(E_1 + E_2 + \ldots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots$$

for each sequence of disjoint sets $E_n \in \boldsymbol{M}$, such that $E_1 + E_2 + \ldots \in \boldsymbol{M}$.

We say, that a class $\boldsymbol{F}$ of sets has the *property* (c), if for each sequence of sets $F \in \boldsymbol{F}$ the relation $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \neq 0$ for $n = 1, 2, \ldots$ implies $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \neq 0$.

We say, that a measure μ in $\boldsymbol{M}$ has the *property* (l), if there is a class $\boldsymbol{F}$ with the property (c) such that for each $M \in \boldsymbol{M}$ and each $\varepsilon > 0$ there is a set $F \in \boldsymbol{F}$ and a set $M_0 \in \boldsymbol{M}$ which fulfill the conditions

$$M_0 \subset F \subset M \text{ and } \mu(M - M_0) < \varepsilon.$$

Theorem 1. *Each measure with property* (l) *is* σ*-additive.*

Theorem 2. *If a measure* μ *in* $\boldsymbol{M}$ *has the property* (l) *then the* σ*-additive extension of* μ *to the smallest* σ*-field containing* $\boldsymbol{M}$ *has also the property* (l).

The continuum hypotesis implies the

Theorem 3. *There is a* σ*-additive measure in a* σ*-field of sets without the property* (l).

SUR QUELQUES SIMPLIFICATIONS DE LA THÉORIE AXIOMATIQUE D'ENSEMBLES DE VON NEUMANN.

MILOŠ NEUBAUER, Praha.

1. Cette communication concerne le mémoire de J. VON NEUMANN: *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Zeitschr., **27** (1928), 669.[1]) — Les axiomes I. 4. et II. 2. permettent de désigner par $\mathbf{C}(u)$ la fonction qui est partout égale à u. La première partie du lemme 3 permet de désigner par $\langle\varphi \bullet x\rangle$ la fonction ξ telle que, φ et x étant donnés, on a partout $[\xi, y] = [\langle\varphi \bullet x\rangle, y]$. Je désigne par δ une fonction fixe, satisfaisant à l'ax. III. 1., et j'exprime comme lemme 4 la règle suivante (voir p. 685):

Lemme 4. *Si $\varphi \lesssim \psi$ et si ψ est un argument, alors φ l'est aussi.*

2. Je vais prouver que *l'introduction de la fonction* $\left\{\begin{matrix} u, & - \\ v, & w \end{matrix}\right\}$ (voir le th. 1a) *n'est pas indispensable.* Elle n'est, en effet, d'une part qu'un cas particulier de la fonction $\left(\dfrac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ (voir le th. 3a), où l'on a posé $\varphi = \mathbf{C}(u)$, $\psi = \mathbf{C}(w)$ et $\chi = \langle\delta \bullet u\rangle$. D'autre part on peut établir les th. 2a et 2b sans faire l'usage de cette fonction. A ce but j'exprime la deuxième partie du lemme 3 comme il suit:

(*i*) *φ étant donné, il existe une fonction χ telle que, $\langle\varphi \bullet x\rangle$ étant un argument, on a $[\chi, x] = \langle\varphi \bullet x\rangle$*

et je démontre que

(*ii*) *$\langle\delta \bullet x\rangle$ est un argument pour chaque x.*

Supposons (cf. p. 686), par contre, l'existence d'un x tel que $\langle\delta \bullet x\rangle$ ne soit pas un argument. D'après l'ax. IV. 2. on en déduit l'existence d'une fonction g telle qu'on a $[g, y] = A \dotplus [\langle\delta \bullet x\rangle, y]$ et $[g, z] = B \dotplus A \dotplus [\langle\delta \bullet x\rangle, z]$ avec des arguments y et z convenables. On en tire $y = x = z$, ce qui est contradictoire.

Ainsi $\langle\delta \bullet A\rangle$ est un argument et comme $\mathbf{C}(A) \lesssim \langle\delta \bullet A\rangle$, il suit du lemme 4 que $\mathbf{C}(A)$ est un ensemble. Donc, en posant $0 = \mathbf{C}(A)$, on a le th. 2a.

En rapprochant (*i*) et (*ii*), on peut désigner par Δ la fonction telle qu'on a toujours $[\Delta, x] = \langle\delta \bullet x\rangle$. Pour avoir le th. 2b, il suffit de poser $\{u\} = \mathbf{B}(\langle\delta \bullet u\rangle)$ (voir le th. 7a) et de remarquer qu'on a $\{u\} = [\psi, [\Delta, u]]$ (ψ d'après le th. 7b) $= [\varphi, u]$ (φ d'après l'ax. II. 7.).

3. Par une analyse détaillée de ***N*** on trouve que ce ne sont que les deux cas suivants du th. 3b qui sont employés dans les raisonnements de ***N***.

[1]) Ce travail est cité par ***N***. Toutes les renvois aux pages, axiomes, lemmes et théorèmes s'y rattachent. On suppose la connaisance des chap. I.—III. Quant' à la terminologie: I-Ding = argument, II-Ding = fonction, Bereich = domaine, Menge = ensemble.

φ étant donné, il existe une fonction ξ telle que ψ, χ, $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ étant des arguments, on a $[\xi, \langle\psi, \chi\rangle] = \left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$.

Il existe une fonction ξ telle que φ, ψ, χ, $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ étant des arguments, on a $[\xi, \langle\langle\varphi, \psi\rangle, \chi\rangle] = \left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$.

Or, je dis qu'*on y peut supprimer la condition que* $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ *soit un argument*. Pour cela je définis, en général, les domaines $\overline{\varphi}$, $\varphi + \psi$ et $\varphi\psi$ (on ne définit que $H + J$ et HJ dans $\boldsymbol{N}$) comme suit: en faisant correspondre à φ une fonction ψ d'après le lemme 2a, je pose $\overline{\varphi} = \mathbf{B}(\psi)$; en attachant au couple φ, ψ des fonctions χ_1 et χ_2 resp. d'après les lemmes 2b et 2c, je pose $\varphi + \psi = \mathbf{B}(\chi_1)$ et $\varphi\psi = \mathbf{B}(\chi_2)$. Cela étant, on s'assure aisément que $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right) \sim \varphi\chi + \psi\overline{\chi}$ et par conséquent $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right) \precsim \varphi + \chi$.[2]) Or, le raisonnement dans la démonstration du th. 4b restant valable pour le cas plus général traité ici, on conclut de la dermière relation d'après le lemme 4 que, ψ, χ étant des arguments, $\left(\frac{\varphi \mid \psi}{\chi}\right)$ l'est aussi.

4. Je vais établir qu'*on peut démontrer le th. 12b sans l'ax. V. 3., en s'appuyant seulement sur l'ax. V. 2.*[3]) Avant tout le th. suivant qui est plus faible que le th. 12b et qui n'emploie pas l'ax. V. 3. est sûrement vrai:

(*iii*) *Il existe une fonction φ telle que, H, J,* $|\langle H, J\rangle|$ (voir le th. 12a) *étant des ensembles, on a* $[\varphi, \langle H, J\rangle \mid = \mid \langle H, J\rangle|$.

Reste à prouver sans l'ax. V. 3. que

(*iv*) *H, J étant des ensembles, $|\langle H, J\rangle|$ l'est aussi.*

Pour cela, en appelant *classe* tout domaine dont chaque élément est un ensemble, je vais démontrer les deux propositions suivantes:

(*v*) *H étant un ensemble, chaque $|\langle H, \{v\}\rangle|$ l'est aussi.*

(*vi*) *A tout ensemble H il existe une fonction h telle que pour chaque J $|[h, J]|$* (voir le th. 10a) *est une classe et qu'on a* $|\langle H, J\rangle| \precsim \mathbf{S}(|[h, J]|)$ (voir le th. 8a).[4])

L'ensemble H et l'argument v étant donnés, on a pour chaque u $\langle u, v\rangle = \langle [f, u], [\mathbf{C}(v), u] \rangle$ (f d'après l'ax. II. 1.) $= [h, u]$ (h d'après l'ax. II. 6.), ce qui entraîne l'égalité $|\langle H, \{v\}\rangle| = |[h, H]|$, et comme

[2]) Cette inégalité suffit pour mon but. Mais je voulais noter aussi ma définition des domaines $\overline{\varphi}$ et $\varphi\psi$, parce qu'elles sont tout à fait naturelles et peuvent, en outre, servir à éliminer le lemme 1 des raisonnements de $\boldsymbol{N}$.

[3]) Alors tous les raisonnements de $\boldsymbol{N}$ qui n'utilisent pas le th. 11b, basé sur l'ax. V. 3., deviennent indépendants de cet axiome.

[4]) On a même $|\langle H, J\rangle| = \mathbf{S}(|[h, J]|)$.

$|[h, H]|$ est un ensemble d'après le th. 10b (indépendant des ax. V. 2. et V. 3.), $|\langle H, \{v\}\rangle|$ l'est aussi, c. q. f. d.

Soit H un ensemble donné. On a pour chaque v d'après (*iii*) et (*v*), en temant compte du th. 2b, $|\langle H, \{v\}\rangle| = [\varphi, \langle H, \{v\}\rangle] = [\langle \varphi \circledcirc H\rangle, [\psi, v]]$ (ψ d'après le th. 2b) $= [h, v]$ (h d'après l'ax. II. 7.). On en déduit que, pour chaque J, $|[h, J]|$ est une classe et qu'on a les implications suivantes:

$x \in |\langle H, J\rangle| \Rightarrow$ il existe un v tel que $v \in J$ et $x \in |\langle H, \{v\}\rangle| = [h, v] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ il existe un ensemble y tel que $x \in y \in |[h, J]| \Rightarrow x \in \mathbf{S}(|[h, J]|)$, c. q. f. d.

Maintenant on tire (*iv*) du lemme 4 et de (*vi*), en s'appuyant sur les th. 10b et 8b, dont le dernier est basé sur l'ax. V. 2.

*

Výtah. — Résumé.

O některých zjednodušeních von Neumannovy axiomatické theorie množin.

MILOŠ NEUBAUER, Praha.

Toto sdělení se týká zjednodušení vztahujících se k větám 2a, 2b, 3b a 12b práce J. von Neumanna: *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Zeitschr., **27** (1928), 669.

ON THE ORDERED CONTINUA OF THE POWER $2^{\aleph_0}$ CONTAINING A DENSE SUBSET OF THE POWER $\aleph_1$.

JOSEF NOVÁK, Praha.

From the given ordered point-sets P it is possible to construct by means of the identification method new ordered sets. This method is based on the following order rule: Let P be an ordered point-set and $\mathfrak{P}$ a disjoint system of points and non-void intervals such that $\cup\mathfrak{P} \subset P$. Let us define: $X < Y$ for $X \in \mathfrak{P}$, $Y \in \mathfrak{P}$ whenever $x < y$ for all points x of the point-set $X \subset P$ and all points y of the point-set $Y \subset P$. The following theorem holds: Let P be an ordered continuum; let $\mathfrak{P}$ be a disjoint system of points and closed intervals of P such that $P = \cup\mathfrak{P}$. Then $\mathfrak{P}$ is an ordered continuum too.

This theorem is applied to the lexicographically ordered point-set P, the elements of which are the transfinite sequences of 0 and 1

$$x = [x_\lambda] = x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots \qquad (\lambda < \Omega)$$

where $x_\lambda = 0$ or $x_\lambda = 1$ and Ω is the first uncountable ordinal. After identifying the neighbour points we get an ordered continuum Q of the power $2^{\aleph_1}$.

Definition. Let $\alpha > 0$ be a countable ordinal. Let $i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha)$ be a countable sequence of 0 and 1; all points $[x_\lambda] \in Q$, where $x_\lambda = i_\lambda$ for $\lambda < \alpha$, form an interval $I \subset Q$ which will be called an interval of order α and will be denoted by $I i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \alpha)$.

Let us denote by $\mathfrak{S}_k$ $(k = 1, 2, \dots, 6)$ the system of all intervals $I i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots \subset Q$ of the least limiting order α such that the following property (k) is fulfilled:

1. $i_\lambda = 1$ for an infinite number of indices $\lambda < \alpha$
2. $i_\lambda = 0$ for an infinite number of indices $\lambda < \alpha$
3. $i_\lambda = 0$ and $i_{\lambda'} = 1$ for an infinite number of indices $\lambda < \alpha$ and $\lambda' < \alpha$ while after every index $\lambda < \alpha$ there follows an index $\lambda' < \alpha$ and conversely after every index $\lambda' < \alpha$ there follows an index $\lambda < \alpha$.
4. the same as (3) or there exist two ordinals $\gamma < \beta < \alpha$, β is limiting, such that $i_\lambda = 0$ for $\gamma \leqq \lambda < \beta$, and $i_\lambda = 1$ for $\beta \leqq \lambda < \alpha$.
5. the same as (3) or there exist two ordinals $\gamma < \beta < \alpha$, β is limiting, such that $i_\lambda = 1$ for $\gamma \leqq \lambda < \beta$ and $i_\lambda = 0$ for $\beta \leqq \lambda < \alpha$.
6. the same as (4) and (5).

If we add to the system $\mathfrak{S}_k$ all elements of the point-set $Q - \bigcup \mathfrak{S}_k$ we get a disjoint system $\mathfrak{P}_k$ of closed intervals and points of Q such that $Q = \bigcup \mathfrak{P}_k$. According to the theorem every $\mathfrak{P}_k$ is an ordered continuum.

The continua $\mathfrak{P}_k$ $(k = 1, 2, \dots, 6)$ have some interesting properties. E. g. the continuum $\mathfrak{P}_1$ contains two kinds of points namely points with characters c_{00} and c_{01}. The continuum $\mathfrak{P}_3$ contains points with four respective characters c_{00}, c_{01}, c_{10} and c_{11}. This continuum seems to be BERNSTEIN'S Ultracontinuum. The most remarkable continuum is $\mathfrak{P}_6$, which contains points of two symmetric characters c_{00} and c_{11}.

The points of every kind form a dense subset in $\mathfrak{P}_k$. Especially all points with the character c_{ij}, $(i, j) \neq (0, 0)$, form a dense subset of the power $\aleph_1$. Every continuum $\mathfrak{P}_k$ has the power $2^{\aleph_0}$.

*

Výtah. — Summary.

O $\aleph_1$-separabilních uspořádaných kontinuích mohutnosti $2^{\aleph_0}$.

JOSEF NOVÁK, Praha.

Z uspořádaných bodových množin P se dají sestrojit methodou identifikace určitých intervalů nové uspořádané množiny. Platí tato věta: Nechť P je uspořádané kontinuum. Nechť $\mathfrak{P}$ je disjunktní systém bodů a uzavřených intervalů v P takový, že $P = \bigcup \mathfrak{P}$. Pak $\mathfrak{P}$ je rovněž uspořádané kontinuum. Této věty se užije na lexikograficky uspořádanou množinu P, jejíž elementy jsou transfinitní posloupnosti 0 a 1

$$x = [x_\lambda] = x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots \qquad (\lambda < \Omega)$$

kde $x_\lambda = 0$ nebo $= 1$ a Ω je prvé nespočetné ordinální číslo. Po identifikaci každých dvou sousedních bodů vznikne uspořádané kontinuum Q.

Šesti různými identifikacemi v Q je definováno šest různých uspořádaných kontinuí $\mathfrak{P}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 6$) o mohutnosti $2^{\aleph_0}$.

Kontinua $\mathfrak{P}_k$ mají zajímavé vlastnosti. Tak na př. $\mathfrak{P}_1$ obsahuje body dvojího charakteru c_{00} a c_{01}. Kontinuum $\mathfrak{P}_3$ obsahuje body čtverého charakteru c_{00}, c_{01}, c_{10} a c_{11}. Nejzajímavější jest kontinuum $\mathfrak{P}_6$ obsahující body se symetrickými charaktery c_{00} nebo c_{11}. Všechna $\mathfrak{P}_k$ jsou $\aleph_1$-separabilní, neboť body o charakterech c_{ij}, kde $(i, j) \neq (0, 0)$, tvoří množinu mohutnosti $\aleph_1$, jež je hustá v $\mathfrak{P}_k$.

SOME THEOREMS ABOUT THE INTUITIONISTIC AND LEWIS FUNCTIONAL CALCULI OF FIRST ORDER.

HELENA RASIOWA, Warszawa.

In this paper theorems about the intuitionistic and Lewis functional calculi are proved, by applying the algebraical method introduced by MOSTOWSKI.[1])

Let $F_k(I, \Gamma)$ be a set of all k-argument ($k = 0, 1, 2, \ldots$) functions, the argument of which runs through a non-void set I and the values of which belong to an abstract algebra Γ.

A function Φ is an (I, Γ) functional if its values belong to Γ and if it has a finite number of arguments running through I and $F_k(I, \Gamma)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

The algebraical method consists in conceiving every formula of a functional calculus as an (I, Γ) functional Φ_A.

By the Lewis functional calculus we understand the system with quantifiers based on the system S4 of the Lewis sentential calculus.

We prove the following theorems which are stronger than similar results obtained independently by HENKIN.

I. *For every formula A of the intuitionistic (Lewis) functional calculus the following conditions are equivalent*:

1° *A is deducible in this system,*

2° *the (I, Γ) functional Φ_A is identically equal to* 0 (1) *for every complete* BROUWERIAN *(closure) algebra Γ and every non-void set I.*

II. *There exists a complete* BROUWERIAN *(closure) algebra Γ_0 such that conditions* 1° *and* 2° *are equivalent to the following:*

3° *The (I_0, Γ_0) functional Φ_A is identically equal to* 0 (1) *for the set I_0 of all positive integers.*

The theorem for intuitionistic functional calculus gives an answer to two problems proposed by MOSTOWSKI in his paper mentioned above.

[1]) A. MOSTOWSKI: *Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus,* The Journal of Symbolic Logic, **13** (1948), 204—207.

The theorems about the intuitionistic and Lewis functional calculi may be considered as generalizations of the completeness theorem of GÖDEL[2]) for these systems.

They also may be conceived as generalizations of similar results for the sentential calculus of HEYTING and for LEWIS system S4, due to Mc KINSEY and TARSKI.[3])

*

Streszczenie. — Summary.

Pewne twierdzenia o rachunku funkcyjnym intuicjonistycznym i Lewisa.

HELENA RASIOWA, Warszawa.

W pracy tej stosuję do rachunku funkcyjnego intuicjonistycznego i Lewisa algebraiczną metodę badania rachunków funkcyjnych wprowadzoną przez A. MOSTOWSKIEGO.[1])

Dowodzę, że zachodzą następujące twierdzenia (mocniejsze od podobnych wyników otrzymanych niezależnie przes HENKINA).

I. *Dla każdego wysażenia sensownego intuicjonistycznego (Lewisa) rachunku funkcyjnego następujące warunki są równoważne:*

1. *A jest tezą.*

2. *(I, Γ) funkcjonał Φ_A jest identycznie równy* 0 (1) *dla każdej zupełnej algebry Brouwera (domknięć) Γ i niepustego zbioru I.*

II. *Istnieje zupełna algebra Brouwera (domknięć) Γ_0, taka, że warunki* 1. *i* 2. *są równoważne następującemu:*

3. *(I_0, Γ_0) funkcjonał Φ_A jest identycznie równy* 0 (1) *dla zbioru I_0 wszystkich liczb naturalnych.*

SUR L'INDÉPENDANCE DES DOMAINES SIMPLES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN À N-DIMENSIONS.

CATHERINE RÉNYI, Budapest.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous-ensembles d'un ensemble E, et soit $\overline{E_i} = E - E_i$. Choisissons k nombres $r_1, r_2, \ldots, r_k$ quelconques parmi les nombres $1, 2, \ldots, n$ et soient $s_1, s_2, \ldots, s_{n-k}$ ceux des nombres $1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ qui ne figurent pas parmi les r_i. Désignons par

$E(r_1, r_2, \ldots, r_k;\ s_1, s_2, \ldots, s_{n-k})$ l'ensemble $E_{r_1}E_{r_2} \ldots E_{r_k}\overline{E}_{s_1}\overline{E}_{s_2} \ldots \overline{E}_{s_{n-k}}$.

[2]) K. GÖDEL: *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik, **37** (1930), 349—360.

[3]) J. C. C. MC KINSEY and A. TARSKI: *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting*, The Journal of Symbolic Logic, **13** (1948), 1—15.

Nous allons dire que les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont indépendants si aucun des 2^n „atomes“ $E(r_1, r_2, \ldots, r_k; s_1, s_2, \ldots, s_{n-k})$ n'est pas vide. Cette notion de l'indépendance des ensembles était utilisée récemment par M. MARCZEWSKI (Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures, Colloquium Mathematicum, I, 1948). Désignons par $E^{(n)}$ l'espace euclidien à n dimensions, et appellons intervalle dans $E^{(n)}$ l'ensemble des points $P = (x_i)$ qui satisfont aux conditions $a_i < x_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dans un article commun de l'auteur avec MM. A. RÉNYI et J. SURÁNYI, qui parait prochainement, les théorèmes suivants sont démontrés:

Théorème A: *Le nombre maximum des intervalles indépendants dans $E^{(n)}$ est égal à $2n$.*

Théorème B: *Le nombre maximum des sphères à n-dimensions indépendantes dans $E^{(n)}$ est égal à $n + 1$.*

Théorème C: *Soit $N(k)$ le nombre maximum de domaines polygonaux ouverts et convexes indépendants dans le plan, chaque polygone ayant k côtés au plus, alors*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{N(k)}{\log k} = \frac{1}{\log 2}. \tag{1}$$

Pour démontrer Théorème B nous avons besoin du lemme suivant: Désignons par B_{nk} le nombre maximum des parties en lesquelles les surfaces de k sphères à n-dimensions divisent $E^{(n)}$, alors

$$B_{nk} = 2 \sum_{r=0}^{\min(k-1,n)} \binom{k-1}{r} \qquad (n \geqq 2). \tag{2}$$

Ce lemme fournit la solution et la généralisation d'une question posée dans l'Elemente der Mathematik (1948, Question 56).

*

Výtah. — Résumé.

O nezávislosti jednoduchých oborů v *n*-dimensionálním euklidovském prostoru.

CATHERINE RÉNYI, Budapest.

Říkáme, že části $E_1, \ldots, E_n$ množiny E jsou navzájem nezávislé, jestliže platí: jsou-li $r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_{n-k}$ čísla 1, ..., n v jakémsi pořadí, pak množina $E_{r_1} \ldots E_{r_k}, \overline{E}_{s_1} \ldots \overline{E}_{s_{n-k}}$ je neprázdná (při čemž $\overline{E}_i$ značí množinu $E - E_j$). Označíme $E^{(n)}$ n-dimensionální euklidovský prostor.

Ve společném článku C. RÉNYIOVÉ, A. RÉNYIHO a J. SURÁNYIHO, jenž vyjde v nejbližší době, jsou dokázány tyto věty:

Věta A. *Největší počet nezávislých intervalů (otevřených) v $E^{(n)}$ jest* $2n$.

Věta B. *Největší počet nezávislých n-rozměrných koulí v $E^{(n)}$ jest* $n + 1$.

Věta C. *Nechť $N(k)$ je největší počet navzájem nezávislých otevřených konvexních oblastí v rovině, ohraničených nejvýše k úsečkami. Pak*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(k)}{\log k} = \frac{1}{\log 2}.$$

O THEORII SVAZŮ BROUWEROVSKÉ VÝROKOVÉ LOGIKY.

LADISLAV RIEGER, Praha.

Uveřejněno ve Spisech vydávaných přírodovědeckou fakultou university Karlovy, **189** (1949), 1—40.

*

Summary. — Výtah.

On the lattice theory of Brouwerian propositional logic.

LADISLAV RIEGER, Praha.

The article under the same title appeared in Acta facultatis rerum naturalium universitatis Carolinae, **189** (1949), 1—40.

SUR LES SÉRIES INFINIES DE NOMBRES ORDINAUX.

WACŁAW SIERPIŃSKI, Warszawa.

A paraître sous le même titre dans Fundamenta Mathematicae, **36** (1949), 248—253.

*

Streszczenie. — Résumé.

O szeregach nieskończonych liczb porządkowych.

WACŁAW SIERPIŃSKI, Warszawa.

Praca ukaże się pod tytułem *Sur les séries infinies de nombres ordinaux* w Fundamenta Mathematicae, **36** (1949), 248—253.

ON INDEPENDENT FIELDS OF SETS AND CARTESIAN PRODUCTS.

ROMAN SIKORSKI, Warszawa.

To appear under the title *Independent fields and cartesian products* in Studia Mathematica, **11** (1949).

Streszczenie. — Summary.

O niezależnych ciałach zbiorów i produktach kartezjańskich.

ROMAN SIKORSKI, Warszawa.

Praca ukaże się pod tytułem: *Independent fields and cartesian products* w Studia Mathematica, **II** (1949).

ON A CERTAIN DEFINITION OF PROBABILITY.

JERZY SŁUPECKI, Wrocław.

This paper gives a definition of the finite probability, from which the axioms of the theory of probability result. The present contribution is part of a larger study on the foundations of the theory of probability.

*

Streszczenie. — Summary.

O pewnej definicji prawdopodobieństwa.

JERZY SŁUPECKI, Wrocław.

W referacie podaję definicję prawdopodobieństwa skończonego, z której wynikają aksjomaty rachunku prawdopodobieństwa. Wynik ten jest fragmentem większej pracy o rachunku prawdopodobieństwa.

O TAK ZWANYCH ALGEBRACH PEŁNYCH.

JERZY SŁUPECKI, Wrocław.

§ 1.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną ≥ 2, A dowolnym zbiorem o n elementach. Nie zmniejszając ogólności rozważań założyć mogę, że elementami tymi są liczby naturalne $\leq n$.

Algebrą pełną nazywamy algebrę, której terminy pierwotne pozwalają zdefiniować każdą funkcję o dowolnej ilości zmiennych przebiegających zbiór A i której wartościami są elementy tego zbioru.

Terminy logiczne, występujące w wyrażeniach pełnych algebr zaczerpnięte są wyłącznie z rachunku zdań, gdyż ze względu na skończoność zbioru A, kwantyfikatory nie są potrzebne.

W algebrach pełnych, o których będzie tu mowa, występują dwa terminy pierwotne. Jeden z nich jest relacją o jednym argumencie (funkcją zdaniową) $\Phi(x)$, spełniającą warunek:

$\Phi(x)$ jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 1$.

Drugim terminem pierwotnym jest funkcja dwu zmiennych $F(x, y)$, spełniająca warunki:

$$F(x, y) = 1, \text{ gdy } x \neq y \text{ lub } x = y = n,$$
$$F(x, y) = x + 1, \text{ gdy } x = y \text{ i } x < n.$$

Warunki te można ująć w tabelkę

T 1.

F	1	2	3	. . .	$n-1$	n
1	2	1	1	. . .	1	1
2	1	3	1	. . .	1	1
3	1	1	4	. . .	1	1
.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	. . .	.	.
$n-1$	1	1	1	. . .	n	1
n	1	1	1	. . .	1	1

Algebra pełna nie może być oparta na mniejszej ilości terminów pierwotnych ani też na dwu innych terminach pierwotnych o mniejszej ilości argumentów.

Nie podaję dowodu, że algebra o terminach pierwotnych $\Phi(x)$ i $F(x, y)$ jest pełna. Pominę również dowody wszystkich innych twierdzeń tej pracy.

Twierdzenie I. Dla każdego naturalnego $n \geqq 2$ system pełnej algebry o bazie n-elementowej jest niesprzeczny, aksjomatyzowalny i zupełny, to znaczy, że dołączając do niego dowolne wyrażenie zdaniowe, zanotowane w terminach właściwych tej algebrze, otrzymujemy zbiór wyrażeń, do konsekwencji którego należą dwa zdania sprzeczne.

Twierdzenie II. Dla każdego naturalnego $n \geqq 2$ istnieje wyrażenie, będące tezą tej i tylko tej algebry pełnej, której baza liczy dokładnie n elementów. Istnieją również wyrażenia będące tezami wszystkich algebr pełnych.

Niech m i n będą dowolnymi liczbami naturalnymi, spełniającymi nierówność $m > n \geqq 2$. Zakładam, że funkcja $F(x, y)$ jest terminem pełnej algebry o bazie m-elementowej. Za pomocą tej funkcji można zdefiniować funkcję $F_n(x, y)$, spełniającą warunki:

$$F_n(x, y) = 1, \text{ gdy } x \neq y \text{ lub gdy } x = y \text{ i } n \leqq x \leqq m, \tag{1}$$

$$F_n(x, y) = x + 1, \text{ gdy } x = y \text{ i } x < n. \tag{2}$$

Zmieniam na chwilę oznaczenia i funkcję $F(x, y)$, gdy jest ona terminem algebry o bazie n-elementowej notuję „$F_n(x, y)$", a więc tak jak funkcję określoną wzorami (1) i (2).

Twierdzenie III. Jeśli α jest wyrażeniem zdaniowym, w którym prócz zmiennych i symboli rachunku zdań występują tylko terminy „Φ" i „F_n", to α jest tezą pełnej algebry o bazie n-elementowej wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą pełnej algebry o bazie m-elementowej.

Twierdzenia II i III możemy streścić w następujący sposób: O ile ograniczymy systemy do wyrażeń niezawierających terminów zdefiniowanych, to dowolne dwie pełne algebry o bazach, mających różną ilość elementów, krzyżują się, lecz jednocześnie algebra o bazie liczniejszej, wzbogacona o tezy, zawierające terminy zdefiniowane, zawiera algebrę o bazie mniej licznej.

§ 2.

Niech N będzie dowolnym zbiorem przeliczalnym. Nie zmniejszając ogólności rozważań założyć mogę, że jest on zbiorem liczb naturalnych.

Relacja jednoargumentowa $\Phi(x)$, której argument przebiega zbiór N, niech spełnia warunek:

$\Phi(x)$ jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 1$.

Funkcja $F(x, y)$, określona w zbiorze N i przyjmująca wartości należące do tego zbioru, niech spełnia warunki:

$$F(x, y) = 1, \text{ gdy } x \neq y,$$
$$F(x, y) = x + 1, \text{ gdy } x = y.$$

Warunki te można ująć w tabelkę

F	1	2	3	. . . .
1	2	1	1	. . . .
2	1	3	1	. . . .
3	1	1	4	. . . .
.	.	.	.	. . . .
.	.	.	.	. . . .

Algebrę opartą na tych terminach nazywać będę algebrą o *nieskończonej bazie*. Wszystkie terminy logiczne, występujące w wyrażeniach tej algebry, należą do rachunku zdań.

Niech k będzie dowolną liczbą naturalną ≥ 2. Za pomocą funkcji $F(x, y)$, będącej terminem algebry o nieskończonej bazie można zdefiniować funkcję $F_k(x, y)$ o własnościach:

$$F_k(x, y) = 1, \text{ gdy } x \neq y \text{ lub gdy } x = y \text{ i } x \geq k, \tag{3}$$
$$F_k(x, y) = x + 1, \text{ gdy } x = y \text{ i } x < k. \tag{4}$$

Zmieniam na chwilę oznaczenia i funkcję $F(x, y)$, będącą terminem pełnej algebry o bazie k-elementowej notuję „$\mathrm{F}_k(x, y)$" a więc tak, jak funkcję określoną wzorami (3) i (4).

Twierdzenie IV. Jeśli α jest wyrażeniem, w którym prócz zmiennych i symboli rachunku zdań występują tylko terminy „Φ" i „F_k", to α jest tezą algebry pełnej o bazie k-elementowej wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą algebry o nieskończonej bazie.

System więc algebry o nieskończonej bazie, wzbogacony wyrażeniami o terminach zdefiniowanych, zawiera każdą pełną algebrę.

Twierdzenie V. System algebry o nieskończonej bazie jest niesprzeczny, zupełny i rozstrzygalny, to znaczy, że istnieje metoda, pozwalająca o każdym wyrażeniu tej algebry rozstrzygnąć za pomocą skończonej ilości prób, czy jest ono tezą.

Nie umiem natomiast odpowiedzieć na pytanie, czy system algebry o nieskończonej bazie jest aksjomatyzowalny.

Twierdzenie VI. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqq 2$ istnieje wyrażenie, będące tezą tej itylko tej algebry pełnej, której baza liczy dokładnie n elementów i nie będące tezą algebry o nieskończonej bazie. Istnieją też wyrażenia, będące tezami algebry o nieskończonej bazie, lecz nie będące tezami żadnej algebry pełnej, jak również wyrażenia będące tezami algebry o nieskończonej bazie i każdej algebry pełnej.

§ 3.

Ciąg nieskończony

$$F_1(x, y),\ F_2(x, y), \ldots \tag{5}$$

jest ciągiem funkcji określonych w zbiorze N i przyjmujących wartości, należące do tego zbioru.

Dla każdego naturalnego i funkcja $F_i(x, y)$ spełnia warunki

$$F_i(x, y) = 1 \text{ gdy } x \neq y,$$
$$F_i(x, y) = x + i, \text{ gdy } x = y.$$

Warunki te można ująć w tabelkę

	F_i	1	2	3	...
	1	$1+i$	1	1	...
T_i	2	1	$2+i$	1	...
	3	1	1	$3+i$	...
	.	.	.	.	...
	.	.	.	.	...

Dla różnych wartości i tabelki te nie są izomorficzne. Jak łatwo widzieć, funkcja $F_1(x, y)$ jest identyczna z funkcją $F(x, y)$ poprzedniego paragrafu. Zaznaczę jeszcze, że przy pomocy funkcji $F_i(x, y)$ można zdefiniować funkcję $F_j(x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna k, że $j = k \cdot i$. Za pomocą więc funkcji $F_1(x, y)$ można zdefiniować każdą funkcję ciągu (5).

Niech α_1 i α_2 będą dowolnymi wyrażeniami, w których prócz zmiennych i symboli rachunku zdań występuje tylko termin „Φ" poprzedniego paragrafu oraz w wyrażeniu α_1 termin „$F_{i_1}(x, y)$ a w wyrażeniu α_2-termin „$F_{i_2}(x, y)$" tak, że zmieniając w wyrażeniu α_1 wszystkie wskaźniki „i_1" na „i_2" otrzymujemy wyrażenie α_2.

Twierdzenie VII. Wyrażenie α_1 jest spełnione przez tabelkę $T(i_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie α_2 jest spełnione przez tabelkę $T(i_2)$.

§ 4.

Niech Fpq będzie terminem pierwotnym n-wartościowego rachunku zdań ($n \geqq 2$). Własności tego terminu określa tabelka T 1, § 1, przyczym wartością wyróżnioną jest 1. Dla $n = 2$ funktor „F" jest terminem Sheffera. Dla funktora tego przyjmujemy następującą regułę odrywania:

Jeśli $F\alpha F\beta\beta$ i α są tezami, to β jest tezą.

Systemy rachunku zdań oparte na terminie „F_1" są pełne. Dla systemów tych prawdziwe są twierdzenia analogiczne do twierdzeń I, II i III, § 1. Również dla twierdzeń § 2 i § 3 istnieją twierdzenia analogiczne, dotyczące systemów nieskończenie wielowartościowego rachunku zdań.

Twierdzenia, dotyczące logiki n-wartościowej o jednej wartości wyróżnionej, można uogólnić na logiki n-wartościowe o większej ilości wartości wyróżnionych. Termin pierwotny „Fpq" pełnego systemu logiki n-wartościowej o k wartościach wyróżnionych ($n > k$) spełnia warunki:

$$\begin{aligned}
&Fpq = 1 \text{ gdy } p = q = n \text{ lub gdy } p \neq q \text{ i } p > k,\\
&Fpq = p + 1 \text{ gdy } p = q \text{ i } p < n,\\
&Fpq = p \text{ gdy } q = p + 1 \text{ i } p \leqq k,\\
&Fpq = q \text{ gdy } p \neq q,\ q \neq p + 1 \text{ i } p \leqq k.
\end{aligned}$$

Wartościami wyróżnionymi są $1, 2, \ldots, k$.

*

Summary. — Streszczenie.

On the so-called full algebras.

JERZY SŁUPECKI, Wrocław.

An algebra with a finite basis, primitive terms of which allow to define all possible functions and relations of the algebra in question, is termed in the present paper „full algebra".

Let the numbers $1, 2, \ldots, n$ constitute the elements of the basis.

The primitive terms of a full algebra are:

a) The relation $\Phi(x)$ fulfilling the condition: $\Phi(x)$ holds then and only then if $x = 1$.

b) The function $F(x, y)$ is defined by table 1.

The system of a full algebra is axiomatizable.

A close relation exists between full algebras and full systems of the n-valued propositional caculus.

O SUMIE SKOŃCZONEJ LICZBY LICZB PORZĄDKOWYCH.

ANTONI WAKULICZ, Katowice.

W pracy pod powyższym tytułem wyznaczyłem liczbę największą m_n różnych wartości, które przyjmować może suma n liczb porządkowych (n dana liczba naturalna), gdy wykonujemy $n!$ permutacji składników rozważanej sumy. Okazałem mianowicie, że

$$m_n = 81^{6E\frac{n-1}{5}-n+1}\,193^{n-1-5E\frac{n-1}{5}} \quad \text{dla } n > 20$$

i obliczyłem wartości m_n dla $n \leqq 20$

Nasuwa się tutaj zagadnienie:

Czy dla każdej liczby naturalnej $k \leqq m_n$ istnieje n liczb porządkowych, których suma przyjmuje dokładnie k różnych wartości, gdy rozważamy wszystkie permutacje składników?

Dla $n \leqq 4$ odpowiedź jest pozytywna. Udowodniłem jednak, że już dla $n = 5$ odpowiedź jest negatywna. Okazałem mianowicie, że (wobec $m_5 = 33$) niema takich 5 liczb porządkowych, których suma przyjmowałaby 30 różnych wartości przy wszelkich permutacjach jej składników.

Praca ukaże się w Fund. Math., **36**, 254—266.

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur la somme d'un nombre fini de nombres ordinaux.

ANTONI WAKULICZ, Katowice.

J'ai déterminé le nombre maximum m_n de valeurs distinctes que peut prendre une somme de n nombres ordinaux (où n est un nombre naturel donné), lorsqu'on effectue toutes les $n!$ permutations des termes. J'ai demontré que

$$m_n = 81^{6E\frac{n-1}{5}-n+1}\,193^{n-1-5E\frac{n-1}{5}} \quad \text{pour } n > 20$$

et j'ai calculé les valeurs de m_n pour $n \leqq 20$.

n étant un nombre naturel donné, le problème s'impose:

Existe-t-il, pour tout nombre naturel $k \leqq m_n$, n nombres ordinaux dont la somme admet, pour toutes les permutations de ses termes, k et seulement k valeurs distinctes?

Pour $n \leqq 4$ la réponse est affirmative. J'ai demontré qu'elle est négative pour $n = 5$. A savoir, j'ai établi que $m_5 = 33$ et qu'il n'existe aucune somme de cinq nombres ordinaux qui puisse prendre 30 valeurs distinctes.

Le travail va paraître dans Fund. Math., **36**, 254—266.