Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Analýza

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 3, 178--235

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109428

3. sekce.

Analysa.

O FUNKCJACH ODWZOROWUJĄCYCH W SPOSÓB WZAJEMNIE JEDNOCZNACZNY I WIERNOKĄTNY GÓRNĄ PÓŁPŁASZCZYZNĘ NA ZEWNĘTRZA ŁUKÓW PEWNYCH KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH.*)

JULIAN BONDER, Gliwice.

Celem głównym niniejszego komunikatu było przedstawienie metody; która prowadzi do *efektywnego* wyznaczania funkcji analitycznej $z = f(t)$, odwzorowującej w sposób wzajemnie jednoznaczny i wiernokątny górną półpłaszczyznę zmiennej zespolonej t na całe zewnętrze dowolnego łuku AB, pewnej klasy krzywych algebraicznych. Zakres rozważanych tu krzywych algebraicznych został ograniczony przez następujący postulat: żąda się, aby w każdym konkretnym zagadnieniu istniała i była dana (w postaci oczywiście możliwie najprostszej) taka n-wartościowa funkcja algebraiczna $\zeta = \varphi(z)$, która by odwzorowywała n identycznych „cięć“ $A_z^{(j)}B_z^{(j)}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, stanowiących ślad danego łuku AB na n płatach algebraicznej powierzchni Riemanna R_z, odpowiadającej tej funkcji $\varphi(z)$, na n „cięć“ $A_\zeta^{(j)}B_\zeta^{(j)}$ w kształcie *odcinków prostoliniowych* bądź *łuków kołowych*, zresztą jakkolwiek położonych na płaszczyźnie ζ.

W tym ujęciu zadanie sprowadza się, w gruncie rzeczy, do znalezienia funkcji analitycznej, będącej superpozycją dwóch poprzednich funkcji, t. j. $\varphi[f(t)] = \zeta(t)$. Otóż, dzięki wprowadzeniu odwzorowania określonego tą funkcją superponowaną $\zeta(t)$, staje się rzeczą możliwą stosowanie prostej *zasady symetrii* (*zasady odbić*) *Schwarza*, która jak wiadomo, stanowi wyjątkowo skuteczną metodę odwzorowań wiernokątnych — metodę, prowadzącą z reguły do najbardziej efektywnych postaci poszukiwanych rozwiązań.

*) Pełny tekst tej pracy ma się ukazać w „Časopise pro pěstování matematiky a fysiky“.

Odpowiednio rozwijając tę metodę, udowodniłem podstawowy rezultat głoszący, że poszukiwana funkcja $\zeta(t)$ jest, na powierzchni R_t, *funkcją liniowo polimorficzną*. By otrzymać powierzchnię R_t, trzeba i wystarcza: 1^0 za pomocą funkcji $t = f^{-1}(z)$, odwrotnej do $f(t)$, przekształcić powierzchnię R_z (wraz z n „cięciami", wyżej wspomnianymi) na powierzchnię R_t^0, położoną na górnej półpłaszczyźnie t; $2°$ utworzyć powierzchnię R_t^*, będącą dokładnym obrazem symetrycznym powierzchni R_t^0 względem osi rzeczywistej płaszczyzny t; 3^0 „skleić" te dwie powierzchnie R_t^0 i R_t^* ze sobą wzdłuż ich n odpowiadających sobie brzegów (patrz pełny tekst*), wzór 13). — Wykazuję następnie, że ta zamknięta algebraiczna powierzchnia R_t nie może być rodzaju zerowego, lecz że zawsze jej rodzaj $p_t \geqq 1$.

Z liniowej polimorficzności funkcji $\zeta(t)$ wynika, że pewne jej *niezmienniki różniczkowe* — mniej lub bardziej złożone, co z kolei zależy od konfiguracji, jaką w płaszczyźnie ζ zajmują obrazy łuku AB (patrz wzory 8—10) — będą już, na powierzchni R_t, funkcjami jednowartościowymi, a więc — *funkcjami algebraicznymi*. Efektywne ich wyznaczenie ułatwia okoliczność, że funkcje te mogą być *zuniformizowane*: w przypadku $p_t = 1$, za pomocą funkcji eliptycznych; w pozostałych zaś przypadkach, gdy $p_t > 1$ — za pomocą funkcji automorficznych.

Celem lepszej ilustracji „wartości roboczej" metody, rozwiniętej w tej pracy, podaję kilka, względnie prostych ($p_t = 1$) przykładów odwzorowań. Wyznaczam mianowicie, w efektywnej postaci, funkcje odwzorowujące w sposób wzajemnie jednoznaczny i wiernokątny górną półpłaszczyznę t na *całe* zewnętrze dowolnego łuku AB: $1°$ paraboli, $2°$ elipsy, $3°$ hiperboli i $4°$ owalu Cassini'ego.

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur les fonctions réalisant les représentations conformes et biunivoques d'un demi-plan sur les extérieurs des arcs de certaines courbes algébriques.*)

JULIAN BONDER, Gliwice.

Le but principal du présent travail est de donner une méthode qui permette — sous une forme *effective* — de trouver la fonction analytique $z = f(t)$, réalisant la représentation conforme et biunivoque du demi-plan supérieur de la variable complexe t sur tout l'extérieur d'un arc quelconque AB, appartenant à une certaine classe de courbes algébriques. Nous déterminons cette classe en demandant qu'il soit donné, pour chaque problème posé, une *fonction algébrique* $\zeta = \varphi(z)$, aussi simple que

*) Le texte complet de cette communication paraîtra dans le „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky".

possible, qui transforme n coupures — pratiquées par cet arc AB sur les n feuillets de la surface algébrique de Riemann R_z, correspondant à la fonction $\varphi(z)$ — sur n *segments rectilignes* ou sur n *arcs de cercles*: $A_\zeta^{(j)} B_\zeta^{(j)}$; $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Notre problème se ramène maintenant à la recherche de la fonction analytique composée: $\varphi[f(t)] = \zeta(t)$. Sous cette forme, le problème permet déjà l'application du *principe de symétrie* de Schwarz — seule méthode qui conduit à des solutions véritablement effectives.

Je démontre que la fonction cherchées $\zeta(t)$ est une *fonction linéairement polymorphe* sur la surface R_t. Pour obtenir cette surface R_t, il faut: 1° transformer — à l'aide de la fonction $t = f^{-1}(z)$ — la surface R_z (avec n coupures mentionnées plus haut) en une surface R_t^0, située sur le demiplan supérieur t; 2° former la surface R_t^* — image symétrique de R_t^0 par rapport à l'axe réel du plan t; 3° coller ensemble, pour ainsi dire, ces surfaces, R_t^0 et R_t^*, par leurs n bords correspondants (voir la formule (13) du texte complet). Je prouve que cette surface R_t — qui est fermée et algébrique — n'est jamais de genre zéro, mais de genre $p_t \geqq 1$.

Or, certains invariants différentiels de la fonction $\xi(t)$, choisis conformément à la configuration géométrique des arcs $A_\zeta^{(j)} B_\zeta^{(j)}$ — voir form. (9) et (10) — présentent déjà, sur cette surface R_t, des fonctions uniformes. Ce sont des *fonctions algébriques*. Par conséquent, on peut les uniformiser: à l'aide des fonctions elliptiques — dans le cas $p_t = 1$; au moyen des fonctions automorphes, lorsque $p_t > 1$.

J'indique la mise en oeuvre de la méthode développée dans ce travail sur quelques exemples, assez simples $(p_t = 1)$, à savoir: je trouve la forme effective des fonctions réalisant des réprésentations conformes et biunivoques du demi-plan t sur tout l'extérieur d'un arc AB : 1° de parabole, 2° d'ellipse, 3° d'hyperbole et 4° d'un ovale de Cassini.

DÉCOMPOSITION D'UN OPÉRATEUR LINÉAIRE DIFFÉRENTIEL ORDINAIRE À L'AIDE DU SYSTÈME FONDAMENTAL DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE CORRESPONDANTE.

EUGEN BUNICKÝ, Praha.

Soit $\Delta_{i_1 \ldots i_s}$ le Wronskien des fonctions $u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}$ d'une variable x et $\Delta'_{i_1 \ldots i_s}$ sa dérivée. Pour $m \geqq 2$ on a identiquement

$$\begin{aligned}\Delta_{1, \ldots, m}, \Delta'_{1, \ldots, m-1, m+1} - \Delta_{1, \ldots, m-1, m+1} \Delta'_{1, \ldots, m} = \\ = \Delta_{1, \ldots, m-1} \Delta_{1, \ldots, m+1}.\end{aligned} \tag{1}$$

Soit $L_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu D^{n-\nu}$ un opérateur linéaire différentiel ordinaire du n-ième ordre ($n > 1$) et $L_n(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu y^{(n-\nu)} = 0$ l'équation différentielle correspondante ($D^0 = 1, y^{(0)} = y$). Les coefficients $p_\nu = p_\nu(x)$ sont par hypothèse des fonctions holomorphes d'une variable réelle x dans un intervalle $A = (a, b)$ ou des fonctions holomorphes d'une variable complexe $x = \xi + i\eta$ dans un domaine ouvert A et $p_0(x) \neq 0$ dans A. Considérons maintenant des décompositions diverses de L_n en facteurs linéaires suivant la formule

$$L_n = (s_n D - t_n) \dots (s_2 D - t_2)(s_1 D - t_1), \tag{2}$$

s_i et t_i étant de même des fonctions holomorphes dans A. En comparant les deux membres de (2), il vient $p_0(x) = s_1(x) \dots s_n(x)$, d'où il suit $s_i(x) \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$) dans A.

On obtient la solution générale de l'équation

$$L_n(y) \equiv (s_n D - t_n) \dots (s_1 D - t_1) y = 0 \tag{3}$$

en résolvant un système de n équations linéaires différentielles du premier ordre

$$s_1 y' - t_1 y = y_1,\ s_2 y_1' - t_2 y_1 = y_2,\ \dots,\ s_n y'_{n-1} - t_n y_{n-1} = 0 \tag{4}$$

pour les n inconnues $y_{n-1}, \dots, y_2, y_1, y$. Soit $q_i = t_i/s_i$, $Q_i = e^{\int q_i \mathrm{d}x}$ ($i = 1, \dots, n$). En posant $u_{k+1}(x) =$

$$= Q_1(x) \int^{x} \left(\frac{Q_2(x_1)\,\mathrm{d}x_1}{s_1(x_1) Q_1(x_1)} \int^{x_1} \left(\frac{Q_3(x_2)\,\mathrm{d}x_2}{s_2(x_2) Q_2(x_2)} \cdots \left(\int^{x_{k-1}} \frac{Q_{k+1}(x_k)\,\mathrm{d}x_k}{s_k(x_k) Q_k(x_k)} \right) \dots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \tag{5}$$

pour $k = 1, \dots, n-1$ et $u_1(x) = Q_1(x)$ on a alors $y = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$, où c_k sont des constantes arbitraires. Les solutions particulières u_k forment nécessairement un système fondamental de l'équation (3) dans un certain domaine $B \subset A$ et de même, en vertu de l'identité (2), un système fondamental de l'équation $L_n(y) = 0$ dans B. On peut démontrer qu'il existe un domaine fermé $F \subset B$ où l'on a $\Delta_i = \Delta_{1, \dots, i} \neq 0$ pour chaque $x \in F$. Pour $x \in F$ on déduit des équations (5)

$$t_i = s_i \left(\log \frac{s_1 \dots s_{i-1} \Delta_i}{\Delta_{i-1}} \right)' \quad (i = 2, \dots, n) \quad t_1 = s_1 (\log u_1)' \tag{6}$$

ce que l'on démontre inductivement à l'aide de l'identité (1). En vertu de (2) et (6) on trouve que chaque décomposition (2) a dans F la forme

$$L_n = \prod_{i=n}^{1} \left[s_i D - s_i \left(\log \frac{s_1 \dots s_{i-1} \Delta_i}{\Delta_{i-1}} \right)' \right], \tag{7}$$

où les fonctions s_i satisfont à la relation $p_0 = s_1 \dots s_n$ et où Δ_i désignent les Wronskiens des fonctions $u_1, \dots, u_i$, les fonctions $u_1, \dots, u_n$ formant un certain système fondamental de l'équation $L_n(y) = 0$.

Inversement, si l'on construit le second membre de (7) à l'aide d'un système fondamental quelconque $u_1, \ldots, u_n$ de l'équation $L_n(y) = 0$, en gardant toujours l'ordre de ces fonctions et à l'aide d'un système de fonctions holomorphes arbitraires s_i satisfaisant à l'équation $p_0 = s_1 \ldots s_n$, on voit que l'identité (7) est satisfaite dans un domaine correspondant F. On le démontre en posant successivement $y = u_1, \ldots, u_n$ dans l'équation $(s_n D - t_n) \ldots (s_1 D - t_1) y = 0$, ($t_i$ étant défini par (6)) et en faisant usage de l'identité (1). Donc la formule (7) donne toutes les décompositions possibles en n facteurs linéaires dans un domaine F. Ces décompositions peuvent être très variées.

*

Výtah. — Résumé.

Rozklad lineárního obyčejného diferenciálního operátoru pomocí fundamentálního systému řešení příslušné diferenciální rovnice.

EUGEN BUNICKÝ, Praha.

Budiž $L_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu D^{n-\nu}$ lineární obyčejný diferenciální operátor, kde $p_\nu = p_\nu(x)$ jsou funkce holomorfní buďto reálné nebo komplexní proměnné x v jisté oblasti $A (p_0(x) \neq 0 \text{ v } A)$. Nejobecnější možný rozklad operátoru L_n v lineární faktory v jisté části $F \subset A$ je dán vztahem (7), kde Δ_i značí Wronskiho determinant prvých i funkcí pevně uspořádaného (ale libovolného) fundamentálního systému řešení rovnice $L_n(y) = 0$ a kde s_i jsou libovolné holomorfní funkce, vyhovující podmínce $p_0 = s_1 \ldots s_n$.

O CAŁKACH OSCYLUJĄCYCH PEWNEGO UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH.

ZYGMUNT BUTLEWSKI, Poznań.

Rozważam układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t, x, y), \end{cases}$$

gdzie $f(t, x, y)$ i $g(t, x, y)$ są funkcjami ciągłymi zmiennych t, x, y dla $t \geqq t_0 > 0$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

Znajduję warunki *wystarczające*, aby całka $x(t), y(t)$ układu równań(*) była 1° nieoscylująca, 2° oscylująca dla dużych, dodatnich wartości zmiennej t.

W przypadku całek oscylujących zajmuję się również ich ekstremami.

On oscillating integrals of a system of ordinary differential equations.

ZYGMUNT BUTLEWSKI, Poznań.

I consider the system of ordinary differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y),$$

where $f(t, x, y)$ and $g(t, x, y)$ are continuous functions of the variables t, x, y for

$$t \geqq t_0 > 0, \; -\infty < x < +\infty, \; -\infty < y < +\infty.$$

I find *sufficient* conditions, that the integral $x(t)$, $y(t)$ of the system of equations be 1° non-oscillating and 2° oscillating for large positive values of the variable t.

In the case of oscillating integrals their extrema also are considered.

SUR L'UNICITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

STEFAN DROBOT et JAN G.-MIKUSIŃSKI, Wrocław.

A étant un anneau commutatif sans diviseurs de zéro, désignons par $x(\lambda)$ les fonctions qui font correspondre des éléments de A à des nombres réels λ. La dérivée $x'(\lambda)$ soit définie par les postulats suivants:

1° $[x_1(\lambda) + x_2(\lambda)]' = x_1'(\lambda) + x_2'(\lambda)$,
$[x_1(\lambda) \,.\, x_2(\lambda)]' = x_1'(\lambda) \,.\, x_2(\lambda) + x_1(\lambda) \,.\, x_2'(\lambda)$;

2° $[x(\mu - \lambda)]' = -x'(\mu - \lambda)$ pour $\mu = \text{const.}$;

3° $x(\lambda) = \text{const.}$ entraîne $x'(\lambda) = 0$ et réciproquement.

Cela posé, il existe au plus une solution de l'équation

$$a_n x^{(n)}(\lambda) + \ldots + a_0 x(\lambda) = c(\lambda) \quad (a_i \in A, \; a_n \neq 0),$$

telle que

$$x(\lambda_0) = k_0, \ldots, x^{(n-1)}(\lambda_0) = k_{n-1},$$

sont des éléments donnés de A.

Ce théorème peut être appliqué, en particulier, aux équations aux dérivées partielles classiques.

Streszczenie. — Résumé.

O jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych.

STEFAN DROBOT i JAN G.-MIKUSIŃSKI, Wrocław.

Tematem komunikatu jest twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań różniczkowych dla funkcji, których wartości należą do dowolnego pierścienia komutatywnego bez dzielników zera, w którym pochodna jest zdefiniowana aksjomatycznie.

O PEWNYM CIĄGU FUNKCJI HARMONICZNYCH POSIADAJĄCYCH WŁASNOŚCI EKSTREMALNE*).

JERZY GÓRSKI, Kraków.

Niech E będzie zbiorem ograniczonym i domkniętym na płaszczyźnie, $f(z)$ — funkcją rzeczywistą, ciągłą, określoną w zbiorze E, $p(z)$ — funkcją analityczną różną od 0 w pewnym obszarze $D \supset E$, λ — parametrem rzeczywistym. Niech $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ będzie układem $n+1$ punktów zbioru E. Utwórzmy funkcje

$$\Phi_n^{(j)}(z, \zeta) = \frac{(z-\zeta_0)\ldots(z-\zeta_{j-1})(z-\zeta_{j+1})\ldots(z-\zeta_n)}{(\zeta_j-\zeta_0)\ldots(\zeta_j-\zeta_{j-1})(\zeta_j-\zeta_{j+1})\ldots(\zeta_j-\zeta_n)}\left[\frac{p(\zeta_j)}{p(z)}\right]^n \cdot e^{n\lambda f(\zeta_j)}$$

$j = 0, 1, \ldots, n.$

Niech

$$\Phi_n(z) = \inf_{\zeta\in E}[\max_j|\Phi_n^{(j)}(z, \zeta)|].$$

Udowadniam następujące twierdzenie:

Jeżeli średnica pozaskończona zbioru E jest dodatnia, to dla każdego ustalonego punktu $z \in D$ istnieje skończona granica ciągu $\{\sqrt[n]{\Phi_n(z)}\}$. Oznaczmy tę granicę przez $\Phi(z)$. Jeżeli punkt $z \in D - E$, to funkcja $\log\Phi(z)$ jest funkcją harmoniczną.

W przypadku $\lambda = 0$, $p(z) = z - \alpha$ funkcja $\log\Phi(z)$ jest uogólnioną funkcją Greena dla obszaru zawierającego punkt $z = \alpha$ z biegunem w tym punkcie. Ogólniej, jeżeli dopełnienie zbioru E do całej płaszczyzny jest sumą obszarów $D_1, D_2, \ldots, D_k$ i jeżeli $p(z) = \sqrt[k]{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_k)}$, przy czym $\alpha_i \in D_i$, $i = 1, \ldots, k$, wówczas funkcja $\log\Phi(z)$ jest uogólnioną funkcją Greena obszaru D_i z biegunem w punkcie $z = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$.

---

*) Praca ukaże się w Ann. Soc. Pol. Math., XXIII.

Summary. — Streszczenie.

On a sequence of harmonic functions with extremal properties.

JERZY GÓRSKI, Kraków.

Let E be a compact plane set, let $f(z)$ be a real function on E, let $p(z)$ be an analytic function defined on a domain $D \supset E$, and let λ be a real parameter.

The author defines a sequence of functions $\Phi_n(z)$ (which depend also on λ) such that:

1. If the transfinite diameter of E is positive, the sequence $\sqrt[n]{\Phi_n(z)}$ converges in D to a function $\Phi(z)$. The function $\log\Phi(z)$ is harmonic in $D - E$.

2. If $\lambda = 0$, if the complement of E is the sum of domains $D_1, \ldots, D_k$, and if $p(z) = \sqrt[k]{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)}$, where $\alpha_i \in D_i$, then $\log\Phi(z)$ is the generalized Green function of D_i, and the point α_i is the pole of $\log\Phi(z)$.

O PEWNEJ METODZIE SZACOWANIA SUM WEYLA DLA FUNKCYJ OKRESOWYCH I PRAWIE OKRESOWYCH.[1])

STANISŁAW HARTMAN, Wrocław.

Przez sumę Weyla rozumie się tutaj $\sum_{j=1}^{N} f(j\xi)$, gdzie $f(t)$ jest bądź funkcją okresową z okresem 1, bądź funkcją prawie okresową w sensie Bohra. Dowodzi się między innymi, że w pierwszym przypadku, jeśli $f(t)$ ma w przedziale półotwartym $<0, 1)$ pierwszą pochodną bezwzględnie ciągłą (dla całkowitych t funkcja $f'(t)$, a nawet $f(t)$ może mieć skok), to dla prawie każdego ξ zachodzi $G(f, \xi, N) = \sum_{j=1}^{N} f(j\xi) - N\int_0^1 f(t)dt = o(\lg^{1+\varepsilon} N)$ dla każdego $\varepsilon > 0$; jeśli mianowniki w rozwinięciu liczby niewymiernej ξ na ułamek łańcuchowy są ograniczone, to przy tych samych założeniach co do $f(t)$ jest $G(f, \xi, N) = O(\lg N)$; wreszcie dla wszystkich ξ typu $I\mu$, gdzie $\mu < 2$[2]), jeśli $f(1) \neq f(0)$, to $G(j, \xi, N) = \Omega(\log N)$, a jeśli $f(1) = f(0)$, to $G(f, \xi, N) = O(1)$.

Otrzymuje się jeszcze wynik następujący: dla prawie każdej liczby ξ istnieje funkcja $f(t)$ okresowa z okresem 1, mającą pochodną wszędzie ciągłą, taka, że $\overline{\lim_{N\to\infty}} |G(f, \xi, N)| = +\infty$.

---

[1]) Praca ukaże się w całości w Studia Mathematica **12**.

[2]) μ=kres górny liczb rzeczywistych α, dla których nierówność $|q\xi - p| < \frac{1}{q^\alpha}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w całkowitych p, q.

$N\to\infty$

Dla funkcji $f(t)$ prawie okresowej w sensie Bohra szacuje się oprócz wyrażenia $G(f,\xi,N)=\sum_{j=1}^{N}f(j\xi)-N\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ oddzielnie wyrażenie $H(f,\xi,N)=\sum_{j=1}^{N}f(j\xi)-\int_0^N f(t\xi)\,dt$, ponieważ różnica $G(f,\xi,N)-H(f,\xi,N)$ może być wtedy nieograniczona względem N, co nigdy nie może się zdarzyć dla funkcji czysto okresowej. Podaje się pewne warunki dostateczne ograniczoności G lub H, a także przykład funkcji, dla której jednocześnie H jest ograniczone, a G nieograniczone dla każdego ξ z wyjątkiem przeliczalnego zbioru wartości.

Prócz tego okazuje się, że jeśli ciąg $\{G(f,\xi,N)\}$ jest ograniczony, to jest prawie okresowy; tę samą własność ma ciąg $\{H(f,\xi,N)\}$ przy pewnych dodatkowych założeniach co do funkcji $f(t)$.

*

Резюме. — Streszczenie.

Об одном методе оценки сумм Weyl'я для периодических и почти периодических функций[1]).

СТАНИСЛАВ ГАРТМАН, Вроцлав.

Суммой Weyl'я называем здесь сумму $\sum_{j=1}^{N}f(j\xi)$, где функция $f(t)$ периодическая с периодом 1, или почти периодическая в смысле Bohr'a. В настоящей работе доказаны следующие предложения:

1° Если периодическая функция $f(t)$ имеет в полузамкнутом интервале $<0,1)$ абсолютно непрерывную производную (в целочисленных точках допускаются разрывы 1-го рода производной $f'(t)$ или самой функции $f(t)$), то для почти каждого ξ имеет место оценка

$$G(f,\xi,N)=\sum_{j=1}^{N}f(j\xi)-N\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=o(\log^{1+\varepsilon}N)$$

при любом $\varepsilon>0$; если сверх того неполные частные разложения иррационального числа ξ в непрерывную дробь ограничены, то

$$G(f,\xi,N)=O(\log N);$$

наконец для всех ξ типа $I\mu$,[2]) где $\mu<2$, если $f(1)\neq f(0)$, то

[1]) Работа появится полностью в Studia Mathematica XII.

[2]) $\mu=$ верхняя грань действительных α, для которых неравенство $|q\xi-p|<\frac{1}{q^\alpha}$ имеет бесконечное число решений в целых числах p, q.

$$G(f, \xi, Nf) = \Omega(\log N),$$

а если $f(1) = f(0)$, то $G(f, \xi, N) = O(1)$;

2° Для почти каждого ξ существует функция $f(t)$ периодическая с периодом 1 непрерывно дифференцируемая для всех значений t и такая, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} |G(f, \xi, N)| = +\infty.$$

В работе оцениваются также выражения

$$G(f, \xi, N) = \sum_{j=1}^{N} f(j\xi) - N \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \mathrm{d}t$$

и

$$H(f, \xi, N) = \sum_{j=1}^{N} f(j\xi) - \int_0^N f(t\,\xi)\, \mathrm{d}t$$

для почти периодических функций $f(t)$.

Разность

$$G(f, \xi, N) - H(f, \xi, N)$$

может быть неограниченной при возрастающем N, хотя для чисто периодической функции $f(t)$ она всегда ограничена.

Далее даются достаточные условия ограниченности G или H, а также пример такой почти периодической функции $f(t)$, что при всех значениях ξ за исключением счетного множества одновременно H ограничено и G неограничено.

Наконец доказывается, что если последовательность $\{G(f,\xi,N)\}$ ограничена, то она почти периодическая; последовательность $\{H(f, \xi, N)\}$ обладает этим свойством при некоторых дополнительных предположениях о функции $f(t)$.

NUTNÉ A POSTAČUJÚCE PODMIENKY BODOV URČITOSTI U DIFERENCIÁLNYCH SYSTÉMOV.

JUR HRONEC, Bratislava.

1.

Nutné podmienky k tomu, aby diferenciálny systém nemal body neurčitosti.

Pre jednoduchosť určíme tieto podmienky pri $n = 2$. V obecnom prípade dajú sa tieto tiež určiť naznačeným spôsobom.

Keď máme diferenciálny systém

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= y_1 a_{11} + y_2 a_{21}\\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 a_{12} + y_2 a_{22}\end{aligned} \tag{1}$$

a fundamentálny systém tohto diferenciálneho systému je

$$\begin{pmatrix} y_{11}, & y_{21} \\ y_{21}, & y_{22} \end{pmatrix},$$

vtedy dif. systém môžeme písať vo tvare

$$y_1' = \frac{\begin{vmatrix} y_{11}', & y_{12} \\ y_{21}', & y_{22} \end{vmatrix}}{D} y_1 + \frac{\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{11}' \\ y_{21}, & y_{21}' \end{vmatrix}}{D} y_2,$$

$$y_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_{12}', & y_{12} \\ y_{22}', & y_{22} \end{vmatrix}}{D} y_1 + \frac{\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}' \\ y_{21}, & y_{22}' \end{vmatrix}}{D} y_2,$$

kde sú

$$y'_{ik} = \frac{dy_{ik}}{dx}, \quad D = \begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12} \\ y_{21}, & y_{22} \end{vmatrix}.$$

Ak singulárny bod tohto dif. systému je $x = 0$ a chceme, aby riešenia daného dif. systému v tomto bode nemaly bod neurčitosti, tieto riešenia musia byť tohto tvaru

$$\begin{aligned} y_{11} &= x^{r_{11}}\varphi_{11}, \quad y_{12} = x^{r_{12}}\varphi_{12},\\ y_{21} &= x^{r_{21}}\varphi_{21}, \quad y_{22} = x^{r_{22}}\varphi_{22}. \end{aligned} \tag{2}$$

Keď singulárny bod $x = 0$ nie je bodom rozvetvenia, čo tiež predpokladáme, r_{ik} sú konštantné celé čísla a φ_{ik} sú v bode $x = 0$ holomorfné funkcie, ktorých rozvoj v okolí tohto bodu je

$$\varphi_{ik} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{ik}^{(\nu)} x^\nu,$$

kde $c_{ik}^{(\nu)}$ sú konštanty. Ale vtedy koeficienty dif. systému (1) v prípade $r_{11} + r_{22} \leqq r_{21} + r_{12}$ sú

$$a_{11} = \frac{1}{x}\,\psi_{11}(x), \quad a_{21} = x^{r_{21}-r_{22}-1} \,.\, \psi_{21}(x)$$

$$a_{12} = x^{r_{12}-r_{11}-1} \,.\, \psi_{12}(x), \quad a_{22} = \frac{1}{x}\,\psi_{22}(x),$$

kde $\psi_{ik}(x)$ sú holomorfné funkcie v bode $x = 0$.

Keď zas je $r_{11} + r_{22} \geqq r_{21} + r_{12}$, vtedy sú

$$a_{11} = \frac{1}{x}\chi_{11}(x),\quad a_{21} = x^{r_{11}-r_{12}-1} \cdot \chi_{21}(x),$$

$$a_{12} = x^{r_{22}-r_{21}-1} \cdot \chi_{12}(x),\quad a_{22} = \frac{1}{x}\chi_{22}(x).$$

Z tohoto vyplýva, že *koeficienty* a_{11} *a* a_{22} *musia mať pól prvého stupňa. Koeficienty* a_{21} *a* a_{12} *môžu a nemusia mať pól. Keď ho majú, stupeň tohto pólu nie je viazaný, len musí byť konečné celé číslo.* Keď koeficienty a_{ik} majú singulárne body v bodoch $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, vtedy, ak chceme, aby riešenie dif. systému v týchto bodoch nemalo body neurčitosti v prípade $r_{11} + r_{22} \leqq r_{21} + r_{12}$, ak ešte označíme

$$r_{22} - r_{21} + 1 = s_{21},\quad r_{11} - r_{12} + 1 = s_{12},$$

musia byť

$$a_{ik} = \frac{G_{ik}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{ik}}}, \tag{3}$$

kde pri $i = k$ sú $s_{ik} = 1$ a pri $i \neq k$ obecne sú $s_{ik} \neq 1$, ale sú celé čísla a môžu mať aj hodnotu nulu. Ďalej je

$$\varphi(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \ldots (x - a_\sigma)$$

a $G_{ik}(x)$ sú racionálne alebo transcendentné funkcie celistvé, preto dif. systém môže mať ešte bod neurčitosti v bode $x = \infty$. Keď chceme preskúmať aj tento prípad, položme $x = \frac{1}{\xi}$ a hľadajme, kedy nie je bodom neurčitosti bod $\xi = 0$. Tento bod nie je bodom neurčitosti, ak dif. systém je tvaru

$$\frac{dy_1}{d\xi} = y_1 \frac{1}{\xi} A_{11}(\xi) + y_2 \frac{1}{\xi^{s_{21}}} A_{21}(\xi)$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} = y_1 \frac{1}{\xi^{s_{12}}} A_{12}(\xi) + y_2 \frac{1}{\xi} A_{22}(\xi),$$

kde koeficienty $A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{12}$ sú v bode $\xi = 0$ holomorfné funkcie. Ale dif. systém (1) pri substitúcii $x = \frac{1}{\xi}$ prejde do tvaru

$$\frac{dy_1}{d\xi} = -y_1 \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{\xi} a_{11}\left(\frac{1}{\xi}\right) - y_2 \frac{1}{\xi^{s_{21}}} \cdot \xi^{s_{21}-2}\, a_{21}\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} = -y_1 \frac{1}{\xi^{s_{12}}} \cdot \xi^{s_{12}-2}\, a_{12}\left(\frac{1}{\xi}\right) - y_2 \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{\xi} a_{22}\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Z porovnania koeficientov týchto dif. systémov vyplýva, že bod $\xi = 0$ nie je bodom neurčitosti, ak sú

$$a_{11}\left(\frac{1}{\xi}\right) = - A_{11}(\xi)\,.\,\xi,\quad a_{21}\left(\frac{1}{\xi}\right) = - A_{21}(\xi)\,.\,\xi^{2-s_{21}},$$

$$a_{12}\left(\frac{1}{\xi}\right) = - A_{12}(\xi)\,.\,\xi^{2-s_{12}},\quad a_{22}\left(\frac{1}{\xi}\right) = - A_{22}(\xi)\,.\,\xi.$$

Z týchto však vidíme, že koeficienty a_{11} a a_{22} majú pri $\xi = 0$ t. j. pri $x = \infty$ nulový bod prvého stupňa, ale vtedy zas z tvaru koeficientov (3) plynie, že je to len tak možné, keď $G_{11}(x)$ a $G_{22}(x)$ *sú racionálne funkcie celistvé najviac* (σ — 1)*-ho stupňa.*

Koeficient $a_{21}(x) = a_{21}\left(\frac{1}{\xi}\right)$ *pri* $\xi = 0$, *t. j. pri* $x = \infty$, *má nulový bod* ($2 - s_{21}$)*-ho stupňa.* To však požaduje, že *funkcia* $G_{21}(x)$ *musí byť racionálnou funkciou celistvou najviac* $(\sigma + 1)\,.\,s_{21} - 2 = p_1$*-ho stupňa.*

Práve tak dostaneme, že *funkcia* $G_{12}(x)$ *musí byť racionálnou funkciou celistvou najviac* $(\sigma + 1)\,.\,s_{12} - 2 = q_1$*-ho stupňa.*

Dif. systém (1) dá sa previesť na dve dif. rovnice druhého rádu a to:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \left[a_{11} + a_{22} - \frac{a_{21}'}{a_{21}}\right].\frac{dy_1}{dx} +$$

$$+ \left[a_{11}' - a_{12}\,.\,a_{21} - a_{11}\left(\frac{a_{21}'}{a_{21}} - a_{22}\right)\right] y_1 = 0$$

a pre y_2 máme práve takúto dif. rovnicu, len indexy 1 a 2 sa zamenia, kde sú

$$\frac{da_{ik}}{dx} = a_{ik}'.$$

U dif. systému s nutnými podmienkami pre body určitosti koeficienty sú

$$a_{11} = -\frac{G_{11}(x)}{\varphi(x)},\quad a_{21} = -\frac{G_{21}(x)}{[\varphi(x)]^{s_{21}}},\ \text{atď.}$$

$$\frac{a_{21}'}{a_{21}} = \frac{G_{21}'(x)}{G_{21}(x)} - \frac{s_{21}\,.\,\varphi'(x)}{\varphi(x)},\quad a_{11}' = -\frac{G_{11}'(x)}{\varphi(x)} +$$

$$+ G_{11}(x)\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2},\quad G_{ik}' = \frac{dG_{ik}}{dx}.$$

Koeficienty pri y_1 *len vtedy hovejú Fuchsovej podmienke, ak je*

$$s_{21} + s_{12} = 2,$$

t. j. diferenciálny systém s určenými nutnými podmienkami len v takomto prípade dá sa previesť na dif. rovnice Fuchsovho typu.

2.

Nutné podmienky sú aj postačujúce.

Ukážeme, že označené nutné podmienky aj stačia na to, aby sme mohli určiť riešenia dif. systému (1). Vezmime, že chceme určiť riešenia patriace k singulárnemu bodu $x = a_1$.

Normálny tvar dif. systému vzhľadom na tento sing. bod je

$$(x - a_1)P_{01}(x)\frac{dy_1}{dx} = y_1P_{11}(x) + y_2G_{21}(x),$$

$$(x - a_1)P_{02}(x)\frac{dy_2}{dx} = y_1G_{12}(x) + y_2P_{22}(x), \tag{4}$$

kde sú

$$P_{01} = \frac{[\varphi(x)]^{s_{21}}}{x - a_1}, \quad P_{11} = [\varphi(x)]^{s_{21}-1} . G_{11}(x),$$

$$P_{02} = \frac{[\varphi(x)^{s_{12}}}{x - a_1}, \quad P_{22} = [\varphi(x)^{s_{12}-1} . G_{22}(x).$$

Funkcie P_{01} a P_{11} sú racionálne funkcie celistvé najviac $(\sigma s_{21} - 1) = p$-ho stupňa a funkcie P_{02} a P_{22} sú tiež racionálne funkcie celistvé najviac $(\sigma s_{12} - 1) = q$-ho stupňa. Stupeň funkcie G_{21} a G_{12} bol už určený. Rozvoje týchto funkcií v okolí bodu $x = a_1$ sú

$$P_{01} = \sum_{\lambda=0}^{p} b_{0\lambda}(x - a_1)^\lambda, \quad P_{11} = \sum_{\lambda=0}^{p} b_{1\lambda}(x - a_1)^\lambda, \quad G_{21} = \sum_{\lambda=0}^{p_1} b_{2\lambda}(x - a_1)^\lambda,$$

$$P_{02} = \sum_{\mu=0}^{q} g_{0\mu}(x - a_1)^\mu, \quad P_{22} = \sum_{\mu=0}^{q} g_{1\mu}(x - a_1)^\mu, \quad G_{12} = \sum_{\mu=0}^{q_1} g_{2\mu}(x - a_1)^\mu.$$

Ak sing. bod $x = a_1$ nie je bodom neurčitosti riešenia, vtedy sú

$$y_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_1^{(\nu)}(x - a_1)^{r_1+\nu}, \quad y_2 = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_2^{(\varkappa)}(x - a_1)^{r_2+\varkappa}.$$

Keď tieto položíme do dif. systému (4), potom dostaneme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{p}[(r_1 + \nu)b_{0\lambda} - b_{1\lambda}] .$$

$$. c_1^{(\nu)}(x - a_1)^{\nu+\lambda} . \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{q}[(r_2 + \varkappa)g_{0\mu} - g_{1\mu}]c_2^{(\varkappa)}(x - a_1)^{\varkappa+\mu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{q} g_{2\mu}c_1^{(\nu)}(x - a_1)^{\nu+\mu} . \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{p_1} b_{2\lambda}c_2^{(\varkappa)}(x - a_1)^{\varkappa+\lambda}. \tag{5}$$

Položme

$$[(r_1 + \nu)b_{0\lambda} - b_{1\lambda}]c_1^{(\nu)} = A_{\nu\lambda}, \quad g_{2\mu}c_1^{(\nu)} = A^*_{\nu\mu},$$

$$[(r_2 + \varkappa)g_{0\mu} - g_{1\mu}]c_2^{(\varkappa)} = B_{\varkappa\mu}, \quad b_{2\lambda}c_2^{(\varkappa)} = B^*_{\varkappa\lambda}, \tag{6}$$

a tak dostavšiu rovnicu usporiadajme podľa mocnín $x - a_1$. Obecný koeficient, násobený mocninou $(x - a_1)^\sigma$, kde $\sigma = \nu + \lambda + \varkappa + \mu$, na ľavej strane je

$$C_\sigma = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-\varkappa} A_{i,\,\varkappa-i}\, B_{j,\,\sigma-\varkappa-j}.$$

Práve tak obecný člen, násobený mocninou $(x - a_1)^\sigma$, na pravej strane je

$$C_\sigma^* = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-\varkappa} A_{i,\,\varkappa-i}^*\, B_{j,\,\sigma-\varkappa-j}^*.$$

Po tomto rovnica (5) prejde do tvaru

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} f_\sigma \cdot (x - a_1)^\sigma \equiv 0.$$

Z toho však vyplýva, že je

$$f_\sigma = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-\varkappa} [A_{i,\,\varkappa-i} B_{j,\,\sigma-\varkappa-j} - A_{i,\,\varkappa-i}^* B_{j,\,\sigma-\varkappa-j}^*] = 0, \qquad (7)$$

$$\sigma = 0, 1, 2, \ldots$$

Pri $\sigma = 0$, ak delíme $c_1^{(0)} c_2^{(0)}$, kde $c_1^{(0)}$ a $c_2^{(0)}$ nie sú nula, máme

$$\frac{1}{c_1^{(0)} c_2^{(0)}} f_0 = (r_1 b_{00} - b_{10}) \cdot (r_2 g_{00} - g_{10}) - g_{20} b_{20} = 0.$$

Pritom je

$$r_2 - r_1 + 1 = s_{21},\; r_1 - r_2 = s_{12}.$$

Z týchto rovníc pre r_1 a r_2 dostaneme kvadratické rovnice

$$\begin{aligned} r_1^2 b_{00} g_{00} - r_1[-(s_{21} - 1) b_{00} g_{00} + b_{00} g_{10} + g_{00} b_{10}] - (s_{21} - 1) g_{00} b_{10} + \\ + b_{10} g_{10} - b_{20} g_{20} = 0, \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} r_2^2 b_{00} g_{00} - r_2[-(s_{12} - 1) b_{00} g_{00} + b_{00} g_{10} + g_{00} b_{10}] - (s_{12} - 1) b_{00} g_{10} + \\ + b_{10} g_{10} - b_{20} g_{20} = 0. \end{aligned}$$

Tieto dve rovnice sú *determinujúce rovnice*, patriace k sing. bodu $x = a_1$. Ak položíme

$$(r_1 + i) b_{0,\,\varkappa-i} - b_{1,\,\varkappa-i} = d_{i,\,\varkappa-i}$$
$$(r_2 + j) g_{0,\,\sigma-\varkappa-j} - g_{1,\,\sigma-\varkappa-j} = h_{j,\,\sigma-\varkappa-j},$$

potom sú

$$A_{i,\,\varkappa-i} = d_{i,\varkappa-i} c_1^{(i)},\quad B_{j,\,\sigma-\varkappa-j} = h_{j,\,\sigma-\varkappa-j} c_2^{(j)},$$
$$A_{i,\varkappa-i}^* = g_{2,\,\varkappa-i} c_1^{(i)},\quad B_{j,\,\sigma-\varkappa-j}^* = b_{2,\,\sigma-\varkappa-j} c_2^{(j)}$$

a vtedy, ak ešte položíme

$$d_{i,\,\varkappa-i} h_{j,\,\sigma-\varkappa-j} - g_{2,\,\varkappa-i} \cdot b_{2,\,\sigma-\varkappa-j} = G_{\varkappa-i,\sigma-\varkappa-j}^{(i,j)},$$

je

$$f_\sigma = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-\varkappa} G^{(i,j)}_{\varkappa-i,\, \sigma-\varkappa-j} \cdot c_1^{(i)} c_2^{(j)} = 0, \tag{9}$$
$$\sigma = 1, 2, 3, \ldots$$

Tieto rovnice dávajú *rekurentné vzorce* pre výpočet $c_1^{(i)}$ a $c_2^{(j)}$. Keďže pre r_1 dostávame dve hodnoty r_{11} a r_{21} a pre r_2 tiež dve hodnoty r_{12} a r_{22}, preto aj $c_1^{(i)}$ nadobudne dvoch hodnôt $c_{21}^{(i)}$ a $c_{11}^{(i)}$ a pre $c_2^{(j)}$ dostaneme tiež dve hodnoty a to $c_{12}^{(j)}$ a $c_{22}^{(j)}$. Takto môžeme vypočítať fundamentálny systém daného dif. systému pri určených nutných podmienkach a týmto sa stávajú nutné podmienky i postačujúcimi.

Pre koeficienty $c_1^{(\sigma)}$, $c_2^{(\sigma)}$ dostaneme dva lineárne systémy, každý o dvoch rovniciach a to

$$\left.\begin{array}{l} f_\sigma^{(11)} = [f_\sigma]_{\substack{r_1 = r_{11} \\ r_2 = r_{12}}} = 0 \\ f_\sigma^{(21)} = [f_\sigma]_{\substack{r_1 = r_{21} \\ r_2 = r_{12}}} = 0 \end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l} f_\sigma^{(12)} = [f_\sigma]_{\substack{r_1 = r_{11} \\ r_2 = r_{22}}} = 0. \\ f_\sigma^{(22)} = [f_\sigma]_{\substack{r_1 = r_{21} \\ r_2 = r_{22}}} = 0. \end{array}\right\}$$

Determinanty týchto systémov sú

$$D_{1\sigma} = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{21} \\ A_{12}, & A_{22} \end{vmatrix},$$

kde sú

$$\begin{aligned} A_{11} &= [(r_{11} + \sigma)b_{00} - b_{10}](r_{12}g_{00} - g_{10}) - g_{20}b_{20}, \\ A_{21} &= (r_{11}b_{00} - b_{10})[(r_{12} + \sigma)g_{00} - g_{10}] - g_{20}b_{20}, \\ A_{12} &= [(r_{21} + \sigma)b_{00} - b_{10}](r_{12}g_{00} - g_{10}) - g_{20}b_{20}, \\ A_{22} &= (r_{21}b_{00} - b_{10})[(r_{12} + \sigma)g_{00} - g_{10}] - g_{20}b_{20} \end{aligned}$$

a v determinante $D_{2\sigma}$ príde len r_{22} na miesto r_{12}.

Koeficienty $c_{11}^{(\sigma)}$, $c_{12}^{(\sigma)}$, $c_{21}^{(\sigma)}$, $c_{22}^{(\sigma)}$ vieme určiť pokiaľ sú $D_{1\sigma} \neq 0$ $D_{2\sigma} \neq 0$.

Ak sú $r_{21} + G = r_{11}$ a $r_{22} + G = r_{12}$, vtedy je $D_{2\sigma} = 0$. V tomto prípade teda, *t. j. keď korene determinujúcich rovníc líšia sa v celých kladných číslach, môžeme určiť len jednu dvojicu koeficientov* $c_1^{(\sigma)}$ *a* $c_2^{(\sigma)}$.

Keď diskriminanty determinujúcich rovníc sú nula, vtedy pre koeficienty $c_1^{(\sigma)}$ a $c_2^{(\sigma)}$ je len jedna rovnica, a dif. systém dá sa previesť na Fuchsovu dif. rovnicu druhého rádu.

3.

Rady, hoviace diferenciálnemu systému o bodoch určitosti, majú obor konvergenčnosti.

Obecný koeficient jedného takého radu zo systému rovníc

$$[f_\sigma]_{\substack{r_{11} \\ r_{12}}} = 0, \quad [f_\sigma]_{\substack{r_{11} \\ r_{22}}} = 0$$

je

$$c_{11}^{(\sigma)} = -\frac{D_{1\sigma}^{(1)}}{D_{1\sigma}} c_1^{(0)},$$

kde sú

$$D_{1\sigma} = \begin{vmatrix} B_{11}, B_{21} \\ B_{12}, B_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= [(r_{11} + \sigma)b_{00} - b_{10}](r_{12}g_{00} - g_{10}) - g_{20}b_{20}, \\ B_{21} &= (r_{11}b_{00} - b_{10})[(r_{12} + \sigma)g_{00} - g_{10}] - g_{20}b_{20}, \\ B_{12} &= [(r_{11} + \sigma)b_{00} - b_{10}](r_{22}g_{00} - g_{10}) - g_{20}b_{20}, \\ B_{22} &= (r_{11}b_{00} - b_{10})[(r_{22} + \sigma)g_{00} - g_{10}] - g_{20}b_{20}, \end{aligned}$$

$$D_{1\sigma}^{(1)} = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-\varkappa} \begin{vmatrix} [G_{\varkappa-i,\sigma-1-\varkappa-j}^{(i,j)}]r_{11}, & [G_{00}^{(0,\sigma)}]r_{11} \\ r_{12} & r_{12} \\ [G_{\varkappa-i,\sigma-1-\varkappa-j}^{(i,j)}]r_{11}, & [G_{00}^{(0,\sigma)}]r_{11} \\ r_{22} & r_{22} \end{vmatrix} \cdot c_{11}^{(i)} c_{12}^{(j)},$$

$$i, j \neq G.$$

Je

$$|c_{11}^{(\sigma)}| \leq \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-\varkappa} \left| \frac{\begin{vmatrix} [G_{\varkappa-i,\sigma-1-\varkappa-j}^{(i,j)}]r_{11}, & [G_{00}^{(0,\sigma)}]r_{11} \\ r_{12} & r_{12} \\ [G_{\varkappa-i,\sigma-1-\varkappa-j}^{(i,j)}]r_{11}, & [G_{00}^{(0,\sigma)}]r_{11} \\ r_{22} & r_{22} \end{vmatrix} \cdot c_{11}^{(i)} c_{12}^{(j)}}{D_{1\sigma}} \right| |c_1^{(0)}|$$

$$i, j \neq G.$$

Funkcie P_{01}, P_{11}, G_{21}, P_{02}, P_{22} a G_{12} sú racionálne funkcie celistvé. Maximálnu hodnotu koeficientov $b_{0\lambda}$, $b_{1\lambda}$, ... označme M a ich minimálnu hodnotu zas m. Maximálnu hodnotu koeficientov $g_{0\mu}$, $g_{1\mu}$, ... označme Q a ich minimálnu hodnotu zas q. Vtedy je

$$|c_{11}^{(\sigma)}| < \left(\frac{MQ}{mq}\right)^2 \sum_{\varkappa=0}^{\sigma-1} \sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-1-\varkappa} \left| \frac{(r_{11}-1)(r_{12}-1+i)(\sigma-j)-i}{[(r_{22}-1)(r_{22}-1+\sigma)-1]\sigma} c_{11}^{(i)} c_{12}^{(j)} \right| \cdot |c_1^{(0)}|.$$

Počínajúc od určitej a konečnej hodnoty $\sigma = \varrho$ na hore je

$$\left(\frac{mq}{MQ}\right)^2 \cdot \left| \frac{c_{11}^{(\sigma)}}{c_1^{(0)}} \right| = |C_{11}^{(\sigma)}| < \sum_{\varkappa=0}^{\sigma-1} \sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-1-\varkappa} |c_{11}^{(i)} c_{12}^{(j)}|.$$

Ak položíme

$$\sum_{i=0}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{\sigma-1-\varkappa} |c_{11}^{(i)} c_{12}^{(j)}| = C_{11}^{(\sigma-1-\varkappa)},$$

je

$$|C_{11}^{(\sigma)}| < \sum_{\varkappa=0}^{\sigma-1} C_{11}^{(\sigma-1-\varkappa)}.$$

Pokiaľ je $\sigma \leqq \varrho$, voľme kladné čísla $s_0, s_1, \ldots, s_\varrho$ tak, aby boly

$$C_{11}^{(0)} < s_0,\ C_{11}^{(1)} < s_1, \ldots, C_{11}^{(\varrho)} < s_\varrho$$

a zas, keď je $\sigma > \varrho$, nech sú

$$\beta_\sigma = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma-1} \beta_{\sigma-1-\varkappa},\quad \sigma = \varrho + 1, \varrho + 2, \ldots$$

Pri týchto sú

$$|C_{11}^{(\varrho+1+\nu)}| < \sum_{\varkappa=0}^{\varrho+\nu} C_{11}^{(\varrho-\varkappa+\nu)} < \sum_{\varkappa=0}^{\varrho+\nu} s_{\varrho-\varkappa+\nu} = \beta_{\varrho+1+\nu},\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Pri $\sigma \leqq \varrho$ položme

$$b_0 = s_0,\ b_\sigma = s_\sigma = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma-1} \beta_{\sigma-1-\varkappa}.$$

Ak položíme ešte $x - a_1 = z$, potom je

$$\frac{(1-z)(b_0 + b_1 z + \ldots + b_\varrho z^\varrho)}{1 - 2z} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z^2 + \ldots$$

Rad na pravej strane konverguje, pokiaľ je $|z| < \frac{1}{2}$. Z toho ďalej je

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots = (1 - z - z^2 - \ldots)(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z^2 + \ldots).$$

Z tohto však vyplývajú

$$s_0 = \varepsilon_0,\ s_1 = \varepsilon_1,\ s_2 = \varepsilon_2, \ldots, s_\varrho = \varepsilon_\varrho.$$

Ak zas je $\sigma > \varrho$, sú

$$\varepsilon_{\varrho+1+\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\varrho+\nu} \varepsilon_{\varrho-\varkappa+\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\varrho+\nu} s_{\varrho-\varkappa+\nu} = \beta_{\varrho+1+\nu},\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots;$$

t. j. potenčný rad

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \beta_\sigma z^\sigma,$$

tiež konverguje v obore $|z| < \frac{1}{2}$. Ale vtedy rad

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} C_{11}^{(\sigma)} z^\sigma,$$

tiež konverguje v tomto obore a rad

$$\varphi_{11}(x - a_1) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} c_{11}^{(\sigma)} (x - a_1)^\sigma$$

konverguje v obore

$$|x - a_1| < \frac{1}{2} \left(\frac{MQ}{mq}\right)^2 \cdot |c_1^0|$$

a určí spojitú a deriváciе schopnú funkciu.

Práve tak sa dá dokázať, že rady $\varphi_{21}(x - a_1)$, $\varphi_{12}(x - a_1)$, $\varphi_{22}(x - a_1)$ konvergujú.

Résumé. — Výtah.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système différentiel n'ait pas de points singuliers essentiels.

JUR HRONEC, Bratislava.

Par raisons de simplicité, je traite ce problème pour $n = 2$, et j'arrive au résultat que la condition nécessaire pour qu'un système différentiel de la forme (1) ne possède pas de points singuliers essentiels est celle que dans (3) les $s_{ik} = 1$, si $i = k$, et les s_{jk} soient des entiers arbitraires, si $i \neq k$; $i, k = 1, 2$. Les $G_{ik}(x)$ sont des fonctions rationelles entières quelconques du degré $(\sigma - 1)$, si $i = k$, et du degré $(\sigma + 1)s_{ik} - 2$, si $i \neq k$.

Ces conditions nécesaires posées, on peut déterminer les constantes dans

$$y_{ik} = \sum_{\nu=\delta}^{\infty} c_{ik}^{(\nu)} (x - a_{\varrho})^{r_{ik} + \nu},$$

c'est-à-dire les r_{ik} des équations (8) et les c_{ik} des formules recourantes (9), dans le cas où les racines des équations déterminantes ne diffèrent pas en nombres entiers. Si elles diffèrent en nombres entiers, on n'en peut déterminer qu'un couple de c_{ik}, mais par le procédé de dérivation on peut également trouver l'autre couple de séries satisfaisant au système differéntiel. Toutes ces séries ont leur domaine de convergence, ce que je prouve dans la troisième partie, et ainsi ces séries représentent elles-mêmes une solution du système différentiel (1). Il est prouvé par là en même temps que nos conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

Lorsque la discriminante des équations déterminantes est zéro, notre preuve n'aboutit pas.

En général, tout système de cette sorte peut se réduire aux équations différentielles. Si le système dif. ne posède pas de points sing. essentiels, il en sera de même pour ces équations différentielles. Or, le système différentiel ne se ramène aux équations dif. du type Fuchsien qu'au cas où $s_{12} + s_{21} = 2$. Puisque $s_{12} + s_{21}$ est un entier arbitraire, il peut y avoir des équations qui ne sont pas de type Fuchsien mais qui ne possèdent pas de points singuliers essentiels.

PEVNÉ SINGULÁRNE BODY NELINEÁRNYCH DIF. ROVNÍC.

JUR HRONEC, Bratislava.

Majme dif. rovnicu prvého rádu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1(x, y)}{P_0(x, y)}, \tag{1}$$

kde $P_0(x, y)$ a $P_1(x, y)$ sú analytické funkcie. Body, kde súčasne $P_1(x, y) = 0$, $P_0(x, y) = 0$ sú singulárnymi bodmi dif. rovnice.

Ak zavedieme t ako parameter, dif. rovnicu [1] môžeme písať vo tvare dif. systému

$$\frac{dx}{dt} = P_0(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = P_1(x, y). \tag{2}$$

Tento dif. systém dáva parametrické rovnice integračnej krivky dif. rovnice [1].

Analytické funkcie $P_1(x, y)$ a $P_0(x, y)$ sú

$$P_1(x, y) = ax + by + \varphi(x, y),$$
$$P_0(x, y) = cx + ey + \psi(x, y),$$

kde $a, b, c, e,$ sú konštanty a funkcie $\varphi(x, y)$ a $\psi(x, y)$ sú spojité funkcie v okolí počiatočného bodu $x = 0$, $y = 0$ a obsahujú vyššie mocniny než 1.

Potom dif. rovnica [1] prejde do tvaru

$$\frac{dy}{dx} \cdot \left[c\frac{x}{t} + e \cdot \frac{y}{t} + \frac{|x| + |y|}{t} \cdot \frac{\psi}{|x| + |y|}\right] =$$

$$= \frac{dx}{dt} \cdot \left[a \cdot \frac{x}{t} + b \cdot \frac{y}{t} + \frac{|x| + |y|}{t} \cdot \frac{\varphi}{|x| + |y|}\right]. \tag{2'}$$

Kde sú

$$\varphi(0, 0) = 0, \ \psi(0, 0) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x, y)}{|x| + |y|} = 0, \ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\psi(x, y)}{|x| + |y|} = 0. \tag{3}$$

Keď pri týchto podmienkách sú

$$\lim_{t\to 0} \frac{x(t)}{t} = r, \ \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t} = q, \tag{4}$$

určité a konečné hodnoty, vtedy priebeh kriviek dif. rovnice [1] v okolí jej sing. bodu $x = x(t) = 0$, $y = y(t) = 0$ sa shoduje s priebehom integračných kriviek redukovanej dif. rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ey} \tag{5}$$

a tak stačí,ak skúmame priebeh kriviek dif. rovnice [5] v okolí jej sing. bodu $x = 0$, $y = 0$, kde však je

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & e \end{vmatrix} = ae - bc \neq 0.$$

Integračné krivky, dané parametrickými funkciami $x = x(t)$, $y = y(t)$ dostaneme riešením dif. systému

$$\frac{dx}{dt} = cx + ey,$$

$$\frac{dy}{dt} = ax + by. \tag{6}$$

Charakteristická rovnica tohto dif. systému nemá za koreň nulu. Ak korene charak. rovnice sú r_1 a r_2 obecné riešenie dif. systému je

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\beta_{11}e^{r_1t} + c_2\beta_{12}e^{r_2t} \\ y(t) &= c_1\beta_{21}e^{r_1t} + c_2\beta_{22}e^{r_2t} \end{aligned} \tag{7}$$

kde c_1 a c_2 sú ľubovoľné konštanty a konštanty $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}$ a β_{22} dajú sa určiť pomocou lin. alg. systémov.

Integračné krivky asymptoticky vchádzajú, alebo vychádzajú zo sing. bodov, ak platia rovnice

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0, \ \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0. \tag{8}$$

Priebeh kriviek je zas daný smerom tečien týchto kriviek v asymptotickom okolí sing. bodu. Na základe týchto charakteristík vyskytuje sa šesť rozličných sing. bodov:

1. $(b - c)^2 + 4ae > 0$, $|a| + |e| \neq 0$, $bc - ae > 0$, kde sú $\operatorname{sgn} r_1 \neq \operatorname{sgn} r_2$. Všetky integračné krivky buď asymptoticky vchádzajú do sing. bodu, alebo vychádzajú zo sing. bodu. Tieto majú spoločnú tečnu v asymptotickom okolí pevného sing. bodu. Takýto pevný sing. bod menuje sa *uzlom* a je bodom určitosti.

2. $(b - c)^2 + 4ae > 0$. $|a| + |e| \neq 0$, $bc - ae < 0$, kde $\operatorname{sgn} r_1 \neq \operatorname{sgn} r_2$. Tu sa splnia rovnice [8] len vtedy, ak je buď $c_2 = 0$, alebo $c_1 = 0$, t. j. len integračné krivky partikulárneho riešenia asymptoticky vchádzajú do sing. bodu a z neho asymptoticky vychádzajú. Tieto krivky však v asymptotickom okolí sing. bodu prechádzajú do priamok. Medzi týmito prebiehajú obecné integračné krivky. Tieto však asymptoticky neprechádzajú sing. bodom. Dve integračné krivky, ktoré sa dotýkajú určených tečien part. riešenia vytvárajú dvojité sedlo a pevný sing. bod menuje sa *sedlovým* bodom.

3. $(b - c)^2 + 4ae < 0$, $|a| + |e| \neq 0$, $b = -c$, vtedy sú $r_1 = \beta i$, $r_2 = -\beta i$, $i = \sqrt{-1}$. Integračné krivky sú uzavreté a to elipsy a obiehajú okolo sing. bodu. Nemajú určitej tečny v asymptotickom okolí sing. bodu a sing. bod menuje sa bodom *krútňavy*.

4. $(b - c)^2 + 4ae < 0$, $|a| + |e| \neq 0$, $b \neq -c$, vtedy sú

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} . G_1 . \cos(g_1 + \beta t) \\ y(t) &= e^{\alpha t} . G_2 . \sin(g_2 + \beta t). \end{aligned}$$

Integračné krivky uzavreno špirálove asymptoticky vchádzajú a vychádzajú zo sing. bodu a v asymptotickom okolí sing. bodu nemajú určitej tečny. Takýto pevný sing. bod je *zánikovým*, alebo *žriedlovým* bodom *točiaceho* sa *víru*.

5. $(b - c)^2 + 4ae = 0$, $|a| + |e| \neq 0$, $b \neq c$, vtedy sú $r_1 = r_2 = \frac{b + c}{2}$. Všetky integračné krivky asymptoticky buď vchádzajú do sing. bodu, alebo vychádzajú z neho a tieto všetky v asymptotickom okolí sing. bodu majú jedinú tečnu. Sing. bod je *uzlom* a je bodom určitosti.

6. $(b - c)^2 + 4ae = 0$, $a = e = 0$, $b = c$, a je $r_1 = r_2 = b$. Integračne čiary asymptoticky buď vchádzajú do sing. bodu, alebo vychádzajú z neho a sú priamky, ktoré nemajú určitej tečny v asymptotickom okolí sing. bodu. Takýto pevný sing. bod je *zánikovým*, alebo *žriedlovým* bodom *jednoduchého priamkového víru*.

*

Résumé. — Výtah.

Les points singuliers fixes des équations différentielles non linéaires.

JUR HRONEC, Bratislava.

Dans l'équation différentielle (1) $P_1(x, y)$ et $P_0(x, y)$ sont des fonctions analytiques et les points singuliers se trouvent là où $P_1(x, y) = 0$, $P_0(x, y) = 0$. Les conditions (3) et (4) étant satisfaites, l'équation différentielle (1) devient (5), respectivement le système (6) dont la solution est donnée par (7). Les courbes intégrales atteignent assymptotiquement le point singulier, en y entrant ou en sortant, si les équations (8) sont satisfaites. En même temps, ces courbes intégrales peuvent avoir, dans le voisinage assymptotique du point singulier, une tangente déterminée ou non, et d'après cela nous classons ces points singuliers. Il y a six cas à distinguer. 1° Toutes les courbes intégrales possèdent dans le voisinage assymptotique du point singulier une tangente commune. Le point singulier est un noeud. 2° Les courbes intégrales de la solution générale n'entrent pas dans le voisinage assymptotique du point singulier. Le point est un col. 3° Le point singulier est un centre. 4° Le point singulier est un foyer autour duquel les courbes intégrales s'enroulent en y tendant ou en s'en éloignant. 5° Le point sing. est un noeud. 6° Par le point singulier passent les droites dans toutes les directions.

SUR UNE DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DE SURFACE DANS L'ÉSPACE À N-DIMENSIONS.

VLADIMÍR KNICHAL, Praha.

A paraître dans le Časopis pro pěstování matem. a fys., **76** (1951).

*

Výtah. — Résumé.

O jedné definici plošného integrálu v n-dimensionálním prostoru.

VLADIMÍR KNICHAL, Praha.

Vyjde v Časopisu pro pěstování mat. a fys., **76** (1951).

RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEHO SYSTÉMU HOMOGENNÉHO LINEÁRNEHO O KONŠTANTNYCH KOEFICIENTOCH.

MICHAL KUMOROVITZ, Bratislava.

Vyjde v Annales de la Société Polonaise de Mathématique pravdepodobne v zväzku 1950.

*

Résumé. — Výtah.

Une solution du système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

MICHAL KUMOROVITZ, Bratislava.

A paraître dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique probablement dans le tome 1950.

O PEWNEJ WŁASNOŚCI ZBIORÓW O ŚREDNICY POZASKOŃCZONEJ RÓWNEJ ZERU.*)

ROMAN LEITNER, Kraków.

Niech F oznacza domknięty i ograniczony zbiór punktów płaszczyzny zmiennej zespolonej. Niech

$$\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}, \tag{1}$$

oznacza zbiór n, $n \geqq 2$, punktów leżących na zbiorze F w ten sposób,

*) Annales de Société Polonaise de Mathématique, XXIII (1950).

aby iloczyn ich wzajemnych odległości

$$V(\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} |\eta_j^{(n)} - \eta_k^{(n)}| \tag{2}$$

spełniał warunek

$$V(\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}) = \max_{(F)} V(z_1, \ldots, z_n), \tag{3}$$

tj. był równy maximum funkcji $V(z_1, \ldots, z_n)$, gdy punkty $z_1, \ldots, z_n$ przebiegają zbiór F. Zbiór (1) spełniający (2) i (3) nazwiemy *układem harmonicznym* dla zbioru F. Wiadomo, że ciąg średnich geometrycznych

$$\sqrt[\binom{n}{2}]{V(\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)})} \tag{4}$$

jest zawsze zbieżny, a jego granica $d(F)$ jest zwana *średnicą pozaskończoną* zbioru F. Rozważmy ciąg

$$H_n(z) = \sqrt[n]{|z - \eta_1^{(n)}| \ldots . |z - \eta_n^{(n)}|}, \tag{5}$$

gdzie z jest dowolnym punktem płaszczyzny nie należącym do zbioru F.

Prof. F. Leja wykazał:[1] 1° Jeśli $d(F) > 0$ to ciąg (5) jest zbieżny do granicy skończonej. 2° Jeśli $d(F) = 0$ i zbiór F jest skończony, to ciąg (5) naogół nie jest zbieżny. 3° Jeśli $d(F) = 0$ i zbiór F posiada jeden punkt skupienia, to ciąg (5) jest zbieżny.

Prof. F. Leja postawił pytanie, czy ciąg (5) jest zbieżny, gdy $d(F) = 0$ i gdy zbiór posiada dwa lub więcej punktów skupienia. Autor daje odpowiedź (negatywną) na to pytanie, wykazując następujące

Twierdzenie. *Istnieje zbiór F, ograniczony, domknięty, posiadający dwa punkty skupienia $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, oraz taki, że granica ciągu* (5) *naogół nie istnieje.*

Dla dowodu buduje się zbiór F tak, aby posiadał on między innymi następującą własność: Większość z pośród punktów układu (1) leży w otoczeniupunktu $z_1 = 0$, dla $n = N_{2k}$, zaś w otoczeniu punktu $z_2 = 1$, dla $n = N_{2k+1}$, gdzie N_ν jest pewnym ciągiem wybranym z ciągu liczb naturalnych.

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur une propriété des ensembles à diamètre transfini nul.*)

ROMAN LEITNER, Kraków.

Soit F un ensemble, fermé et borné, de points du plan de la variable complexe z. Soit (1) un ensemble de n points de F, distribués sur F de manière que le produit de toutes leurs distances mutuelles (2) remplisse la condition (3). Nous dirons que les points (1) forment sur F un *groupe*

[1]) Ann. de la Soc. Polonaise de Mathém., XIV (1935), 131—134.

*) Annales de Société Polonaise de Mathématique, XXIII (1950).

harmonique. Il est bien connu que la suite (4) est toujours convergente et que sa limite $d(F)$ est égale au *diamètre transfini* de l'ensemble F.

M. F. LEJA a démontré[1]) que la suite (5) (où z est un point quelconque, mais fixe en déhors de F) 1° tend vers une fonction limite, lorsque $d(F) > 0$; 2° n'est pas convergente, lorsque $d(F) = 0$ et F est composé d'un nombre fini de points; 3° est convergente dans l'hypothèse que l'ensemble F n'a qu'un seul point d'accumulation. Le but de ce travail est de démontrer que cette hypothèse est essentielle.

Théorème. *Il existe un ensemble F borné et fermé, pour lequel $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ sont des points d'accumulation et pour lequel, en général, la limite de la suite* (5) *n'existe pas.*

Pour démontrer ce théorème, on construit l'ensemble F jouissant de la propriété suivante: la plupart des points rentrant dans le groupe (1) pour les valeurs $n = N_{2k}$ sont situés dans le voisinage du point $z_1 = 0$ et la plupart des points rentrant dans le groupe (1) pour $n = N_{2k+1}$ sont situés dans le voisinage du point $z_2 = 1$; N_ν est une suite partielle de la suite de nombres naturels.

PEWNA METODA PRZYBLIŻANIA FUNKCJI RZECZYWISTYCH ZMIENNEJ ZESPOLONEJ.

FRANCISZEK LEJA, Kraków.

1. Niech $f(z)$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennej zespolonej z, określoną i ograniczoną na brzegu B dowolnego obszaru D zawierającego wewnątrz punkt $z = \infty$. Funkcję $f(z)$ nazwijmy *funkcją brzegową* i oznaczmy jej kresy dolny i górny odpowiednio przez m i M

$$m \leq f(z) \leq M.$$

O brzegu B załóżmy, że zawiera nieskończenie wiele punktów, obierzmy na nim przy ustalonym $n = 1, 2, \ldots$ układ $n + 1$ punktów $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, który oznaczmy krócej przez $\zeta^{(n)}$

$$\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \tag{1}$$

i oznaczmy przez $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$, $j = 0, 1, \ldots, n$, wielomian n-go stopnia względem z, który dla $z = \zeta_j$, ma wartość 1, a w pozostałych punktach układu (1) wartość 0.

Niech λ będzie zmiennym parametrem rzeczywistym nieujemnym. Funkcja zmiennej z określona wzorem

$$F(z, \lambda, \zeta^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} |L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})| \, e^{n\lambda f(\zeta_j)} \tag{2}$$

przybiera na całej płaszczyźnie wartości dodatnie i równa się $e^{n\lambda f(z)}$ w punktach układu (1). Wobec tego funkcja

[1]) Ann. de la Soc. Polonaise de Mathém., XIV (1935), 131—134.

$$f(z, \lambda, \zeta^{(n)}) = \log\sqrt[n]{F(z, \lambda, \zeta^{(n)})}$$

równa się $\lambda f(z)$ w punktach układu (1). Zmieniając punkty (1) w zbiorze B oznaczmy przez $f_n(z, \lambda)$ kres dolny

$$f_n(z, \lambda) = \inf_{\zeta^{(n)} \in B}\{f_n(z, \lambda, \zeta^{(n)})\} \text{ dla } n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Otrzymamy pewien ciąg funkcji $\{f_n(z, \lambda)\}$ zmiennej z określonych na całej płaszczyźnie i przybierających wszędzie wartości rzeczywiste.

Funkcje $f_n(z, \lambda)$ zależą od funkcji brzegowej $f(z)$ i od parametru λ i spełniają nierówność

$$f_n(z, \lambda) \leqq \lambda f(z) \text{ dla } z \in B,\ n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Gdy bowiem z_0 jest punktem zbioru B, to układ (1) daje się tak dobrać, by było $f(z_0, \lambda, \zeta^{(n)}) = \lambda f(z_0)$; w tym celu wystarcza obrać jeden z punktów (1) w punkcie z_0. Z drugiej strony na całej płaszczyźnie mamy

$$f_n(z, \lambda) \geqq \lambda \,.\, m \text{ dla } n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

bo na mocy wzoru (2) i nierówności $f(z) \geqq m$ jest

$$F(z, \lambda, \zeta^{(n)}) \geqq e^{n\lambda m} \sum_{j=0}^{n} |L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})| \geqq e^{n\lambda m}.$$

Ciąg (3) posiada następującą własność:

I. *Jeżeli średnica pozaskończona zbioru B jest dodatnia, to dla każdego z i λ istnieje skończona granica*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z, \lambda) = f(z, \lambda), \tag{6}$$

przy czym przy ustalonym λ jest $f(z, \lambda)$ funkcją harmoniczną punktu z na całej płaszczyźnie poza zbiorem B i spełnia na zbiorze B nierówność

$$\lambda m \leqq f(z, \lambda) \leqq \lambda f(z),\ z \in B. \tag{7}$$

Dowód tego twierdzenia jest zawarty implicite w mojej pracy zamieszczonej w ,,Bull. Acad. Polon. des Sc. et des Lettres (Série A), 79—92, 1936.

W przypadku $\lambda = 0$ funkcje (3), a przez to i funkcja graniczna (6) nie zależą od funkcji brzegowej $f(z)$, i wówczas funkcja $f(z, o)$ redukuje się w obszarze D do funkcji Greena tego obszaru z biegunem w nieskończoności.[1])

2. Oznaczmy przez Δ dopełnienie obszaru domkniętego $D + B$ do całej płaszczyzny. Zbiór Δ może być pusty i wówczas zbiór B nie rozcina płaszczyzny. Jeżeli zbiór Δ nie jest pusty, to jako zbiór otwarty jest sumą skończonej lub przeliczalnej ilości obszarów $D_1 + D_2 + \ldots$ i wtedy B rozcina płaszczyznę na obszary $D, D_1, D_2, \ldots$

[1]) Ann. Soc. Polon. de Math., **12** (1934), 57—71.

Załóżmy, że $\lambda > 0$ i niech funkcja brzegowa $f(z)$ będzie stałą na zbiorze B. Wówczas na mocy (7) iloczyn

$$\frac{1}{\lambda} f(z, \lambda) \tag{8}$$

jest stale równy $f(z)$ na zbiorze B, więc dąży na B do granicy $f(z)$, gdy $\lambda \to 0$. Własność ta funkcji granicznych $f(z, \lambda)$ daje się uogólnić w następujący sposób:

II. *Jeżeli funkcja brzegowa $f(z)$ jest ciągła na zbiorze B i zbiór ten nie rozcina płaszczyzny, a więc zbiór Δ jest pusty, to gdy $\lambda \to 0$ iloczyn* (8) *dąży na zbiorze B do granicy $f(z)$*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} f(z, \lambda) = f(z), \quad z \in B, \tag{9}$$

przy czym zbieżność ta jest jednostajna na zbiorze B[2]).

Dowód tego twierdzenia nie jest krótki i będzie podany później.[3]) Opiera się on na następującym twierdzeniu pomocniczym: Każda funkcja $f(z)$ określona i ciągła na dowolnym zbiorze płaskim ograniczonym domkniętym, nie rozcinającym płaszczyzny i nie posiadającym punktów wewnętrznych daje się przybliżać jednostajnie na tym zbiorze przez wielomiany.[4])

3. Załóżmy teraz, że zbiór B rozcina płaszczyznę i że funkcja brzegowa $f(z)$ jest ciągła na tym zbiorze. Wówczas $f(z)$ nie zawsze daje się przybliżać przez wielomiany, nie mniej jednak twierdzenie II można rozszerzyć i na ten przypadek przy pewnych założeniach co do $f(z)$. Można mianowicie wykazać, że:

III. *Jeżeli funkcja brzegowa $f(z)$ ma tę własność, że funkcja $e^{f(z)}$ daje się przybliżać jednostajnie na zbiorze B przez moduły wielomianów, tj. jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian $W(z)$ taki, że*

$$e^{f(z)} - \varepsilon < |W(z)| < e^{f(z)} + \varepsilon, \quad z \in B, \tag{10}$$

to granica (9) *zawsze istnieje i równa się $f(z)$ na zbiorze B, przy czym zbieżność ta jest jednostajna na B.*

Zauważmy, że w rozważanym przypadku zbiór Δ nie jest pusty i jest sumą obszarów jednospójnych $D_1 + D_2 + \ldots$, których łączny brzeg, oznaczmy go przez Γ, jest zawarty w zbiorze B. Na mocy twierdzenia I funkcje (8) są przy każdej ustalonej wartości λ funkcjami harmonicznymi w obszarach Δ. Co więcej, w każdym punkcie zbioru $\Delta + \Gamma$

---

[2]) Poza zbiorem B, a więc w obszarze D, granica (9) istnieje również, lecz wszędzie jest nieskończona.

[3]) W Roczniku Pol. Tow. Matem.

[4]) Wykazał to M. ŁAWRENTIEW (zob. J. L. WALSH, *Interpolation ad Approximation*, New York, 1935, str. 48).

mamy

$$m \leqq \frac{1}{\lambda} f(z, \lambda) \leqq M, \quad z \in \Delta + \Gamma. \tag{11}$$

Istotnie, pierwszą część nierówności (11) otrzymamy z nierówności (5) przez przejście do granicy, gdy $n \to \infty$. By wykazać drugą część nierówności (11), oznaczmy przez

$$\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\} \tag{12}$$

układ $n+1$ punktów zbioru B tak dobrany, by iloczyn wszystkich wzajemnych odległości tych punktów był możliwie największy. Utwórzmy następnie wielomiany Lagrange'a

$$L^{(j)}(z, \eta^{(n)}), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{13}$$

odpowiadające układowi (12), oraz funkcję

$$F(z, \lambda, \eta^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} |L^{(j)}(z, \eta^{(n)})| \, e^{n\lambda f(\eta_j)}.$$

Wielomiany (13) spełniają na zbiorze B nierówność $|L^{(j)}(z, \eta^{(n)})| \leqq 1$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$,[5]) więc na mocy zasady maximum nierówność ta zachodzi w zbiorze $\Delta + \Gamma$. Z drugiej strony mamy $f(\eta_j) \leqq M$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$, więc

$$F(z, \lambda, \eta^{(n)}) \leqq (n+1)\, e^{n\lambda M}, \quad z \in \Delta + \Gamma,$$

skąd na mocy (3)

$$f_n(z, \lambda) \leqq \lambda M + \log \sqrt[n]{n+1}, \quad z \in \Delta + \Gamma.$$

Dzieląc przez λ i przechodząc do granicy otrzymamy nierówność szukaną.

Z nierówności (11) wynika, że funkcje (8) tworzą przy zmiennym λ rodzinę normalną funkcji harmonicznych w zbiorze Δ. Jeżeli funkcja brzegowa $f(z)$ spełnia na brzegu B (a przez to też na brzegu Γ zbioru Δ) warunek (10), to w myśl twierdzenia III, gdy $\lambda \to 0$, rodzina (8) dąży jednostajnie na Γ do funkcji brzegowej $f(z)$. Stąd i z zasady extremum dla funkcji harmonicznych daje się wyprowadzić następujący wniosek:

IV. *Jeżeli funkcja brzegowa $f(z)$ spełnia na brzegu B obszaru D warunek wypowiedziany w twierdzeniu III i zbiór B rozcina płaszczyznę na obszary $D, D_1, D_2, \ldots$, to granica* (9) *istnieje nie tylko na brzegu B lecz i w obszarach $D_1, D_2, \ldots$ i przedstawia w tych obszarach funkcję harmoniczną przybierającą na brzegach dane wartości $f(z)$.*

Gdy więc założenia tego twierdzenia są spełnione, wówczas granica

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} f(z, \lambda)$$

[5]) Bull. Ac. Polon. des Sc. et des Lettres (Série A), 1936, 91.

jest rozwiązaniem problemu Dirichleta równocześnie dla wszystkich obszarów $D_1, D_2, \ldots$, przy danej funkcji brzegowej $f(z)$.

*

Résumé. — Streszczenie.

Une méthode d'approximation des fonctions réelles d'une variable complexe.

FRANCISZEK. LEJA, Kraków.

Soit D un domaine plan quelconque contenant le point $z = \infty$, B la frontière de D, Δ l'ensemble complémentaire à $D + B$ et $f(z)$ une fonction réelle bornée, définie sur B.

Supposons que le diamètre transfini de B soit positif. Désignons par $\zeta^{(n)}$ un système de $n + 1$ points différents $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de B et par $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)}), j = 0, 1, \ldots, n$, le polynome de Lagrange du degré n admettant les valeurs 1 pour $z = \zeta_j$ et 0 en autres points du système $\zeta^{(n)}$. L'expression

$$F(z, \lambda, \zeta^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} |L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})| e^{n\lambda f(\zeta_j)}$$

où λ est un paramètre réel, est égale à $e^{\lambda f(z)}$ aux points du système $\zeta^{(n)}$. En faisant varier les points du système $\zeta^{(n)}$ dans B, désignons par $f_n(z, \lambda)$ la borne inférieure

$$f_n(z, \lambda) = \inf_{\zeta^{(n)} \epsilon B} \{\log \sqrt[n]{F(z, \lambda, \zeta^{(n)})}\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

On démontre les théorèmes suivants:

1° Quels que soient z et λ, il existe la limite

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z, \lambda) = f(z, \lambda)$$

et, pour chaque λ fixe, $f(z, \lambda)$ est une fonction harmonique en dehors de B.

2° Lorsque la fonction donnée $f(z)$ est continue sur B et Δ est vide, il existe la limite

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} f(z, \lambda) \text{ pour } z \epsilon B \qquad (*)$$

égale à $f(z)$.

3° Lorsque Δ n'est pas vide et $e^{f(z)}$ admet dans B une approximation uniforme par les modules des polynomes, la limite (*) existe dans $\Delta + B$ et est égale à la solution du problème de Dirichlet pour le domaine Δ et pour la fonction frontière $f(z)$.

PEWIEN DOWÓD TWIERDZENIA FATOU.*)

STANISŁAW ŁOJASIEWICZ, Kraków.

Podaję dowód twierdzenia Fatou o funkcjach analitycznych i ograniczonych w kole, opierając się na twierdzeniu Lebesgue'a o funkcjach o zmienności ograniczonej oraz na następujących lematach:

1° Niech K oznacza koło $|z| < 1$, C okręg $|\zeta| = 1$ i niech $\zeta_0 \in C$. Jeżeli funkcja $f(z)$ określona w $K + C$ jest analityczna i ograniczona w K, ciągła w $K + C - \{\zeta_0\}$ i ciągła na C, to jest ciągła w $K + C$ (wraz z punktem ζ_0).

2° Niech funkcja $g(z)$ będzie analityczna w obszarze G, ζ_0 punktem brzegowym tego obszaru. Oznaczmy przez $\varrho(z)$ odległość punktu z od brzegu. Jeżeli istnieje skończona granica $\lim\limits_{z\to\zeta_0} g(z)$, to $g'(z) \cdot (z - \zeta_0) \to 0$, gdy $z \to \zeta_0$ w ten sposób, że wyrażenie $\dfrac{|\zeta_0 - z|}{\varrho(z)}$ pozostaje ograniczone.

*

Résumé. — Streszczenie.

Une démonstration du théorème de Fatou*).

STANISŁAW ŁOJASIEWICZ, Kraków.

O ZACHOWANIU SIĘ CAŁEK W OTOCZENIU PUNKTU OSOBLIWEGO.[1])

ZOFIA MIKOŁAJSKA, Kraków.

Przyjmijmy $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $r = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2}$, $(x, Y) = (x, y_1, \ldots, y_n)$ i oznaczmy przez Δ przedział $0 < x \leq a$, przez W-walec złożony z punktów (x, Y), dla których $0 \leq r \leq b$ oraz $x \in \Delta$, przez G-zbiór punktów (x, Y), dla których $x = 0$, $0 < r \leq b$, zaś przez E-zbiór punktów (x, Y) takich, że $x \in \Delta$ i $r = b$.

Zakładamy, że układ równań

$$\frac{dy_i}{dx} = f^i(x, Y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

ma prawą stronę ciągłą w W.

*) S. ŁOJASIEWICZ: *Une démonstration du théorème de Fatou*, Ann. Soc. Pol. Math., **22** (1949), 241—244.

[1]) Wyniki te referował na kongresie prof. WAŻEWSKI w zastępstwie nieobecnej autorki. Praca ukaże się drukiem w Annales de la Société Polonaise de Mathématique.

Niech $h(x, Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f^i(x, Y)$,

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \text{ oraz } Q(x, Y, \eta) = \sum_{i=1}^{n} f^i_{y_j}(x, Y)\eta_i\eta_j.$$

Wprowadźmy następujące założenia:

(Z_1) $\Phi(x) > 0$; $\Phi(x)$ ciągła w Δ; $\int_0^d \frac{1}{\Phi(x)} dx = +\infty$ dla $d > 0$; gdy

$$(x, y) \to C \in G, \text{ to } \lim \inf \left| \frac{h}{r} . \Phi \right| > 0.$$

(Z_2) $h(x, Y) > 0$ w zbiorze E.

(Z_3) $h(x, Y) < 0$ w zbiorze E.

(Z_4) Dla każdych dwu całek $\bar{Y}(x) = (\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x))$, $\bar{\bar{Y}}(x) = (\bar{\bar{y}}_1(x), \ldots, \bar{\bar{y}}_n(x))$ układu (1) wyrażenie $\varrho(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\bar{\bar{y}}_i(x) - \bar{y}_i(x))^2}$ jest malejące.

(Z_5) Forma kwadratowa Q jest półokreślona ujemna, gdy $(x, Y) \in W$.

Nazwijmy *asymptotyczną* każdą całkę układu (1) określoną dla $0 < x \leqq d \leqq a$ i zmierzającą do początku układu przy $x \to 0$.

Przy założeniach (Z_1) i (Z_2) każda całka systemu (1) wychodząca z dowolnego punktu $P \in W$ jest asymptotyczną.

Przy założeniach (Z_1) i (Z_3) istnieje przynajmniej jedna całka asymptotyczna.

Przy założeniach (Z_1), (Z_3) i (Z_4), względnie przy założeniach (Z_1), (Z_3) i (Z_5), istnieje dokładnie jedna całka asymptotyczna.

Twierdzenia te są uogólnieniem pewnych twierdzeń P. HARTMANA i A. WINTNERA[2]) i stanowią odpowiedź na problem postawiony przez profesora T. WAŻEWSKIEGO.

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles au voisinage du point singulier.*)

ZOFIA MIKOŁAJSKA, Kraków.

L'auteur généralise pour un système un théorème de P. HARTMAN et A. WINTNER relatif à une seule équation (American Journal of Mathematics, **68**, 146).

Cette généralisation constitue la réponse à un problème posé par T. WAŻEWSKI.

[2]) P. HARTMAN and A. WINTNER: *On the asymptotic behaviour of the solutions of a non-linear differential equation*, Amer. Journal of Mathematics, **68** (1946), 301—308.

*) A paraître dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique.

LA FONCTION EXPONENTIELLE DANS LE CORPS ALGÉBRIQUE.

JAN G.-MIKUSIŃSKI, Wrocław.

$F(\lambda)$ étant une fonction d'une variable réelle, dont les valeurs appartiennent à un anneau donné A, la derivée $F'(\lambda)$ peut être définie par postulats.[1]) Si A est un corps et si $w \in A$, on peut définir la fonction exponentielle $e^{w\lambda}$ comme la solution $x(\lambda)$ de l'équation différentielle $x'(\lambda) = wx(\lambda)$, telle que $x(0) = 1$; si cette solution existe, elle est unique. Comme une application au *corps des operateurs*[2]), l'auteur a présenté la discussion complète de l'existence de la fonction $e^{s^{\alpha}\lambda}$ *pour les valeurs réelles de x et λ.*

*

Streszczenie. — Résumé.

O funkcji wykładniczej w ciele algebraicznym.

JAN G.-MIKUSIŃSKI, Wrocław.

Funkcję wykładniczą $e^{w\lambda}$ można określić jako rozwiązanie równania różniczkowego $x'(\lambda) = wx(\lambda)$ takie że $x(0) = 1$. Przy pevnych założeniach definicja ta daje się przenieść na dowolne ciała algebraiczne, w których określona jest pochodna. Powyższa definicja ma zastosowania w rachunku operatorów.

O $\mathfrak{L}$-PRIESTOROCH SPOJITÝCH FUNKCIÍ.

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava a JOSEF NOVÁK, Praha.

Vyjde v Matematicko-fyzikálnych zprávach Slovenskej akademie vied a umení, **I**, čís. 1.

*

Résumé. — Výtah.

Sur les espaces ($\mathfrak{L}$) des fonctions continues.

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava et JOSEF NOVÁK, Praha.

A paraître dans les Matematicko-fyzikálne zprávy Slovenskej akademie vied a umení, **I**, N° 1.

---

[1]) J. G.-MIKUSIŃSKI: *Sur l'unicité des solutions de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits*, Ann. Soc. Pol. Math., **22** (1949), 157.

[2]) J. G.-MIKUSIŃSKI: *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica, **II** (1949), 41—70.

MÉTHODES DE SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER. II*)

BÉLA SZ.-NAGY, Szeged (Hongrie).

On sait que pour toute fonction intégrable

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} c_k(x) \quad [c_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx],$$

les sommes de Fejér

$$\sigma_n{}^*(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) c_k(x)$$

tendent vers $f(x)$ en tout point de Lebesgue de $f(x)$, et cela uniformément dans l'intéreur de tout intervalle où $f(x)$ est continue. Les sommes conjuguées

$$\tilde{\sigma}_n{}^*(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\tilde{c}_k(x)[\tilde{c}_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx]$$

tendent presque partout vers la fonction conjuguée

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\to 0}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\, dt,$$

notamment en tout point d'existence de $\tilde{f}(x)$ qui est en même temps un point de Lebesgue de $f(x)$.

Une matrice triangulaire infinie $\Lambda = (\lambda_{nk})$ sera dite de type F resp. de type $\tilde{F}$ si les sommes

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{nk} c_k(x) \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} \tilde{c}_k(x)$$

jouissent des mêmes propriétés que les $\sigma_n{}^*(x)$ resp. $\tilde{\sigma}_n{}^*(x)$.

I. *Pour que Λ soit de type F, il suffit qu'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{nk} = 1 \qquad \text{(A)}$$

pour tout k fixe, et que

$$\sum_{k=0}^{n=1} (n-k)\left(\log \frac{n}{n-k}\right) |\Delta_{nk}^2| < \text{Const.},$$

où

$$\Delta_{nk}^2 = \lambda_{nk} - 2\lambda_{n,\,k+1} + \lambda_{n,\,k+2} \; (\lambda_{n,\,n+1} = 0).$$

II. *Pour que Λ soit de type $\tilde{F}$, il suffit qu'on ait* (A) *et*

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1)\left(\log \frac{n}{k+1}\right)|\Delta_{nk}^2| + \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k)\left(\log \frac{n}{n-k}\right) |\Delta_{nk}^2| < \text{Const.},$$

où ν est le plus grand entier contenu dans $n/2$.

---

*) La première communication a paru dans les Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, **12 B** (1950), 204—210; on la notera par I.

La démonstration du Théorème I a paru dans I, loc. cit. Celle du Théorème II est contenue dans la suite.

§ 1. MATRICES DE TYPE $\tilde{F}$.

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π, intégrable au sens de Lebesgue dans $(0, 2\pi)$, et soit

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) \quad \text{où} \quad c_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

sa série de Fourier.

Il est bien connu[1]) que la fonction ,,conjuguée''

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\to 0}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \, dt$$

existe presque partout et que les sommes de Fejér de la série conjuguée, c'est-à-dire les sommes

$$\tilde{\sigma}_n{}^*(f;\, x) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \tilde{c}_k(x) \quad \text{où} \quad \tilde{c}_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx, \tag{1}$$

tendent vers $\tilde{f}(x)$ presque partout. Il y a convergence notamment en tout point d'existence de $\tilde{f}(x)$ qui est en même temps un point de Lebesgue de $f(x)$ ou du moins tel que

$$\int_0^h |f(x+t) - f(x-t)| \, dt = o(h) \quad \text{pour} \quad h \to 0. \tag{2}$$

Remplaçons les facteurs $\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$ dans (1) par les éléments λ_{nk} d'une matrice triangulaire infinie donnée

$$\Lambda = (\lambda_{nk}) \quad (n = 0, 1, \ldots;\; k = 0, 1, \ldots, n);$$

ces éléments peuvent être des nombres réels ou complexes; $\lambda_{n0} = 1$ pour tout n.

Lorsque les sommes ainsi obtenues

$$\tilde{\sigma}_n(f;\, x) = \sum_{n=1}^{n} \lambda_{nk} \tilde{c}_k(x) \tag{3}$$

jouissent de la même propriété que nous venons de rappeler pour les sommes (1) de Fejér, nous dirons que la matrice Λ est *de type* $\tilde{F}$.

---

[1]) *Cf.* par ex. A. Zygmund: Trigonometrical series, Warszawa-Lwów, 1935, 45—46.

On sait[2]) que toute matrice de CESÀRO d'ordre $r > 0$,

$$A = \left(\frac{A_{n-k}^{(r)}}{A_n^{(r)}}\right) \quad \text{où } A_m^{(r)} = \binom{m+r}{m},$$

est de type $\tilde{F}$.

HILLE et TAMARKIN ont montré[3]) que, plus généralement, toute matrice de NÖRLUND

$$A = \left(\frac{P_{n-k}}{P_n}\right) \tag{4}$$

formée à partir d'une suite $\{p_k\}$ de nombres réels ou complexes en posant

$$P_m = \sum_{k=0}^{m} p_k,$$

est de type $\tilde{F}$, à condition qu'il existe une constante C telle que

$$\left.\begin{array}{lr} \sum_{k=0}^{n} |p_k| & (N_1) \\ n|p_n| & (N_2) \\ \sum_{k=1}^{n} k|p_k - p_{k-1}| & (N_3) \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{|P_k|}{k} & (N_4) \end{array}\right\} < C|P_n|.$$

Ces conditions sont d'ailleurs seulement suffisantes et non pas nécessaires.

Nous établirons la propriété $\tilde{F}$ pour une classe de matrices A, beaucoup plus étendue, et cela en comparant les sommes $\tilde{\sigma}_n$ correspondant à cette matrice avec les sommes $\tilde{\sigma}_n{}^*$ de FEJÉR.

Théorème: *Pour que la matrice $A = (\lambda_{nk})$ soit de type $\tilde{F}$, il suffit qu'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{nk} = 1 \quad \textit{pour toute valeur fixe de } k, \tag{A}$$

et

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(\sum_{i=k+1}^{n} \frac{k+1}{i}\right)|\Delta_{nk}^2| + \sum_{k=\nu}^{n-1}\left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i}\right)|\Delta_{nk}^2| < C \tag{$\tilde{B}$}$$

où

$$\Delta_{nk}^2 = \lambda_{nk} - 2\lambda_{n,k+1} + \lambda_{n,k+2} \quad (\lambda_{n,n+1} = 0)$$

et où ν désigne le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$. Ces conditions posées, la différence

$$\varkappa_n(x) = \tilde{\sigma}_n(f; x) - \tilde{\sigma}_n{}^*(f; x)$$

[2]) *Cf.* par. ex. A. ZYGMUND, loc. cit., pp. 49—50 et 145—146.

[3]) E. HILLE — J. D. TAMARKIN: On the summability of Fourier series. I, Transactions American Math. Society, **34** (1932), 757—783.

des sommes (3) *et* (1) *tend vers* 0 *presque partout, notamment en tout point* x *où* (2) *a lieu. La convergence est uniforme dans l'intérieur de tout intervalle où* $f(x)$ *est continue.*

La condition $(\tilde{\mathrm{B}})$ est d'ailleurs évidemment équivalente à la suivante:

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\left(\log\frac{n}{k+1}\right)|\Delta_{nk}^2|+\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\left(\log\frac{n}{n-k}\right)|\Delta_{nk}^2|<C. \qquad (\tilde{\mathrm{B}}')$$

Dans le cas particulier où la matrice Λ se dérive par la formule

$$\lambda_{nk}=\lambda\left(\frac{k}{n+1}\right)$$

d'une fonction absolument continue $\lambda(u)$ $(0\leqq u\leqq 1)$ et telle que $\lambda(0)=$ $=1$, $\lambda(1)=0$, la condition $(\tilde{\mathrm{B}}')$ se réduit à ce que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u\log\frac{1}{u}\,|d\lambda'(u)|+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-u)\log\frac{1}{1-u}\,|d\lambda'(u)|$$

soit convergente.

Dans le cas des matrices de NÖRLUND (4), nos conditions prennent la forme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-m}}{P_n}=0 \text{ (pour toute valeur fixe de } m) \qquad (\mathrm{A}_N)$$

$$\sum_{m=1}^{n-\nu}\left(\sum_{i=m}^{n}\frac{m}{i}\right)|p_m-p_{m-1}|+$$
$$\sum_{m=n-\nu+1}^{n}\left(\sum_{i=n-m+1}^{n}\frac{n-m+1}{i}\right)|p_m-p_{m-1}|<C\,|P_n|. \qquad (\tilde{\mathrm{B}}_N)$$

Ces conditions sont moins restrictives que celles posées par HILLE et TAMARKIN, (A_N) étant une conséquence de (N_2) et (N_3), et $(\tilde{\mathrm{B}}_N)$ une consequence de (N_3) et (N_4) [cf. I, § 1; on a encore à observer que $\sum_{i=n-m+1}^{n}\frac{n-m+1}{i}<m$].

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

Pour démontrer le théorème, partons de la formule facile à vérifier

$$\varkappa_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}H_n(t)\psi_x(t)\,dt \qquad (5)$$

où

$$\psi_x(t)=f(x+t)-f(x-t)$$

et

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left[\lambda_{nk} - \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\right] \sin kt. \tag{6}$$

Nous montrerons dans le paragraphe suivant que, pour $\delta > 0$,

$$\max_{\delta \leqq t \leqq \pi} |H_n(t)| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{7}$$

et qu'il existe des fonctions décroissantes $H_n^*(t) \geqq 0$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ telles que

$$|H_n(t)| \leqq H_n^*(t), \quad \int_0^\pi H_n^*(t)\, dt < C^*. \tag{8}$$

On déduit de (6) que

$$\pi |\varkappa_n(x)| \leqq \max_{0 \leqq t \leqq \delta} |\psi_x(t)| \cdot \int_0^\delta |H_n(t)|\, dt + \max_{\delta \leqq t \leqq \pi} |H_n(t)| \cdot \int_\delta^\pi |\psi_x(t)|\, dt.$$

Vu que

$$\int_0^\pi |\psi_x(t)|\, dt \leqq \int_0^\pi |f(x+t)|\, dt + \int_0^\pi |f(x-t)|\, dt = \int_{-\pi}^\pi |f(t)|\, dt \tag{9}$$

et que, pour $t \to 0$, $\psi_x(t)$ tend uniformément vers 0 dans l'intérieur de tout intervalle où $f(x)$ est continue, on conclut de (7) et (8) que $\varkappa_n(x)$ tend *uniformément* vers 0 dans l'intérieur de tout tel intervalle.

Pour montrer que $\varkappa_n(x) \to 0$ en tout point x où

$$\Psi_x(h) = \int_0^h |\psi_x(t)|\, dt = o(h) \quad \text{pour } h \to 0,$$

on fait usage aussi des majorantes décroissantes $H_n^*(t)$. Pour un tel x, on a

$$\Psi_x(t) \leqq \varepsilon t \quad \text{dès que } 0 \leqq t \leqq \delta = \delta(\varepsilon),$$

et, en vertu, de (8)

$$\left| \int_0^\delta H_n(t)\psi_x(t)\, dt \right| \leqq \int_0^\delta H_n^*(t)\, |\psi_x(t)|\, dt = [\Psi_x(t) H_n^*(t)]_0^\delta +$$

$$+ \int_0^\delta \Psi_x(t)\, d[-H_n^*(t)] \leqq [\varepsilon t \cdot H\ (t)]_0^\delta + \int_0^\delta \varepsilon t \cdot d[-H_n^*(t)] =$$

$$= \varepsilon \int_0^\delta H_n^*(t)\, dt < C^* \varepsilon.$$

D'autre part, il vient de (7) et (9), que

$$\left| \int_\delta^\pi H_n(t)\psi_x(t)\, dt \right| \leqq \max_{\delta \leqq t \leqq \pi} \left| H_n(t) \right| \cdot \int_0^\pi |\psi t(t)|\, dt < \varepsilon$$

pour n assez élevés. On aura donc, pour ces n,

$$\pi|\varkappa_n(x)| < C^*\varepsilon + \varepsilon,$$

ce qui prouve notre assertion.

§ 3. DÉMONSTRATION DE (7) ET (8).

Il ne reste qu'à démontrer les propriétés (7) et (8) des noyaux $H_n(t)$.

Pour $0 \leqq k < \nu$ on a $n - k > n - \nu \geqq \frac{n}{2}$ et par conséquent

$$\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} < \sum_{i=n-k}^{n} 1 = k+1 < (k+1)\frac{2(n-k)}{n} < 2(k+1) \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Il en résulte que la condition $(\tilde{\mathrm{B}})$ est plus restrictive que la condition

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) |\Delta^2_{nk}| < C \tag{B}$$

que nous avons posée dans I. Or on a montré dans I, § 2, que les conditions (A) et (B) entraînent que

$$|\lambda_{n\nu}| < C_1, \tag{10}$$

$$|\nu\Delta_{n\nu}| < C_2 \quad (\Delta_{nk} = \lambda_{nk} - \lambda_{n,k+1}), \tag{11}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta^2_{nk}| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{12}$$

Posons

$$\lambda'_{nk} = \lambda_{nk} - 1 + \frac{k}{n+1},$$

on peut alors écrire au lieu de (6):

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda'_{nk} \sin kt.$$

Vu que $\lambda'_{n0} = 0$, $\Delta'_{nk} = \lambda'_{nk} - \lambda'_{n,\,k+1} = \Delta_{nk} + \frac{1}{n+1}$ pour $0 \leqq k \leqq n$ et $\Delta'^2_{nk} = \Delta'_{nk} - \Delta'_{n,\,k+1} = \Delta_{nk} - \Delta_{n,\,k+1} = \Delta^2_{nk}$ pour $0 \leqq k \leqq n-1$, on obtient par deux transformations abéliennes:

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} L_{nk}(t) \Delta^2_{nk}$$

où

$$L_{nk}(t) = \frac{k+1}{4\sin^2\frac{t}{2}} \left\{ \frac{\sin(n+1)t}{n+1} - \frac{\sin(k+1)t}{k+1} \right\}. \tag{13}$$

En se servant de la décomposition $k+1 = (n+1) - (n-k)$, on arrive après quelques calculs à l'expression suivante alternative de $(k+1)\{\ldots\}$:

$$\sin(n+1)t\,.\left[1-\cos(n-k)t-\frac{n-k}{n+1}(1-\cos(n+1)t)\right]-$$
$$-\cos(n+1)t\,.\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1}-\frac{\sin(n-k)t}{n-k}\right](n-k).$$

Par conséquent,

$$L_{nk}(t)=\sin(n+1)t\,.\left[M_{n-k-1}(t)-\frac{n-k}{n+1}M_n(t)\right]-$$
$$-\cos(n+1)t\,.\,L_{n,n-k-1}(t) \tag{14}$$

où

$$M_k(t)=\frac{\sin^2(k+1)\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Faisant usage de (13) pour $k<\nu$ et de (14) pour $k\geqq\nu$, et en écrivant pour abréger

$$\Delta_k,\ \Delta_k^2,\ L_k(t)\ \textit{au lieu de}\ \Delta_{nk},\ \Delta_{nk}^2,\ L_{nk}(t),$$

on arrive à la formule définitive suivante:

$$H_n(t)=\sum_{k=0}^{\nu-1}L_k\Delta_k^2-\cos(n+1)t\,.\sum_{k=\nu}^{n-1}L_{n-k-1}\Delta_k^2+\sin(n+1)t$$
$$.\left\{\sum_{k=\nu}^{n-1}M_{n-k-1}\Delta_k^2-M_n\left[\frac{n-\nu+1}{n+1}\Delta_\nu-\frac{1}{n+1}\lambda_\nu\right]\right\}.[4] \tag{15}$$

Les fonctions $|L_k(t)|$ et $|M_k(t)|$ restent évidemment inférieures, dans l'intervalle $\delta\leqq t\leqq\pi$ $(\delta>0)$, à une quantité finie $\omega(\delta)$. Il en résulte que $|H_n(t)|$ y reste inférieure à

$$\omega(\delta)\left\{\sum_{k=0}^{\nu-1}|\Delta_k^2|+2\sum_{k=\nu}^{n-1}|\Delta_k^2|+\frac{n-\nu+1}{n+1}|\Delta_\nu|+\frac{1}{n+1}|\lambda_\nu|\right\}.$$

Grâce à (10), (11) et (12), cela prouve (7).

Passons à la question des majorantes décroissantes.

Puisque

$$\sin^2\frac{t}{2}\geqq\left(\frac{t}{\pi}\right)^2\quad(0\leqq t\leqq\pi), \tag{16}$$

la fonction $M_k(t)$ admet la majorante décroissante

[4]) On a à observer que $\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\Delta_k^2=(n-\nu+1)\Delta_\nu-\lambda_\nu$.

$$M_k^*(t) = \begin{cases} \dfrac{\left[(k+1)\frac{t}{2}\right]^2}{2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} = \dfrac{\pi^2(k+1)^2}{8} & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{k+1}\right) \\ \dfrac{1}{2\left(\frac{t}{\pi}\right)^2} = \dfrac{\pi^2}{2t^2} & \dfrac{2}{k+1} \leqq t \leqq \pi); \end{cases}$$

on a

$$\int_0^{\pi} M_k^*(t)\, dt \leqq C_3(k+1). \tag{17}$$

Envisageons maintenant les fonctions $L_k = L_{nk}$ (cf. (13)). Le module de la fonction entre $\{\ldots\}$ au second membre de (13) admet les majorantes $\frac{2}{(k+1)}$ et $2t \min\{[(k+1)t]^2, 1\} + 2t \min\{[(n+1)t]^2, 1\}$. [5])

Faisant usage aussi de (16), on arrive à une majorante décroissante $L_k^*(t)$ de $|L_k(t)|$: elle est définie dans les intervalles

$$\left(0, \frac{1}{n+1}\right), \quad \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{k+1}\right), \quad \left(\frac{1}{k+1}, \pi\right)$$

respectivement par

$$\frac{\pi^2}{2}\frac{k+1}{n+1}[(n+1)^2 + (k+1)^2], \quad \frac{\pi^2}{2}\frac{k+1}{t}[1 + (k+1)^2 t^2], \quad \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{t^2}.$$

Un calcul direct fournit:

$$\int_0^{\pi} L_k^*(t)\, dt \leqq (k+1)\left(C_4 + C_5 \log \frac{n+1}{k+1}\right) \leqq (k+1)\left(C_4 + C_5 \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i}\right). \tag{18}$$

En vertu de la formule (15), $|H_n(t)|$ admet la majorante décroissante

$$H_n^*(t) = \sum_{k=0}^{\nu-1} L_k^* |\Delta_k^2| + \sum_{k=\nu}^{n-1} L_{n-k-1}^* |\Delta_k^2| + \sum_{k=\nu}^{n-1} M_{n-k-1}^* |\Delta_k^2| + $$
$$+ M_n^* \left(\frac{n-\nu+1}{n+1} |\Delta_\nu| + \frac{1}{n+1} |\lambda_\nu|\right).$$

En se servant de ($\tilde{\mathrm{B}}$), (10), (11), (12), (17) et (18), on conclut sans peine que l'intégrale de $H_n^*(t)$ reste inférieure à une constante indépendante de n.

Cela prouve (8) et achève la démonstration du théorème.

---

[5]) On a notamment

$$0 \leqq 1 - \frac{\sin x}{x} \leqq 2 \min\{x^2, 1\}.$$

Methody sčítání Fourierových řad. II

BÉLA SZ.-NAGY, Szeged.

Je známo, že pro každou funkci, integrace schopnou,

$$f(x) \sim \sum_0^\infty c_k(x) \quad [c_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

FEJÉROVY součty

$$\sigma_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) c_k(x)$$

konvergují k $f(x)$ v každém Lebesguově bodě funkce $f(x)$ a to stejnoměrně uvnitř každého intervalu, v němž je $f(x)$ spojitá. Konjugované součty

$$\tilde{\sigma}_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \tilde{c}_k(x) \quad [\tilde{c}_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx]$$

konvergují skoro všude ke konjugované funkci

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\to 0}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2}\, dt,$$

zejména v každém bodě, kde existuje $\tilde{f}(x)$, který je zároveň Lebesguovým bodem funkce $f(x)$.

O nekonečné trojúhelníkové matici $\Lambda = (\lambda_{nk})$ budeme říkati, že je typu F resp. $\tilde{F}$, jestliže součty

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{nk} c_k(x) \quad \text{nebo} \quad \tilde{\sigma}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} \tilde{c}_k(x)$$

mají tytéž vlastnosti jako $\sigma_n^*(x)$ resp. $\tilde{\sigma}_n^*(x)$.

Věta I. *Aby matice Λ byla typu F, stačí, aby*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{nk} = 1 \tag{A}$$

pro každé pevné k, a aby

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \left(\log \frac{n}{n-k}\right) |\Delta_{nk}^2| < \text{const},$$

kde

$$\Delta_{nk}^2 = \lambda_{nk} - 2\lambda_{n,k+1} + \lambda_{n,k+2} \quad (\lambda_{n,n+1} = 0).$$

Věta II. *Aby matice Λ byla typu $\tilde{F}$, stačí, aby platil vztah* (A) *a*

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\left(\log\frac{n}{k+1}\right)|\Delta_{nk}^2|+\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\left(\log\frac{n}{n-k}\right)|\Delta_{kn}^2| < \text{const},$$

kde ν je největší celé číslo, obsažené v $\frac{n}{2}$.

Důkaz věty I. vyjde v Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, **12 B** (1950), 204-210.

Důkaz věty II. je obsažen v tomto pojednání.

ON THE POINTWISE APPROXIMATION AND THE UNIFORM CONVERGENCE.

MARIA NOSARZEWSKA, Wrocław.

A set A will be called η-dense if in each sphere with the radius η there is at least one point belonging to A.

It will be said, that a sequence $\{f_n(p)\}$ of real functions defined in a Euclidean space *approximates pointwise* a function $f(p)$ if for each $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ there is a natural number N such that for each $n > N$ there exists an η-dense set $A(n)$ such that

$$|f_n(p) - f(p)| < \varepsilon$$

for $p \in A(n)$.

The above notion is more general than any other kind of convergence, in particular than the convergence on a dense set and than the asymptotic convergence. The pointwise approximation without additional hypotheses does not impose any restrictions on the sequence because for each sequence of functions there exists a function which this sequence approximates pointwise. In spite of this in the additional hypothesis that the function approximated is continuous, the pointwise approximation implies for some classes of functions far-reaching consequences, viz. the convergence nearly uniform (i. e. uniform on each compact set).

In the well-known theorem on monotonic functions the hypothesis of convergence may be weakened to the pointwise approximation:

Theorem I. *If a sequence of functions monotonic on an open interval approximates pointwise a continuous function, then it is nearly uniformly convergent to that function.*

When we look for other classes of functions for which weaker convergence implies the nearly uniform convergence it is the convex functions and their generalizations that naturally occur.

Let Φ denote a class of real functions $\varphi(x)$ defined in an open interval $I = (\alpha, \beta)$ and fulfilling the following conditions:

(a) each $\varphi \in \Phi$ is continuous in I;

(b) each two points (x_1, y_1), (x_2, y_2), where $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ lie on the image of one and only one function $\varphi(x) = \varphi(x; x_1, y_1, x_2, y_2)$ belonging to Φ.

A real function $f(x)$ defined in I is called *Φ-convex*[1]) if for any $x_1 < x_2$ belonging to I the inequality $f(x) \leqq \varphi[x; x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)]$ is fulfilled for $x_1 < x < x_2$.

Theorem 2. *If a sequence of real functions defined in an open interval I and Φ-convex fulfils at least one of the following conditions*

(A) *approximates pointwise a continuous function;*

(B) *is convergent on a set dense in I;*

(C) *is convergent asymptotically;*

then the sequence is convergent nearly uniformly.

Theorem 3. *If a sequence of real functions in the open interval I uniformly bounded on a subinterval and having non negative differences of a fixed order $p \geqq 2$, fulfils at least one of the conditions* (A), (B) *and* (C), *then the sequence is convergent nearly uniformly.*

There exist some theorems corresponding to theorems 1 and 2 for the real functions of several variables.

The subharmonic functions have none of the properties considered above: with these functions none of the considered kinds of convergence does imply any other, nor does the pointwise approximations of a continuous functions imply any convergence.

*

Streszczenie. — Summary.

O aproksymacji punktowej i zbieżności jednostajnej.

MARIA NOSARZEWSKA, Wrocław.

W pewnych klasach funkcji (funkcje monotoniczne, funkcje wypukłe, funkcje o p-tych różnicach stałego znaku) różne rodzaje zbieżności (zbieżność asymptotyczna, zbieżność w zbiorze wszędzie gęstym, etc.) pociągają za soba zbieżność niemal jednostajną.

SUR UNE EXTENSION DE LA NOTION DE DÉRIVÉE AU MOYEN DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS.*)

KYRILLE POPOFF, Sofia.

La généralisation de la notion de dérivée a été faite par des voies différentes: LIOUVILLE et RIEMANN en prenant comme point de départ

[1]) E. F. BECKENBACH: Bull. Amer. Math. Soc., **43** (1937), 363—371.

*) La conférence n'a pas été faite, parce que l'auteur était empéché de participer au congrès.

la série de Taylor ont formé, au moyen de la fonction donnée, une autre fonction, contenant un paramètre et coïncidant pour des valeurs entières, positives ou négatives de ce paramètre, avec les dérivées ou les intégrales d'ordre respectif de la fonction donnée. Par ce moyen on arrive à définir aussi des dérivées d'un ordre fractionnaire, correspondant à la valeur fractionnaire du paramètre. Parmi les travaux faits dans cette direction nous voulons citer la belle thèse de A. MARCHAUD ainsi que les travaux de H. WHITNEY.

D'autre part la théorie des ensembles et les travaux de H. LEBESGUE ont déterminé un autre courant où se rangent les travaux fondamentaux de G. BOULIGAND et le memoire de BUSEMANN et FELLER, sur la courbure des surfaces convexes, publié dans les Acta Mathematica.

Dans ce qui suit nous voulons donner une idée de nos résultats sur le même sujet, où nous avons pris comme point de départ la théorie des probabilités, ce qui nous a mené à des généralisations de différente nature, où parfois même la condition de la continuité n'est pas requise. Cette dernière condition n'étant pas nécessaire, la dérivée ainsi généralisée, se prête miex à l'étude des phénomènes où la continuité n'est pas assurée, comme par exemple dans la physique moléculaire et dans les sciences statistiques, où la notion de probabilité s'introduit d'une manière naturelle!

Ici même on peut suivre deux voies différentes: on peut prendre comme point de départ le premier moment ou le second moment. Ici nous voudrons exposer nos résultats au moyen du second moment. Pour montrer la fécondité de notre conception nous en ferons quelques applications à la théorie des courbes gauches et des surfaces. Des théoremes classiques (le théoreme de MEUSNIER, plans nourmaux principaux etc.) comme on le verra peuvent être établis dans des conditions très générales. Enfin on arrive à définir la dérivée des fonctions d'une variable complexe sans que la condition

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Soit vérifiée au point considéré. On obtient ainsi quelques résultats de É. BOREL sur les fonctions monogènes.

Placons nous au point de vu géométrique et considérons la courbe

$$y = f(x).$$

Soit $M[x, f(x)]$ un poin de cette courbe et

$$(\xi - x) \sin\alpha - (\eta - y) \cos\alpha = 0$$

l'équation d'une droite quelconque, passant par M et faisant avec l'axe des x l'angle α. La distance du point $M'[x + u, f(x + u)]$ de la courbe à la droite ci-dessus est donnée par

$$D = u \sin\alpha - f(x \mid u) \cos\alpha, \text{ où } f(x \mid u) = f(x + u) - f(x).$$

La somme

$$S = \int_0^u D^2\, du = \sin^2\alpha \int_0^u u^2\, du - 2 \sin\alpha \cos\alpha \int_0^u u f(x \mid u)\, du +$$
$$+ \cos^2\alpha \int_0^u f(x \mid u)^2\, du$$

est une fonction de α. Les valeurs de $\operatorname{tg}\alpha$, correspondant aux valeurs extrêmes de S, sont données par

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\int_0^u [u^2 - f(x \mid u)^2]\, du}{2\int_0^u u f(x \mid u)\, du} \pm \sqrt{\left[\frac{\int_0^v [u^2 - f(x \mid u)^2]\, du}{2\int_0^u u f(x \mid u)\, du}\right]^2 + 1.}$$

Ces valeurs de $\operatorname{tg}\alpha$ tendent vers des limites bien déterminées, lorsque, pour $u \to 0$, la limite de l'expression sous le radical existe. Cette limite existe toujours, lorsque la fonction $f(x)$ est dérivable au sens classique, et dans ce cas l'on a

$$\lim_{u \to 0} \frac{\int_0^u [u^2 - f(x \mid u)^2]\, du}{\int_0^u u f(x \mid u)\, du} = \frac{1 - f'^2(x)}{f'(x)}, \tag{1}$$

ce qui donne pour la limite du $\operatorname{tg}\alpha$ les valeurs

$$f'(x) \text{ et } -\frac{1}{f'(x)},$$

c'est à dire les coefficients angulaires de la tangente et de la normale de la courbe, au point M.

La dérivation, ainsi généralisée au moyen du second moment S, étant ramenée à l'intégration et au calcul classique des valeurs extrêmes d'une forme quadratique définie, la limite (1) et les droites limites

$$(\xi - x) \sin\alpha - (\eta - y) \cos\alpha = 0$$

correspondantes peuvent exister sans que la dérivée Newtonienne existe. Ici il n'est pas même nécessaire que la fonction $f(x)$ soit continue, la limite existant par exemple lorsqu'on modifie, sur un ensemble de mesure nulle, les valeurs d'une fonction continue et dérivable au sens de Newton.

Ain si la fonction définie par

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x^2} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et par } f(x) = 0 \text{ au point } x = 0$$

admet une derivée au point $x = 0$.

On peut de même traiter la théorie des courbes gauches.

Considérons maintenant le problème suivant:

Déterminer le plan $\xi\alpha + \eta\beta + \xi\gamma = 0$, *passant par le point* $(0, 0, 0)$ *de la courbe gauche*

$$y = f(x), \ z = \varphi(x),$$

pour lequel l'expression

$$S = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x D^2 \, dx}{\int_0^x x^2 \, dx}$$

a une valeur extrême.

Ici la distance D du point $M(x, f(x), \varphi(x))$ au plan cherché a pour expresion

$$D = x\alpha + y\beta + z\gamma, \text{ avec } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

En désignant par A, B, C etc. les limites suivantes, lorsqu'elles existent,

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{3\int_0^x xy \, dx}{x^3}, \quad B = \lim_{x\to 0} \frac{3\int_0^x xz \, dz}{x^3}, \quad C = \lim_{x\to 0} \frac{3\int_0^x yz \, dx}{x^3}, \quad D = \lim_{x\to 0} \frac{3\int_0^x y^2 \, dx}{x^3},$$

$$E = \lim_{x\to 0} \frac{3\int_0^x z^2 \, dx}{x^3},$$

on aura à déterminer les systèmes (α, β, γ) pour lesquels S, qu'on peut mettre sous la forme

$$S = \alpha^2 + \beta^2 D + \gamma^2 E + 2\alpha\beta A + 2\alpha\gamma B + 2\beta\gamma C,$$

obtient ses valeurs extrêmes.

Avant d'aller plus loin faisons une remarque préliminaire: en portant à partir de l'origine sur la normale du plan $\xi\alpha + \eta\beta + \xi\gamma = 0$ la longueur $\overline{OP}$, telle que $\dfrac{1}{\overline{OP}} = \sqrt{S}$, on obtient pour le lieu géométrique du point extrême $P(X, Y, Z)$ de ce vecteur, en posant

$$\alpha = \frac{X}{\overline{OP}}, \ \beta = \frac{Y}{\overline{OP}}, \ \gamma = \frac{Z}{\overline{OP}}$$

la surface suivante

$$I = X^2 + DY^2 + EZ^2 + 2AXY + 2BXZ + 2CYZ.$$

C'est un ellipsoïde, ayant l'origine pour centre. Les valeurs extrêmes de S correspondent ainsi aux axes de l'ellipsoïde ci-dessus. Ces axes déterminent en général trois directions liées à la courbe au point considéré: la tangente, la normale et la binormale. Ces recherches sont intimmement liées aux racines de l'équation

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda, & A, & B \\ A, & D-\lambda, & C \\ B, & C, & E-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on rencontre dans l'étude des quadriques et qui a été étudiée par CAUCHY, KRONECKER, JACOBI et d'autres.

Application à la théorie des surfaces.

Soit $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface, passant par l'origine des axes de coordonnées, et $P = \xi\alpha + \eta\beta + \xi\gamma = 0$, $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$ l'équation d'un plan quelconque passant par l'origine. La distance D du point $[x, y, f(x, y)]$ de la surface à ce plan étant

$$D = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

formons au moyen du second moment l'expression

$$S = \lim \frac{\int\limits_{(R)} D^2\,d\sigma}{\int\limits_{(R)} x^2\,d\sigma} = \alpha^2 + \beta^2 D + \gamma^2 E + 2\alpha\beta A + 2\alpha\gamma B + 2\beta\gamma C,$$

où l'on a mis

$$A = \lim \frac{\int xy\,d\sigma}{\int\limits_{(R)} x^2\,d\sigma},\quad B = \lim \frac{\int xz\,d\sigma}{\int x^2\,d\sigma},\quad C = \lim \frac{\int yz\,d\sigma}{\int x^2\,d\sigma},\quad D = \lim \frac{\int y^2\,d\sigma}{\int x^2\,d\sigma},$$

$$E = \lim \frac{\int z^2\,d\sigma}{\int x^2 d\sigma},$$

les intégrales doubles étant prises dans un domaine régulier (R) du plan des (x, y) autour de l'origine. [C'est-à-dir tel que $\frac{m\,(R)}{m(I)} > p$ (nomre fixe), $m(I)$ étant la mesure du carré contenant le domaine (R).] Cherchons les plans pour lesquels S obtient des valeurs extrêmes.

Il paraît, de prime abord, que les plans limites cherchés ne sont pas indépendants de la manière dont les dimensions du domaine (R) tendent vers zéro. En effet les coefficients A et D, par exemple, sont tout-à-fait indépendants de la surface et dépendent uniquement de la forme du domaine (R). Et pourtant il y a des cas, comme nous allons le voir, où certains de ces plans sont indépendants de la manière dont les dimensions de (R) tendent vers zéro. Cela arrive, par exemple, toujours lorsqu'on peut mettre z sous la forme

$$z = px + qy + \varphi(x, y),$$

ou $\varphi(x, y)$ est de dégré supérieur à un ou diffère d'une telle expression en des points de mesure nulle.

Ici on aura à considérer encore l'expression $\Delta(\lambda)$ avec

$$B = p + qA, \; C = pA + qD, \; E = p^2 + q^2D + 2pqA.$$

Avec ces valeurs A, B, C, D, E, l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ admet une racine simple $\lambda = 0$, indépendante de la forme de (R), et l'on a dans ce cas

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q} = \frac{\gamma}{-1}.$$

On obtient ainsi le plan tangent. En prenant le plan tangent pour le plan des (x, y), on aura $p = q = 0$ et z se réduit à $z = \varphi(xy)$. La valeur de z sur la section normale faisant l'angle ω avec l'axe des x sera donnée par

$$z = \varphi(\varrho \cos\omega, \varrho \sin\omega).$$

Formons le moment

$$S = \int_{-\varrho_1}^{+\varrho_2} z^2 \, d\varrho$$

et cherchons les valeurs de ω correspondant aux valeurs extrêmes de S. On obtient à la limite, en faisant tendre les ϱ vers zéro, les sections principales de la surface. Dans le cas oú z admet des dérivées partielles, au sens classique, du second ondre r, s, t on aura pour déterminer ω la relation bien connue

$$s \cos^2\omega + (t - r) \sin\omega \, . \cos\omega - s \sin^2\omega = 0.$$

Pourtant ces plans peuvent exister dans des cas où ces dérivées n'existent pas.

Théorème de Meusnier.

Avant de nous attaquer au théorème de Meusnier et de sa généralisation je voudrais rappeler un théorème élémentaire de la théorie du cercle pris comme point de départ par Herbert Busemann et Willy Feller dans leur mémoire „Krümmungseigenschaften konvexer Flächen" dans les Acta Mathematica (1936). L'équation du cercle de rayon R, passant par l'origine des coordonnées et tangent à l'axe des x, étant

$$x^2 + y^2 - 2yR = 0,$$

on a pour le rayon du cercle

$$R = \frac{x^2 + y^2}{2y}.$$

D'une manière générale le rayon du cercle, passant par les points $M(x, y)$ et $M(x + \Delta x, y + \Delta y)$ et tangent a la droite $\eta - y = (\xi - x)\operatorname{tg}\alpha$, est donné par

$$R = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2D} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2(\Delta y \cos\alpha - \Delta x \sin\alpha)},$$

où D est la distance du point $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ à la droite ci-dessus.

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe donnée. En supposant l'existence de la dérivée classique $f'(x) = \mathrm{tg}\alpha$, Busemann et Feller déterminent la courbure au point (x, y) comme limite, lorsqu'elle existe, de l'expression

$$\frac{2D}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

pour $\Delta x \to 0$.

Mais on peut déterminer d'emblée la tangente et la courbure de

$$y = f(x)$$

sans se soucier de l'existence de la dérivée de $f(x)$ au sens classique. Pour cela nous menons par le point $M[x, f(x)]$ une droite quelconque (α quelconque)

$$\eta - y = (\xi - x)\,\mathrm{tg}\alpha$$

et nous cherchons à déterminer la valeur de α pour laquelle l'expression

$$S(\alpha) = \frac{4}{u_2 - u_1}, \int_{u_1}^{u_2} \frac{D^2\,\mathrm{d}u}{[u^2 + f(x\,|\,u)^2]^2} \tag{2}$$

devient minimum. Les limites des valeurs correspondantes de α et de $S(\alpha)$, lorsque u_1 et u_2 tendent vers zéro d'une manière indépendante, nous donneront la tangente et le carré de la courbure au point $[x, f(x)]$ de la courbe.

De la condition $\frac{\mathrm{d}S(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ on tire

$$\mathrm{tg}\alpha_{1,2} = \left\{ -\int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 - f(\alpha\,|\,u)^2}{[u^2 + f(x\,|\,u)^2]^2}\,\mathrm{d}u \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left[\int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 - f(x\,|\,u)^2}{[u^2 + f(x\,|\,u)^2]^2}\,\mathrm{d}u\right]^2 + 4\left[\int_{u_1}^{u_2} \frac{uf(x\,|\,u)}{[u^2 + f(x\,|\,u)^2]^2}\,\mathrm{d}u\right]^2}, \right\} : 2\int_{u_1}^{u_2} \frac{uf(x\,|\,u)\,\mathrm{d}u}{[u^2 + f(x\,|\,u)^2]^2}$$

Ces valeurs de $\mathrm{tg}\alpha_1$, et $\mathrm{tg}\alpha_2$ tendent vers des valeurs bien déterminées, lorsque la limite

$$\lim_{\substack{u_1\to 0\\ u_2\to 0}} \frac{\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 - f(x\mid u)^2}{[u^2 + f(x\mid u)^2]^2}\,\mathrm{d}u}{\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{u f(x\mid u)\,\mathrm{d}u}{[u^2 + f(x\mid u)^2]^2}},$$

existe. Elle existe sûrement, lorsque la dérivée classique $f'(x)$ existe. On a dans ce cas

$$\mathrm{tg}\alpha_{1,2} = \begin{cases} f'(x) \\ -\dfrac{1}{f'(x)} \end{cases}$$

En supposant de plus l'existence de la dérivée seconde au sens classique et en prenant

$$\mathrm{tg}\alpha = f'(x)$$

on obtient

$$\lim_{\substack{u_1\to 0\\ u_2\to 0}} S(\alpha) = \frac{f''(x)^2}{[1 + f'(x)^2]^3}.$$

C'est la formule classique donnant le carré de la courbure. Pourtant les limites ci-dessus peuvent exister sans que l'existance des dérivées Newtoniennes $f'(x)$ et $f''(x)$ soit nécessaire. Dans ce cas les formules ci-dessus nous déterminent la tangente et la courbure généralisées au moyen du second moment.

Venons maintenant au théorème de Meusnier et considérons la surface

$$z = f(x, y),$$

passant par l'origine $[f(0, 0) = 0]$. Le plan $y = 0$ détermine sur la surface la section

$$C_0 \equiv z = f(x, 0)$$

et le plan $y = z\ \mathrm{tg}\omega$ détermine la section

$$C_\omega \equiv \eta = \frac{f(x, \eta \sin\omega)}{\cos\omega}.$$

Nous admettons que les sections planes C_0 et $C\omega$ admettent des tangentes généralisées au point $(0, 0, 0)$, que ces tangentes coïncident et que par coséquent elles coïncident avec l'axe des x. L'angle α que font ces deux tangentes avec l'axe des x étant nul, on aura pour le carré de la courbure de la courbe C_0, à l'origine, d'après la formule (2)

$$\frac{1}{R_0^2} = \lim \frac{4}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, o)^2}{[u^2 + f(u, o)^2]^2} du$$

et pour le carré de la courbure de la courbe de C_ω, l'expression

$$\frac{\cos^2\omega}{R_\omega^2} = \lim \frac{4}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, \eta \sin\omega)^2}{\left[u^2 + \frac{f(u, \eta \sin\omega)^2}{\cos^2\omega}\right]^2} du$$

d'où l'on tire

$$R_\omega^2 = R_0^2 \cos^2\omega \lim \frac{\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, o)^2}{[u^2 + f(u, o)^2]^2} du}{\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, \eta \sin\omega)^2}{\left[u^2 + \frac{f(u,\eta \sin\omega)^2}{\cos^2\omega}\right]^2} du.}$$

On voit d'ici que pour que le théorème de MEUSNIER reste en vigueur pour la surface $z = f(x, y)$ il faut que l'on ait

$$\lim \frac{\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, o)^2}{[u^2 + f(u, o)^2]^2} du}{\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, \eta \sin\omega)^2}{\left[u^2 + \frac{f(u, \eta \sin\omega)^2}{\cos^2\omega}\right]^2} du.}$$

Pour toutes les valeurs de ω et dans ce cas C_0 sera une section normale. Cette limite est égale à un lorsque les dérivées partielles premières et secondes existent et l'on a $f_x'(0, 0) = f_y'(0, 0) = 0$. Mais cette limite peut exister et être egale a un dans des cas beaucoup plus généraux.

Pour plus de détails nous renvoyons à nos publications suivantes:

1. Quatre notes dans les C. R. de l'Académie des sciences de Paris, à savoir: **206** (1938), **207** (1938), **209** (1939), **209** (1939).

2. Über die verallgemeinerten Ableitungen, die durch ein Iterationsverfahren gebildet sind, Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften Math.-naturw. Klasse Nr. **2**, (1942).

3. Sur une extension de la notion de dérivée, Monatshefte für Mathematik und Physik, **51** (1944).

Výtah. — Résumé.

O zobecnění pojmu derivace užitím theorie pravděpodobnosti.*)

KYRILLE POPOFF, Sofia.

Jde o zobecnění pojmu derivace, při němž často není třeba spojitosti. Proto se tento zobecněný pojem hodí při studiu těch jevů, kde spojitost není zaručena (molekulární fysika, statistické vědy). Jsou uvedeny některé věty (na př. MEUSNIEROVA věta a j.), jiz při použití zobecněného pojmu derivace platí za podmínek mnohem obecnějších než při užití klasického pojmu.

ABSTRAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $\frac{dY}{dx} = F(x,Y)$ V BANACHOVÝCH PROSTORECH A JEJÍ APLIKACE NA NEKONEČNÉ SYSTÉMY OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC.

VLADIMÍR RICHTER, Brno.

Vyjde ve Spisech vydávaných přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, Brno.

*

Summary. — Výtah.

The Abstract Differential Equation $\frac{dY}{dx} = F(x,Y)$ in Banach Spaces and its Applications on the Infinitze Systems of Ordinary Differential Equations.

VLADIMÍR RICHTER, Brno.

To be published in Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, Brno.

SUR LES SUITES DOUBLES DE FONCTIONS.

WACŁAW SIERPIŃSKI, Warszawa.

A paraître dans Fundamenta Mathematicae, **37** (1950).

*

Streszczenie. — Résumé.

O ciągach podwójnych funkcyj.

WACŁAW SIERPIŃSKI, Warszawa.

Ukaże się w Fundamenta Mathematicae, **37** (1950).

*) Přednáška nebyla přednesena, protože autor se nemohl zúčastniti sjezdu.

ON AN OSCILLATORY PROPERTY OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS.*)

JACEK SZARSKI, Kraków.

We consider a system of ordinary differential equations:

$$\dot{y}^i = f^i(t, y^1, \ldots, y^n), \ (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

The functions $f^i(t, y^1, \ldots, y^n)$ are supposed to be continuous for arbitrary $y^1, \ldots y^n$, and:

$$a < t < b. \tag{2}$$

Let $f^i(t, y^1, \ldots, y^n)$ satisfy the following conditions of monotony.

If

$$y^i \leqq \bar{y}^i, \ (i = 1, \ldots, k) \quad y^i \geqq \bar{y}^i, \ (i = k + 1, \ldots, n), \tag{3}$$

then

$$f^i(t, y^1, \ldots, y^n) \geqq f^i(t, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^n), \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{4}$$

$$f^i(t, y^1, \ldots, y^n) \leqq f^i(t, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^n), \quad (i = k + 1, \ldots, n), \tag{5}$$

where k is a fixed integer satisfying the inequality $0 \leqq k \leqq n$.

Let

$$y^i = y^i(t), \ (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

be a solution path of (1) passing through the point $(t^0, \mathring{y}^1, \ldots, \mathring{y}^n)$ and existing in the interval

$$t^0 \leqq t < b. \tag{7}$$

The well known Piccard's formulae for the successive approximations to the solution (6) are

$$\overset{i}{y}_{\nu+1}(t) = \mathring{y}^i + \int_{t^0}^{t} f^i(t, \overset{1}{y}_\nu(t), \ldots, \overset{n}{y}_\nu(t))\, dt \ (i = 1, \ldots, n; \ \nu = 0, 1 \ldots), \tag{8}$$

where the initial approximation

$$y^i = y_0{}^i(t), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

may be any continuous curve.

We have the following theorem

If for the initial curve (9) *the differences*

$$y_0{}^i(t) - y^i(t), \ (i = 1, \ldots, k) \tag{10}$$

are of the same constant sign in the interval (7), *while the differences*

$$y_0{}^i(t) - y^i(t) \ (i = k + 1, \ldots, n) \tag{11}$$

are of the opposite sign to that of (10), *then the sign* of

$$y_\nu{}^i(t) - y^i(t), \ (i = 1, \ldots, k) \tag{12}$$

*) Annales de la Société Polonaise de Mathématique, XXII, 201—206.

is equal or opposite to that of (10) *and the sign* of

$$y_\nu^i(t) - y^i(t), \quad (i = k+1, \ldots, n) \tag{13}$$

is equal or opposite to that of (11) *in the interval* (7), *according as* ν *be even or odd.*

*

Streszczenie. — Summary.

O oscylacjach kolejnych przybliżeń.

JACEK SZARSKI, Kraków.

Annales de la Société Polonaise de Mathématique, XXII, 201—206.

O PORÓWNYWANIU PRZEBIEGU ASYMPTOTYCZNEGO CAŁEK RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH.

TADEUSZ WAŻEWSKI, Kraków.

Autor wprowadza dwie nierównoważne definicje koincydencji asymptotycznej dwu całek spełniających dwa różne układy równań różniczkowych, oraz podaje wystarczające warunki, aby definicje te były równoważne. Ilustruje te definicje na przykładach. (Szersze streszczenie w Bull. de l'Acad. Pol. d. Sciences et d. Lettres.)

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur une façon de comparer l'allure asymptotique des intégrales de deux systèmes d'équations différentielles.

TADEUSZ WAŻEWSKI, Kraków.

L'auteur introduit la notion de coïncidence asymptotique des intégrales de deux systèmes d'équations différentielles. Il en indique ensuite quelques exemples.

KRÓTKIE DOWODY PEWNYCH LEMATÓW ELEMENTARNYCH Z ZAKRESU ANALIZY.

TADEUSZ WAŻEWSKI, Kraków.

Niechaj $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ będą dwiema całkami równania $y' = f(x, y)$ spełniającego warunek Lipschitza $|f(x, \overline{\overline{y}}) - f(x, \overline{y})| \leq N|\overline{\overline{y}} - y)|$, przyczym $\alpha(a) = \beta(a) = 0$. Kładąc $\psi(x) = \beta(x) - \alpha(x)$, $\lambda(x) = [\psi(x)]^2 e^{-2N(x-\alpha)}$ dostaniemy $|\psi'(x)| \leq N|\psi(x)|$, $\lambda(a) = 0$, $\lambda(x) \geq 0$, $\lambda'(x) \leq 0$ dla $a \leq x < < b$, skąd wynika, że $\lambda(x) \equiv 0$, a więc $\psi(x) = \beta(x) - \alpha(x) \equiv 0$. Fortel oparty na tej zasadzie daje równie szybkie dowody jednotliwości całek dla układów równań różniczkowych (też przy warunku NAGUMY) oraz prowadzi automatycznie do oszacowania odchylenia dwu całek.

*

Résumé. — Streszczenie.

Démonstrations simples de quelques lemmes élémentaires de l'Analyse.

TADEUSZ WAŻEWSKI, Kraków.

L'auteur présente un artifice qui fournit, d'une façon automatique, une démonstration de quelques lemmes élémentaires relatifs à l'unicité et à la limitation des intégrales de systèmes d'équations différentielles.

A paraître probablement dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique.

O PŁASKIM RUCHU CIECZY LEPKIEJ, NIEŚCIŚLIWEJ, OTACZAJĄCEJ ZWYKŁĄ KRZYWĄ ZAMKNIĘTĄ.

WITOLD WOLIBNER, Wrocław.

Rozpatruję płaski ruch cieczy lepkiej, nieściśliwej, wypełniającej całą przestrzeń poza walcem dowolnego kształtu, poruszającym się ruchem prostoliniowym, jednostajnym; ciecz do walca przylega. Zakładając jedynie, że energia kinetyczna ruchu jest skończona (nie zakładając natomiast żadnych warunków w nieskończoności), udowadniam pewien wzór na opór czołowy walca. Gdy dodatkowo założyć, że prędkość i ciśnienie cieczy są ograniczone, ze wzoru tego wynika, że ruch cieczy nie może być trwały względem walca.

Praca ta będzie wydrukowana w Studia Mathematica, XI.

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée.

WITOLD WOLIBNER, Wrocław.

J'envisage le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, remplissant tout l'espace à l'extérieur d'un cylindre qui se meut parallèment à une droite, à vitesse constante; le liquide adhère au cylindre. En admettant seulement que l'énergie cinétique du mouvement est finie, aucune condition dans l'infini n'étant admise, je démontre une formule pour la poussée du cylindre. Si l'on admet de plus que la vitesse et la pression du liquide sont bornées, il résulte de la formule susdite que le mouvement du liquide ne peut pas être permanent par rapport au cylindre.

SUR LES COURBES DONT LA TANGENTE ADMET SUR CHAQUE ARC TOUTES LES DIRECTIONS.*)

ZYGMUNT ZAHORSKI, Łódź.

Je donne la solution du problème de M. J. KRZYŻ concernant les courbes dont la tangente admet sur chaque arc toutes les directions. Je me sers de deux définitions suivantes: 1° L'axe tangent est la limite de l'axe joignant le point fixe au point variable, le sens étant déterminé par le signe de la différence des valeurs du paramètre. 2° La droite tangente est la limite de la droite sécante, lorsque la différence des valeurs du paramètre tend vers 0. L'existence de la droite tangente constitue une condition plus faible que celle qui exige que le contingent (au sens de M. G. BOULIGAND) de l'arc partiel soit situé sur la droite. Le terme „tangente" tout court signifie l'une ou l'autre de ces deux notions, tandis que le terme „direction" de la tangente dans le cas où il s'agit de „l'axe tangent", doit être remplacé par le terme „sens". Je démontre deux théorèmes.

Théorème I. *Si la courbe* (au sens de PEANO-JORDAN) *possède la tangente partou sauf dans un ensemble de points au plus dénombrable, la tangente ne peut prendre sur chaque arc deux différentes directions fixées.*

Théorème II. *Il existe un arc simple rectifiable, dont l'axe tangent admet sur chacun de ses arcs partiels tous les sens.*

Comme il résulte des travaux de M. G. CHOQUET et des miens,[1]) *la courbe rectifiable possède une représentation paramétrique partout dérivable avec les dérivées bornées.* On obtient du théorème I, que l'arc du théorème II possède sur chacun de ses arcs partiels un ensemble de points de puissance du continu, dans lesquels l'axe tangent n'existe pas. Ainsi, *l'ensemble de valeurs du paramètre, pour lesquelles les premières dérivées de toutes les coordonnées s'annulent simultanément, est dense,* ce qui est d'accord avec le résultat de M. Cz. RYLL-NARDZEWSKI. On peut généraliser les théorèmes I et II aux *courbes dans les espaces aux dimensions quelconques finies.* Je démontre le théorème II en me servant de la transformation continue de l'ensemble de CANTOR en segment et de la courbe de PEANO qui remplit le carré. Nous pouvons construire par des moyens analogues un *arc simple dont l'axe sécant admet sur chacun de ses arcs partiels tous les sens* (réponse à une question posée par M. K. BORSUK). J'ai signalé en 1946[2]) sans le démontrer, l'exemple qui

*) Le texte complet de cette communication doit paraître dans „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky".

[1] G. CHOQUET: *Application des propriétés descriptives de la fonction contigent à la théorie des fonctions de varible réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes,* J. Math. Puv. Appl., **26** (1947—1948), 115—226.

Z. ZAHORSKI: О жоргановых кривых облагающих в кажой точке касательной, Mat. Sbornik, **22** (1948), 3—26.

[2]) Z. ZAHORSKI: *Problèmes de la Théorie des ensembles et des fonctions,* C. R. Acad. Sc. Paris, **223** (1946), 451, III c.

est, en un certain sens, contraire. Il s'agit de *l'arc simple possédant partout un axe tangent dont l'indicatrice sphérique* (*différente du point*), *même après la fermeture, est un ensemble* 0-*dimensionel*. La démonstration a été envoyée en 1947 au „Journal of the Chinese Mathematical Society"; je ne sais pas si elle est parvenue à la rédaction de ce journal.

M. KRZYŻ a démontré, en employant certains résultats de MM. A. DENJOY et A. BIELECKI, le théorème suivant: *la courbe en R_3 qui posséde partout une tangente et telle que sur chacun de ses arcs il existe une tangente parallèle à la corde qui joint les extrémités de l'arc et dont l'indicatrice est de dimension moindre que* 2, *est plane*. On peut donner facilement l'exemple d'une *courbe en R_3, qui possède partout une tangente continue et dont l'indicatrice* (*pour chaque arc partiel*) *a la dimension* 2.

*

Streszczenie. — Résumé.

O krzywych, których styczna przyjmuje na każdym łuku wszystkie kierunki.*)

ZYGMUNT ZAHORSKI, Łódź.

Rozwiązuję zagadnienie P. J. KRZYŻA dotyczące istnienia krzywych o własnościach wymienionych w tytule. Przyjmuję dwie definicje: 1) osi stycznej, która jest granicą osi łączącej punkt stały z sąsiednim punktem zmiennym (zwrot osi określony jest przez znak różnicy wartości parametru), 2) prostej stycznej, która jest granicą prostej siecznej-przy różnicy wartości parametru dążącej do 0. Istnienie prostej stycznej jest warunkiem słabszym niż warunek, aby kontyngent (w sensie P. BOULIGAND'A) łuku częściowego leżał na prostej. Termin „styczna" oznacza tu jedno lub drugie z tych pojęć, zaś termin „kierunek", gdy mowa o osi stycznej, powinien być zastąpiony przez termin „zwrot". Udowadniam dwa twierdzenia.

Twierdzenie I. *Jeśli krzywa* (w sensie PEANO-JORDANA) *ma styczną wszędzie za wyjątkiem najwyżej przeliczalnego zbioru punktów, styczna nie może przyjmować na każdym łuku 2 różnych kierunków stałych.*

Twierdzenie II. *Istnieje łuk zwykły prostowalny, którego oś styczna przyjmuje wszystkie zwroty na każdym jego łuku częściowym.*

Jak wynika z prac P. CHOQUET'A i moich, *krzywa prostowalna posiada przedstawienie parametryczne wszędzie różniczkowalne z pochodnymi ograniczonymi*. Z twierdzenia I wynika, że łuk o którym mowa w twierdzeniu II ma na każdym łuku zbiór mocy kontinuum takich punktów, w których oś styczna nie istnieje. *Wobec tego zbiór wartości parametru dla których znikają jednocześnie pierwsze pochodne wszystkich współrzędnych jest gęsty*, co zgadza się z wynikiem P. Cz. RYLL-NARDZEWSKIEGO.

*) Pełny tekst tej pracy ma się ukazać w „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky".

Twierdzenia I i II można uogólnić na przestrzenie o dowolnym wymiarze skończonym $\geqq 2$. Dowodzę tw. II posługując się odwzorowaniem ciągłym zbioru CANTORA na odcinek i krzywą PEANY pokrywającą kwadrat. Przy pomocy analogicznych środków można skonstruować *łuk zwykły, którego oś sieczna przyjmuje wszystkie zwroty na każdym jego łuku częściowym.* (Odpowiedź na pewne pytanie P. K. BORSUKA). Przykład w pewnym sensie przeciwny, mianowicie *łuku zwykłego, mającego wszędzie oś styczną, której indykatrysa sferyczna (różna od punktu) nawet po domknięciu, jest zbiorem 0-wymiarowym,* podałem bez dowodu w r. 1946 w C. R. Acad. Paris. Dowód został wysłany w r. 1947 do „Journal of the Chinese Mathematical Society" i nie wiadomo nawet czy doszedł do redakcji tego czasopisma.

P. KRZYŻ dowiódł, korzystając z pewnych wyników PP. A. DENJOY i A. BIELECKIEGO następującego twierdzenia: *krzywa w R_3, mająca indykatrysę o wymiarze < 2, taka, że styczna istnieje wszędzie, a na każdym jej łuku częściowym styczna przyjmuje kierunek cięciwy łączącej końce tego łuku, jest płaska.* Można łatwo podać przykład *krzywej w R_3, mającej wszędzie styczną ciągłą i której indykatrysa dla każdego łuku częściowego ma wymiar 2.*