Časopis pro pěstování matematiky

Ladislav Rieger

O marxistickém pojetí matematiky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 2, 73--103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/116999

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

*Vydává Ústředí výzkumu a technického rozvoje * Ústřední ústav matematický*

SVAZEK 76 * PRAHA, 15. 9. 1951 * ČÍSLO 2

REFERÁTY A ČLÁNKY

O MARXISTICKÉM POJETÍ MATEMATIKY

LADISLAV RIEGER, Praha.

(Došlo dne 12. dubna 1951.)

Tento článek si nečiní nároku na název vědecké práce. Jde v něm o stručnou a co možno přístupnou formou podanou marxistickou kritiku podstatných bodů idealistického pojímání theoretické matematiky, u nás dosud tak značně rozšířeného, a po positivní stránce ovšem o formulování marxistického stanoviska.

Omezuji se jen na několik základních otázek proto, že důkladnější zpracování thematu tak obšírného a složitého by si vyžádalo celé monografie a kladlo by ovšem značné požadavky znalostí jak odborně matematických tak znalostí v subtilních otázkách matematické logiky a filosofie. Bylo by třeba zpracovat značnou odbornou literaturu, především sovětskou časopiseckou i knižní vědeckou literaturu o marxistickém pojetí matematiky, k čemuž se mi (v době, kdy byl článek psán) nedostávalo jak pramenů, tak času. Uvážíme-li faktickou nepřipravenost naší matematické veřejnosti na jedné straně a okolnost, že živá diskuse o subtilních otázkách marxistického pojetí matematiky v SSSR trvá a není zatím ani relativně uzavřena, je snad opravdu vhodné omezit se na nejzákladnější otázky, jak mně o to šlo. These k marxistickému pojetí matematiky v základních bodech nalézáme přímo u klasiků marxismu, *Marxe, Engelse, Lenina* a *Stalina*. Šlo tedy jen o to, abych co možno věrně tlumočil, vyložil smysl těchto thesí a rozvedl je v polemice s idealistickými názory. Tak bude, doufám, článek přístupný i nematematikům, kteří mají zájem o to, jak se *projevuje marxistický filosofický světový názor v pojetí matematiky.*

1. Proč idealistická filosofie může zdánlivě nalézat oporu v matematice.

Při charakterisaci rozdílu mezi matematikou a t. zv. empirickými vědami se zpravidla uvažuje takto:

V theoretické matematice (to jest v matematice ve vlastním smyslu slova, které nebudu říkat vžitým slovem „čistá" matematika, protože „nečistá" matematika není matematika) na rozdíl od t. zv. empirických přírodních věd neopíráme poučky o pozorování skutečnosti. Matematické poučky dokazujeme výhradně myšlenkovými pochody, resp. pokud jsou to základní poučky, t. zv. axiomy, je prostě přijímáme.

Mezi i velmi obecnými přírodními zákony, jako je třebas NEWTONův zákon všeobecné gravitace, a i velmi konkretní matematickou poučkou, jako je třebas Pythagorova věta, je tento podstatný rozdíl: NEWTONův zákon, byť i vystižen přesnou matematickou formou, je podroben neustálé kontrole pozorováním: považujeme jej za uspokojivé vystižení jistých skutečností potud, pokud pozorování a měření mu neodporují. Naproti tomu žádné měření nemění ničeho na platnosti PYTHAGOROVY věty. Avšak na rozdíl od nejrůznějších filosoficko-metafysických spekulací, které rovněž nejsouce pod kontrolou skutečnosti a praxe, právě tak rychle vznikaly jako zanikaly, matematické myšlení si vysloužilo onu příslovečnou „železnou jistotu", která tak fascinuje laiky, a které nemají ani ty nejlépe vyzkoušené přírodní zákony. — Uvidíme později, nakolik tyto, na první pohled jasné a zřejmé formulace se ukáží přesnými a správnými při bližším rozboru a v čem se ukáží skreslujícími. Prozatím ale vidíme, že není divu, že idealističtí filosofové všech dob a směrů se domnívali v matematickém poznání spatřovat podporu svých stanovisek a systémů. V matematickém poznání byl viděn doklad pro to, že vedle smyslové zkušenosti, která často klame, existuje ještě jiný, na zkušenosti nezávislý a nepoměrně bezpečnější zdroj poznání — poznání „čistě rozumového". Mnozí velcí matematikové všech dob vydatně a výslovně idealistickou filosofii podporovali; z moderních uveďme alespoň Poincarého a Brouwera. Poslyšme názor BROUWERův, jasně a stručně formulovaný jeho žákem A. HEYTINGEM ve známé knížce Mathematische Grundlagenforschung (1934) na str. 67:

„Čistá matematika je volným výtvorem rozumu a sama o sobě nemá žádného vztahu ke zkušenostním faktům".

Jestliže se nahradí slovo „rozum" slovem „duch" a rčení „nemá žádného vztahu ke zkušenostním faktům" se pozmění na „je naprosto nezávislé na zkušenostních faktech a co do jistoty je zkušeností nadřazeno" — což jsou změny, které idealistický filosof provede obratem ruky dříve, než se nadějeme a vzpamatujeme — pak příbuznost se spiritualistickým idealismem hrubého zrna je nabíledni. Pak ovšem „rozum", čili „duch", vytvářeje matematiku diktuje pomocí exaktních věd přírodě zákony — a jsme oběma nohama v tom idealismu, který bují tak ostudně nevědeckým způsobem u současných buržoasních theoretických fysiků a astronomů, jako je JEANS nebo EDDINGTON.

Při tom není podstatné, zda kdo takové důsledky výslovně prohlásí anebo (jako je tomu u stoupenců moderního positivismu) se takových prohlášení zdržuje. Celý praktický životní postoj, celá koncepce exaktních věd a aplikací matematiky každého, kdo přijímá BROUWEROVU nebo podobnou charakterisaci matematiky, je nutně idealistická. Neboť s tohoto hlediska na životně důležitou otázku, jak chápat to, že vůbec matematika může být s tak pronikavým úspěchem aplikována na předvídání skutečností, je odpověď nutně konec konců tato: Je to proto, že matematika, to jest konec konců „rozum", předpisuje svoji zákonitost přírodnímu dění.

Polemika s touto a s jinými stránkami idealistického názoru na matematiku je vlastně smyslem toho, co následuje. Dříve však se obraťme k přehlednému rozvedení toho, jak se projevuje základní filosofický protiklad idealismu a materialismu specifickým způsobem v pojetí matematiky.

2. *Co rozumíme rozporem mezi idealistickým a marxistickým, materialistickým pojetím matematiky.*

V již zmíněné knížce A. HEYTING hovoří o filosofických stanoviscích k vztahu mezi matematikou a skutečností a říká doslova toto:

„V jednom ohledu všichni (rozuměj: představitelé dnes vedoucích směrů v matematice) spolu souhlasí, takže to dnes možno považovat za communis opinio (t. j. společné mínění) matematiků, že totiž věty čisté matematiky nevypovídají ničeho o skutečnosti..."

Toto domněle společné mínění matematiků je ve skutečnosti společným míněním právě jen těch matematiků, kteří pojímají matematiku idealisticky. Jak je zdůrazněno v monografii „Matematika v SSSR za 30 let" ve stati S. A. JANOVSKÉ na str. 12, materialisticky smýšlející matematikové a především početná rodina sovětských matematiků toto stanovisko nesdílí, což, zdá se, HEYTING přehlédl. Sovětští matematikové a s nimi vzrůstající počet matematiků v lidových demokraciích — a konečně jistě i mnoho matematiků v kapitalistických zemích (ze zemřelých snad lze uvést na př. geometra M. PASCHE) naopak v zásadě uznávají onu materialistickou charakterisaci matematiky, kterou formuloval B. ENGELS (*Antidühring*, str. 36 posl. č. př.) slovy:

„Předmětem čisté matematiky jsou formy prostoru a kvantitativní vztahy skutečného světa, tedy velmi reálná látka. Že se tato látka jeví v nejvýš abstraktní formě, může zakrýt jen povrchně její původ z vnějšího světa."

Principiální správnost takto vyjádřeného marxistického materialistického pojetí matematiky (o jeho aktualisaci vzhledem k moderní matematice bude řeč ke konci stati) a principiální nesprávnost, to jest protivědeckou a společensky reakční povahu idealistického pojímání matematiky zvláště dnes, v posledním, imperialistickém stadiu kapitalismu, to obojí nelze sice dokazovat tak, jako se dokazují samotné matematické poučky — ba ani ne zcela tak, jako se dokazují exaktní přírodní zákony.

Je však nicméně velmi dobře možno a nutno o tom přesvědčovat dobrými důvody toho, kdo o tom není, anebo není zcela přesvědčen, zvláště pak každého matematika, který smýšlí v podstatě pokrokově a nemá neodstranitelných předsudků, z nichž nejhorší je předsudek, že matematik se má starat jen o matematiku a nepotřebuje se zabývat otázkou, co to vlastně matematika je. Ale tato věc není jen vnitřní záležitostí matematiků. Je součástí všeobecného zápasu o pokrok, a jak již bylo řečeno, jde o to, vypudit zpátečnický idealismus z míst, v nichž se domnívá mít silnou posici. Bohužel, mezi tato místa patří i matematika všude, kde matematikové se tomu nebrání. (Budeme moci až ke konci statě zhodnotit a vysvětlit účast a roli idealistických tendencí v matematice.)

Idealistické pojetí matematiky (dle H. POINCARÉHO) *a jeho kritika. Hilbertův formalismus a Brouwerův intuicionismus.*

Je třeba stručně přehlédnout hlavní argumenty, jež se uvádějí na podporu idealistického (a proti materialistickému) pojetí matematiky, jak bylo shrnuto v uvedeném citátu HEYTINGOVĚ.

Postup argumentace je asi tento:

Mezi matematikou a přírodními vědami je zásadní rozdíl v tom, že přírodovědecké zákony podléhají kontrole pozorováním, zkušeností, kdežto matematické poznatky nikoli. Přírodovědecké zákony jsou získávány abstrakcí a generalisací pozorovaných skutečnostních faktů, tedy induktivně (v obecném smyslu slova). Jako takové ani nemohou být nikdy úplně dokázány, protože se vztahují na neomezený počet případů, z nichž mohl být zkontrolován jen malý konečný počet skutečně provedeným měřením. Naproti tomu matematické poučky jsou a musí být dokazovány úplně. Proto opodstatnění matematických pouček, a zejména těch nejdůležitějších, v nichž jakýmkoli způsobem běží o nekonečno, nelze provést experimentem, zkušeností, neboť experimentu a zkušenosti je nekonečno nedostupné. Mimo to v moderní matematice, při hlubším rozboru tradičních matematických pojmů, dochází stále častěji ke konfliktům mezi názornou, empirickou zřejmostí a přesnou logickou úvahou, v nichž musí povrchní názor ustoupit. A konečně, v matematice je třeba zavádět pojmy, jež si vůbec názorně představit nedovedeme. — Z toho všeho zdá se vyplývat nezvratně toto: Je třeba ostře oddělit t. zv. otázku „quid facti" od t. zv. otázky „quid iuris" platnosti matematických pouček. Otázka „quid facti", t. j. toho, *jak* se dospívá k matematickým poznatkům, je věcí historie matematiky, matematické heuristiky, matematické didaktiky a psychologie matematické tvorby. Odpověď na tuto otázku nám nemůže naprosto ničeho říci o tom, *na čem spočívá platnost* matematických pouček. To je otázka „quid iuris" čili otázka t. zv. noetického založení, resp. výkladu matematiky. Z toho ovšem se zdá nutně vyplývat, že matematika sama ničeho nepraví o skutečnosti, protože jinak by přece jen musely matematické poznatky podléhat alespoň občasné kontrole zkušeností a názorem (stejně jako obecné přírodní zákony, od nichž by se pak ničím podstatným nelišily).

Pak ale také, jak se zdá, axiomy [t. j. základní poučky té které matematické theorie, které již dokázat z jednodušších pouček nelze, a to ani deduktivně, ani empiricky, ale které naopak slouží za podklad k dokazování všeho dalšího (spolu s definicemi)], je možno i je třeba považovat za zásadně neověřitelné a tedy v rámci logické přípustnosti za věc svobodné a skutečností nijak jinak neomezené matematické tvorby, resp. libovůle. — Potud tedy společné, v podstatě negativní stanovisko idealismu v matematice, jak v zásadě bylo odůvodněno H. POINCARÉM (srov. *La valeur de la science*; *Science et hypothèse*).

Správně k němu dodává HEYTING, že ve všem, co jde nad toto negativní stanovisko, se názory jednotlivých matematických idealistických škol rozcházejí: otázka ,,quid iuris" nenalézá tedy jasné a jednotné idealistické odpovědi.

Jak se zdá, rozcházejí se idealistické názory na matematiku dále proto, protože zdánlivě jasně odůvodněné společné idealistické stanovisko k matematice obsahuje zásadní obtíže, ba možno říci přímo rozpory. Uveďme aspoň některé.

Především se naskytá zásadní otázka, o čem se to vlastně v matematických větách hovoří, čili jaký je předmět matematiky, jestliže matematika ničeho nepraví o skutečnosti.

Dále je tu neméně zásadní otázka, na čem vlastně se zakládá ona příslovečná ,,železná jistota" matematických důkazů, čili t. zv. logicko-matematické evidence (samozřejmost), jež je, jak se zdá, absolutně nezávislá na smyslové zkušenosti, na názoru.

A konečně je tu s předchozí otázkou úzce související otázka, jak to, že se matematické poučky hodí na skutečnost, jestliže jsou na skutečnosti nezávislé a jestliže volba axiomů je věcí matematikovy libovůle.

Všimněme si především diametrálně odlišných a stejně neuspokojivých odpovědí na první hlavní otázku, jaké podávají obě hlavní současné idealistické matematické školy: BROUWEROVA intuicionistická škola a HILBERTOVA formalistická škola.

Podle HILBERTA věty samotné, naprosto rigorosní matematiky nehovoří vlastně o ničem, nemají vlastního obsahu; obsah se do nich dostává teprve více nebo méně názornou interpreretací, t. j. vlastně již aplikací. Potud tedy otázka předmětu ideálně přesné matematiky je prostě odmítnuta. Ideálem matematiky a matematické přesnosti je její úplné zformalisování. I slovní úvahy, logické úsudky je třeba (pomocí t. zv. logického kalkulu) převést (mají-li být naprosto přesné) ve v zásadě zmechanisovatelný formalismus, v zacházení se symboly a formulemi (jednak matematickými, jednak logickými) dle formálně přesných pravidel, aniž by se přihlíželo k významu formulí. Důkaz matematické poučky je dokonale proveden tehdy, je-li úplně formalisován, to jest zásadně převeden v konečný počet dovolených přeměn ve formulích, který vede od formalisovaných premis k formalisovanému tvrzení poučky.

Podle Brouwera znamená formalistické pojetí matematiky (i když by bylo vůbec proveditelné) degradaci smyslu matematiky a nahrazení matematické jistoty prázdnou, nic neříkající a nic nedokazující hrou. Matematické věty mají smysl a dají se dokazovat jenom pokud nejsou zbaveny svého obsahu. Formule jsou pouhým a vždy jen nedokonalým nástrojem k vyjádření matematické myšlenky. Obsah theoretické matematiky je výsledkem volné tvorby matematických ideí rozumem. V této tvorbě matematických poznatků se rozum opírá o t. zv. logicko-matematickou intuici, která nemá nic společného s názorem a s empirií a kterou dále již nelze (a nemá smyslu) rozebírat. Jen matematické intuici je přístupno nekonečno. Jen taková nekonečna, která jsou přístupna matematicko-logické intuici, patří do matematiky.

Není zde místa k podrobnému rozboru obou protichůdných názorů. Je sice faktem, že přes pochybené filosofické tendence v obou směrech došlo k významným objevům v matematice a v matematické logice. Rovněž ne všechny filosofické postřehy jak Hilbertovy, tak Brouwerovy možno považovat za chybné. (Viz ostatně v závěrečném hodnocení idealistických tendencí v matematice.) — To jsou však všechno podrobnosti.

Podstatné pro nás zde je, že zásadní filosofický postoj obou, byť protichůdných škol — intuicionismu i formalismu — je zcela vědecky *neuspokojivý* a dodejme: dnes už *reakční*. Pro neuspokojivost hovoří již i skutečnost, že dlouholetá diskuse mezi formalisty a intuicionisty nevedla k žádnému určitému výsledku. Brouwerův intuicionismus se zásadní otázce, o čem vlastně hovoří matematické věty, vyhýbá. Vlastními předměty matematické theorie nejsou pro něj pojmy, jakožto myšlenky, neboť myšlení a vztahy mezi myšlenkami (asociacemi) jsou předměty psychologie a nikoliv matematiky.

Předměty matematiky nejsou však ani ve skutečném hmotném světě. Není jasno, čím tedy jsou, pokud nás neuspokojuje, že mají být „volnými výtvory rozumu". V obtížných otázkách základů matematiky si Brouwer vypomáhá neurčitým pojmem intuice, která má krajně subjektivně idealistické podbarvení. Nebýt zdravého racionalistického instinktu a kritičnosti matematiků — intuicionistů (a samotného Brouwera), zavedl by tento pojem intuice matematiku zpět do blízkosti iracionalismu a mysticismu. Že to není plané nebezpečí, o tom svědčí četní, vyloženě reakční metafysičtí filosofové, kteří (jako na př. směr t. zv. fenomenologismu Husserlova) se dovolávají Brouwerovy matematické školy.

Hilbertův formalismus, i kdyby byl proveditelný a i kdybychom ničeho více proti němu nenamítali (což nečiníme), by především nikterak neřešil otázku předmětu matematické theorie, nýbrž nanejvýš by ji přesunul na theorii formalisované matematické theorie, na t. zv. metamatematiku; ta totiž je předpokladem k provedení formalisace a je nutně matematikou obsahovou, v běžném smyslu slova. Horší ale je, že HILBERTŮV program se podle výsledků GÖDELOVÝCH a CHURCHOVÝCH *ukázal být neproveditelným.*

Pokud se týče druhé základní otázky filosofického pojímání matematicko-logické evidence, odpovědi obou protichůdných idealistických škol jsou opět neméně neuspokojivé.

HILBERTOVA škola nebyla s to — a jak se ukazuje, ani nemůže být s to — podat úplnou formalisaci ani tak poměrně jednoduché theorie, jako je elementární aritmetika přirozených čísel. Tedy ani v tomto případě nemůže dosáhnout svého cíle, aby totiž úsudkové vybavení aritmetiky representovala logicko-matematickým formalismem, v němž by všechny obsahové aritmetické úsudky byly zachyceny a rozložitelny v konečný počet dovolených přeměn formulí.

BROUWEROVA škola svou přehnanou kritikou na jedné straně budí neoprávněnou skepsi ke klasické, v poznání přírody a v technických aplikacích osvědčené matematice, a působí neodůvodněný negativní postoj k četným základním moderním partiím matematiky. Destruktivní kritika intuicionistů mění matematiku v pouhé trosky. Na druhé straně předkládá jako poslední, nejzákladnější oporu matematiky a pramen logicko-matematické evidence intuici, tedy něco při nejmenším velmi neexaktně určeného a subjektivního. Není nikterak jasné, že by nemohl jeden matematik považovat za intuitivně zřejmé to, co druhý matematik za zřejmé nepovažuje — a četná nedorozumění mezi intuicionisty a neintuicionisty prakticky podkládají tuto námitku.

Konečně s třetí otázkou je to zrovna tak, třebaže pojetím vztahu matematiky k aplikacím se obě školy liší méně než v předchozích otázkách.

HILBERTOVA škola se kloní ke krajnímu názoru, že axiomy matematické theorie jsou naprosto libovolně volitelné konvence, omezené toliko požadavkem formální bezespornosti. Aplikaci matematiky si pak představuje v zásadě jako přiřazování formulí k faktům a jako jejich názornou interpretaci, která je rovněž zásadně libovolná a řídí se toliko požadavky praktické účelnosti; pro přírodovědu je matematika pouhým, i když důležitým, pomocným nástrojem.

BROUWEROVA škola neponechává takovou volnost ve volbě axiomů: naprosto libovolně zvolené axiomy by mohly také dát pouze prázdnou hru. Matematika staví na intuici a jsouc volným výtvorem rozumu sleduje jakousi vnitřní vývojovou zákonitost, jež vylučuje naprostou náhodnost a libovůli ve volbě axiomů. Dle toho přisuzuje intuicionismus matematice podstatnější úlohu v přírodních vědách: každá zákonitost, ba každé konstatování fakta, které má smysl, je proniknuto a podmíněno neuvědomělými matematickými úvahami, jichž uvědomělé systemisování propůjčuje teprve přírodovědě řád a zákonitost.

HILBERTOVA škola tíhne co do poměru matematiky ke skutečnosti spíše ke konvencionalismu a positivismu, BROUWEROVA škola nese stopy HEGELOVY filosofie (ve věci vývoje matematiky) a tíhne ke KANTOVU apriorismu (ve věci podmíněnosti poznání přírody matematikou).

Koncepce HILBERTOVA, kterou v otázkách vztahu mezi matematikou a skutečností rozvedli jmenovitě novopositivisté FRANK a CARNAP, odmítá zaujmout tak otevřeně idealistický postoj, jako je tomu u BROUWERA. Otázka aplikability matematiky prý není vědeckou otázkou a nemá tedy smyslu. S tím ovšem zásadně nelze souhlasit: není-li otázka aplikability matematiky vědeckou otázkou toho druhu, jako je odborný problém té které vědy, pak z toho neplyne, že postoj v této otázce nemá zásadní význam pro vědu, t. j. především matematiku a fysiku. Ostatně nelze upřít jakýkoli smysl otázce, jíž je smysl všeobecně přikládán. Nad to pak novopositivisté vzdor své zdánlivé filosofické nezaujatosti stojí prakticky na stanovisku idealistickém: matematika je dle potřeby do přírodních zákonitostí vnášena, a nemohou to zakrýt ani nedosti jasné i když snad vědecky znějící termíny pro toto vnášení, t. j. termín „přiřazení značek k výsledkům pozorování", resp. „interpretace formálního systému tímto přiřazením".

Koncepce intuicionismu BROUWEROVA je idealisticky důslednější a otevřenější ve věci aplikability matematiky: matematikou konec konců rozum vytváří přírodní zákonitost — a aplikabilita matematiky je s hlediska idealistické filosofie jasná.

Pro oba idealistické názory — jeden otevřenější a druhý zakrytější, platí zásadní námitka: Jestliže je v podstatě matematikou stále zřejměji zákonitost do přírody vnášena a jestliže matematické věty samy o skutečnosti naprosto ničeho neříkají, pak je záhadou, jak to dohromady klape, proč se vůbec potřebujeme neustále přesvědčovat experimentálně a pozorováním o pravdivosti matematicky vyjádřených přírodních zákonů, proč je touto cestou rozšiřujeme, proč jsou skutečnosti, fakta východiskem a nejvyšší kontrolou každé přírodovědy a proč experimentální a empirická složka přírodních věd nejen že není na ústupu, ale naopak, daleko předbíhá svým rozvojem theorii.

Vraťme se k jádru sporu, k tomu, co je společné všemu idealistickému chápání matematiky.

V základě idealistického pojetí matematiky je totiž ono hluboké přesvědčení, že logická samozřejmost jednotlivých matematických důkazových a definičních kroků, t. zv. logicko-matematická evidence, je cosi absolutně na smyslové zkušenosti nezávislého, že je to tak říkajíc absolutní a buď neměnný (jako spíše u formalistů) a nebo vyvíjející se (jako spíše u intuicionistů) princip a zdroj deduktivního poznání. Tento zdroj prý zakládá dále neanalysovatelný zásadní rozdíl mezi matematikou a přírodními vědami.

Toto metafysické zabsolutnění a idealistické chápání rozdílu mezi dedukcí a indukcí je východiskem, proti němuž se vede současný boj marxistického materialismu proti idealismu v pojetí matematiky. Ono je také slabým bodem idealistického pojetí matematiky a zároveň v něm marxisté vidí jeden z hlavních pramenů toho, čemu se říká krise základů matematiky. Zdá se, že opravdu neznalost anebo předsudky nedovolují mnoha matematikům nahlédnout, že pro kvalitativní a charakteristický rozdíl mezi dedukcí a indukcí má dialektický materialismus velmi prostý a přirozený filosofický výklad, který při tom neodděluje dedukci a indukci nepronikutelnou, absolutní hranicí.

Zatím však se v idealistickém pojetí dedukce udržuje a co hůře, uměle k životu křísí cosi z dávného spojení logické evidence a náboženské mystiky, jako bylo ve středověké scholastice anebo v matematickém mysticismu starořeckých pythagorejců.

V příštím odstavci se budeme věnovati marxistickému výkladu matematicko-logické evidence.

4. *Marxistické materialistické pojetí dedukce.*

Jak známo, marxistický materialismus zásadně pojímá myšlení, theorii, jako obrážení, zobrazování materiální skutečnosti, objektivní reality. Pravdivost myšlení, theorie, je věrností obrazu, nebo způsobu zobrazování. Avšak na rozdíl od metafysického materialismu pojímá marxistický materialismus myšlenkové obrážení objektivní reality poznáváním za proces neustálého a cílevědomého přibližování se objektivní pravdivosti, a zdůrazňuje tak úlohu lidské aktivity theoretické a praktické, která je podmínkou neustálého přibližování se k objektivní pravdě. Ale jediným základním kriteriem míry pravdivosti theorie, myšlení, je praxe, experiment. Marx to formuluje v *II. thesi o Feuerbachovi* (viz Engels, *Ludvík Feuerbach a vyústění německé klasické filosofie* str. 60, č. př.) takto: „Otázka, zda lidské myšlení se dobírá předmětné pravdivosti, není otázkou theorie, nýbrž otázkou praktickou. V praxi musí člověk dokázat pravdivost, to jest skutečnost a moc, pozemskost (Diesseitigkeit) svého myšlení. Spor o skutečnost či neskutečnost myšlení, které se isoluje od praxe, je otázkou čistě scholastickou".

Úkolem vědeckého theoretického myšlení je z daných obrazů skutečnosti, čili předpokladů, docházet k novým obrazům skutečnosti, vytvářet úsudkem nové obrazy skutečnosti, čili závěry, při čemž věrnost (pravdivost) nových obrazů — závěrů — je ovšem podřízena zásadní kontrole srovnáváním obrazu se skutečností, praxí, experimenty pomocí pozorování (měření). Myšlení je konec konců potud správné, pokud jsme s to pomocí něho dosahovat splněných předpovědí a zamýšlených zásahů do skutečnosti.

Přikročme z tohoto hlediska k výkladu rozdílu mezi dedukcí a indukcí. K tomu cíli vyjděme z prostého příkladu dvou úsudků, z nichž jeden je deduktivní a druhý induktivní.

(1) *Předpoklady*: Všichni lidé chybují. Farao nechybuje. *Závěr*: Farao není člověk.

(2) *Předpoklady*: Dva bratři se prudce pohádali o dědictví. Nato byl starší bratr nalezen zabitý. *Závěr*: Mladší bratr zabil staršího.

První úsudek je samozřejmý, logicky evidentní, ryze deduktivní. Je to jednoduchý syllogismus. Kdykoli jsou předpoklady takového úsudku relativně věrným obrazem skutečnosti, pak důsledek je již neméně věrným obrazem skutečnosti. Jestliže se — jako v našem příkladě — důsledek se skutečností rozchází, je nutno chybu vidět nikoli v úsudku samém, nýbrž v samotných předpokladech: některý z předpokladů (patrně ten, že Farao nechybuje), se také opravdu se skutečností rozchází.

Naproti tomu druhý úsudek není samozřejmý, a není ryze deduktivní — je induktivní. Je sice oprávněné dle dosavadních zkušeností o vraždách považovat v našem případě vraždu za výsledek hádky o dědictví, ale není to nikterak nutné a je dobře známo, jaké opatrnosti je při takových závěrech třeba, kolik dalších důsledků takového závěru je potřebí konfrontovat se skutečnostmi, aby nabyl věrohodnosti. A přece nikdy nebude věrohodnost závěru taková, jakou mají bezpečně zjištěné předpoklady. Jestliže se obvinění ukáže lichým, chyba bude hledána — když předpoklady se shodují se skutečností — v úsudku samotném.

V čem je podstata rozdílu v obou úsudcích? Proč první skýtá jistotu, druhý jen pravděpodobnost; přesněji řečeno, proč při prvním úsudku je pravdivost závěru táž jako pravdivost předpokladů, pravdivost předpokladů se bez další kontroly přenáší na závěr, kdežto při druhém úsudku je pravdivost předpokladů zmenšena v pouhou pravděpodobnost (plausibilitu) závěrů?

Marxistický materialistický výklad je zhruba takový:

V prvním případě ryze deduktivního úsudku z daného obrazu skutečnosti — předpokladů — tvoříme další obraz téže skutečnosti, aniž bychom při tom užili jakýchkoli jiných obrazů skutečnosti — ať věrných, ať více či méně skreslených. Bude tedy závěr právě tak věrným obrazem skutečnosti, jako samy předpoklady. Neboť při syllogismu jsme nic jiného nedělali, než výslovně ozřejmili jistou část, rys skutečnosti, který byl v předpokladech zachycen, obsažen. A jestliže jsme skutečně nic jiného nedělali, než abychom tak řekli, zvětšili v závěru detail snímku skutečnosti, daného v předpokladech, pak detail se bude shodovat právě tak dobře se skutečností, jako celý snímek.

Jinak je tomu při úsudcích nikoli ryze deduktivních, jako byl náš druhý příklad. Abychom takový induktivní úsudek učinili, musíme (z podnětů předpokladů) přibrat k vytvoření závěru celou spoustu zčásti neuvědomělých dalších obrazů zcela jiných skutečností, totiž zkušeností o vraždách; z nich teprve vytváříme myšlením náš závěr. Nemůžeme však nikdy zcela úplně vystihnout všechny souvislosti, jež bychom potřebovali k podepření úsudku znát. Proto úsudkový most mezi předpoklady a závěrem je most mezi zachyceným a nezachyceným dějem, mezi dvěma různými skutečnostmi, který je možno a nutno zajišťovat, nebo rušit konfrontaci se skutečností.

Oba zvolené příklady jsou ovšem prostinké. Nikoli každý deduktivní úsudek, který činíme v matematice, je tak průhledný a nikoli každý induktivní úsudek v empirických vědách je toho druhu, jaký jsme uvedli.

Ale zásadní rozdíl mezi deduktivním a induktivním myšlením zůstává zhruba vystižen tímto obrazem: Dedukce je *sestrojování nových* snímků *téže* skutečnosti *z daných snímků* jich *zvětšováním*, asi jako se zvětšuje část fotografie, nebo *kombinováním*, asi jako se z pohledu se shora (z půdorysu) a z pohledu ze předu (z nárysu) sestrojuje pohled se strany (bokorys). Indukce je *vytváření nových* snímků *nové* skutečnosti z nepřehledné spousty snímků *známých skutečností*, z nichž jen několik hlavních je vytčeno jako předpoklady.

Poslední slovo při zajišťování správnosti jednotlivého výsledku induktivního myšlenkového pochodu má konfrontace obrazu se skutečností, praxe. Poslední slovo při zajišťování správnosti výsledku jednotlivého deduktivního myšlenkového pochodu má jeho rozložení na bezprostředně patrné, evidentní deduktivní kroky. — Tak se díváme na *jednotlivé* dedukce (a jednotlivé indukce).

Avšak z toho neplyne nezávislost samotných pravidel, principů dedukce na smyslové zkušenosti, na názoru, na konfrontaci se skutečností. Neboť jak to víme, že jisté úsudkové kroky, totiž deduktivní kroky, jsou jisté, evidentní? Jestliže na věc hledíme bez předsudků, pak je jasné, že odnikud odjinud, než zase z praxe, z nesčíslněkráte opakované úspěšné konfrontace výsledků deduktivního myšlení se skutečností. Jen tak se mohl člověk dopracovat k jasnému rozlišování deduktivního a induktivního myšlení, jen v opakovaném praktickém styku se skutečností se mohl člověk naučit způsobům, jak deduktivně rozebírat obrazy určité skutečnosti a získávat z nich potřebné nové obrazy téže skutečnosti, aniž by si cokoli přimýšlel, aniž by nevědomky činil další předpoklady, tedy pouhým ozřejmováním a kombinováním právě toho, co ze skutečnosti zachytil v předpokladech úvahy. Jaké praktické naléhavosti ho k tomu vedly a dosud vedou, a za jakých okolností k tomu dospěl, o tom bude řeč v dalším odstavci. Zde však jde o toto:

Správnost *jednotlivých* deduktivních úsudků nepodléhá konfrontaci výsledků myšlení se skutečností a *v tomto smyslu* je na ní *nezávislá*. Avšak jistota a správnost *obecných principů základních logicko-matematických úsudků*, jistota dedukce vůbec, je ovšem opřena o úhrn opakovaných positivních konfrontací výsledků deduktivního myšlení se skutečností — po celou dobu, po níž člověk dovede uvažovat — až do dneška; tedy v tomto smyslu je dedukce na zkušenosti závislá. *Nezávislost principů dedukce na smyslové zkušenosti je tedy pouze relativní.* To znamená, že jestliže myšlení, vyšedši ze zjištěných skutečností, dospělo k závěrům odporujícím skutečnosti, budeme hledat chybu spíš všude jinde, než v samotných principech dedukce. Přesněji řečeno: Spíše mimo principy dedukce, ač ne absolutně vždycky.

— „...praxe lidí, miliardkráte se opakující, vtiskuje se do vědomí člověka v podobě logických figur. Tyto figury mají pevnost předsudku a axiomatický charakter právě (a jedině) v důsledku tohoto miliardnásobného opakování" říká LENIN (Leninský sborník IX, str. 212) a musí mu dát konec konců za pravdu každý, kdo nechce spřádat o logické evidenci metafysické spekulace.

Vezmeme-li tedy nezávislosti principů dedukce na skutečnosti onu metafysickou absolutnost, kterou jí připisují idealisté, zvrací se tato nezávislost v pravý opak: pomocí zkušenosti se přesvědčujeme, že deduktivním myšlením se nemýlíme. Ovšem tato síla dedukce je zároveň i její slabinou. Zkušenost nám také ukazuje, jak málo nám pro poznání skutečnosti deduktivní myšlení dává samo. Lepší záruky jistoty deduktivního myšlení si nelze přát, a rozhodně ji věda nemůže hledat ve spekulativně metafysickém předsudku o absolutní nezávislosti deduktivních principů matematiky a logiky na skutečnosti. Taková chimerická záruka by také sotva dodala důvěry k matematice inženýrovi, který vypočítává nosnost pilířů mostu. Inženýr se přirozeně opírá o ono obrovské nahromadění osvědčených aplikací stále přesnějšího matematického myšlení. On nejlépe vyciťuje, odkud se bere jistota deduktivního usuzování.

Osvětleme ve smyslu marxistické filosofie ještě z jiné stránky relativnost rozdílu mezi induktivním a deduktivním.

Vezměme již jednou zmíněný příklad obecného exaktního přírodního zákona, jako je NEWTONŮV zákon všeobecné gravitace. — Co by se stalo, kdyby ojedinělé měření ukázalo neshodu tohoto zákona se skutečností? Museli bychom předpokládat, že chyba je v podmínkách a způsobu provedení měření, že je ve výpočtu, zkrátka všude jinde než v samotném NEWTONOVĚ zákoně. Takovou sílu má dosavadní ověření tohoto zákona, tolik fysikálních osvědčených theorií i úspěšných aplikací na něm spočívá. Jestliže by se ale systematicky hromadila nová pozorování, ukazující na neshodu NEWTONOVY theorie gravitace se skutečností, a hlavně když by i jiné výsledky fysiky vedly k pochybnostem o tomto zákoně, pak teprve bychom počali pomýšlet vážně na nahrazení tohoto zákona, ne ovšem snad protichůdným, ale obecnějším a přesnějším zákonem, lépe vystihujícím skutečnost. (Dnes se skutečně pro takovou možnost rozhodujeme ve formě EINSTEINOVY theorie gravitace, avšak jak známo, rozhodnutí ještě definitivně nepadlo.) — Co tím mělo být řečeno? — Jednak to, že ani obecné přírodovědecké poznatky o skutečnosti, induktivně získané poznatky nepodléhají kontrole, resp. vyvrácení ojedinělým pozorováním, měřením. I obecné fysikální zákony se ověřují, resp. opravují konec konců celým dosavadním úhrnem fysikálního poznání přírody. Na druhé straně chceme však říci také to, že i velmi obecné přírodovědecké poznatky pod vlivem nových skutečností nikdy zcela nepadají, ale vyvíjejí se a zdokonalují touto neustálou kontrolou, celým dosavadním fysikálním poznáním přírody, celou lidskou technickou praxí. Nelze s konečnou platností zaručit dokonalost exaktního přírodovědeckého zákona, ale také nelze takový, jednou ověřený obecný exaktní přírodovědecký zákon vyvrátit jediným pozorováním, protože nelze isolovat od ostatních poznatků jak zákon sám, tak příslušné pozorování. Takový zákon lze jen pod vlivem mnoha souvislých pozorování zdokonalit, zobecnit.

V podstatě právě tak je tomu i pro principy dedukce. I principy dedukce se zdokonalují a vyvíjejí pronikáním do skutečnosti. Ovšem verifikace všech principů dedukce celým úhrnem dosavadního poznání je ještě daleko méně bezprostřední, ale zároveň i daleko širší a obecnější než u přírodních zákonů, dějíc se prostřednictvím veškerého theoretického myšlení. Vývoj, překonávání a zdokonalování principů dedukce je nepoměrně pomalejší, ve srovnání s přírodními zákony. Jak známo, byla následkem toho ovládána klasická idealistická filosofie Kantovým přesvědčením, že principy formální logiky jsou naprosto neměnné. Naproti tomu prohlásil Engels (ve staré předmluvě k *Antidühringovi*, s. 288, č. př.), když byl zdůraznil důležitost vývojového, historického hlediska i pro logiku, toto:

„Neboť předně, theorie zákonů myšlení naprosto není jaksi jednou pro vždy stanovenou ‚věčnou pravdou', jak si to představuje šosácký rozum při slově logika. Formální logika sama je od dob Aristotelových až podnes polem prudkých debat."

Nejnovější vznik a vývoj logiky bez „tertium non datur", k němuž dala podnět právě sama idealistická matematická škola Brouwerova (která se jinak ale drží v podstatě Kantových filosofických představ), je znamenitým potvrzením Engelsových slov. A také zde teprve budoucnost celé vědy ukáže, zda intuicionistické zobecnění logiky má být přijato jako potřebné zdokonalení logiky, či nikoli.

Obraťme se ještě k jiné otázce, která bývá přetřásána v idealistických diskusích o dedukci. Jde o to, zda nám deduktivní usuzování, jak se říká, „dává něco nového", anebo nikoli, t. j. jak se říká, zda naopak „získáváme tím toliko více, nebo méně bezprostřední tautologie".

S marxistického materialistického hlediska se tato otázka sama jeví zcela zbytečnou a scholastickou. I v této věci je zcela přirozené dát za pravdu Engelsovi, který (*Antidühring*, str. 118, č. př.) říká:

„I formální logika je především methodou pro vyhledávání nových výsledků, pro postup od známého k neznámému."

Neboť není pochyby o tom, že se ryze logickými a matematickými úsudky dovídáme něco nového o skutečnosti, něco, co jsme předtím ne-věděli, nebo alespoň na to nemyslili — a to již i u nejprostších syllogismů. Právě tím, že jsme si i zcela samozřejmý syllogistický závěr uvědomili, i když se to dálo vyběhaným, rychlým způsobem, pomyslili jsme si výslovně něco jiného, než jsou samy předpoklady, něco nového. Rozdíl je ovšem ve stupni myšlenkové námahy. Při deduktivních krocích méně prostých a méně zautomatisovaných, jako je třebas závěr matematickou indukcí, je toto nové méně bezprostřední, je tu tedy „více nového". Ovšem co nám nemůže dedukce dát, to je informace o jiných skutečnostech, nežli jsou ty, které jsme zachytili v předpokladech. Mezi dedukcí a indukcí je v tomto smyslu rozdíl.

Předložená idealistická otázka bývá také formulována jako hledání základního rozdílu mezi t. zv. analytickou a synthetickou dedukcí; první právě nám prý ničeho nového nedává, druhá prý ano. Jak již vlastně řečeno, takové metafysické rozlišování považujeme s hlediska dialektického materialismu za spekulativní umělost. Takového zásadního rozdílu není, jsou jen častější a průhlednější deduktivní kroky (jako syllogismy) a méně průhledné a méně časté deduktivní kroky (jako závěr matematickou indukcí).

5. *Dialektické a logické myšlení v matematice.*

Zdá se, že pochybná diskuse o analytickém a synthetickém charakteru dedukce vychází ze skreslení podnětu, který sám ovšem není nikterak bezvýznamný a o němž již byla zmínka. Jde o poměr mezi názorem a dedukcí v matematice, o vztah mezi vlastní invencí matematickou a systematickým a exaktním podložením a zachycením takové invence. — Vedlo by nás příliš daleko do odborných, a nikterak jednoduchých a jasných souvislostí, kdybychom chtěli s marxistického hlediska tuto otázku rozebírat. Spokojíme se tu s několika základními postřehy.

Není pochyby o tom, že myšlenkové pochody, jež vedou k novým matematickým poznatkům, jsou zcela jiného rázu, než ty, jimiž krok za krokem sledujeme či poznáváme exaktní důkaz. (Potud má intuicionismus pravdu.) Matematická invence potřebuje být názorná i v nejabstraktnějších partiích matematiky, třebaže cvičený názor matematika se liší od názoru laického, pokud laik vůbec při odtažitosti některých matematických theorií bez hlubšího studia může názor uplatnit. Při matematické invenci — ale již i při hlubším pochopení známých matematických poznatků, je třeba dbát v jakémsi simultánním globálním přehledu co možná nejvšestrannějších souvislostí dané otázky s jinými, aby při tom vyniklo hluboké abstraktní jádro, společné mnoha sledovaným případům. Je dále třeba, aby invenční myšlení v matematice riskovalo tu i onde úsudkové skoky, a jinde aby tak říkajíc spojitě přehlíželo souvislost, aniž by úvahu rozkládalo na jednotlivé diskursivní kroky.

Krátce řečeno, ***matematická invence je ovládána myšlením po výtce materiálně dialektickým.*** Materiálně dialektické, názorné, globální, „spojité" o skutečnost opřené a hledající myšlení, o němž konkretně víme o málo více, než mohou říci tyto obrazy, lze srovnat s promítáním filmu. Ono je vlastním zdrojem matematické a vůbec vědecké invence. V něm se také ztrácí přesná hranice mezi dedukcí a indukcí. Logicky přesné deduktivní myšlení je ovšem jeho kontrolou — a jeho neodlučitelným doplňkem a protikladem. Toto se podobá rozložení filmu na jednotlivé, přesně od sebe oddělené a na sebe navazující snímky. V matematice je tedy deduktivně přesná kontrola invence nutným i postačujícím ověřením jednotlivých výsledků, resp. podnětů, jež přináší materiální dialektické myšlení. V dalším stupni ovšem i tato kontrola sama vyžaduje zkoumání, což je úkolem theorie základů matematiky a theorie logiky. — Tolik o vztahu mezi dialektickým a logickým myšlením v matematice.

* * *

Chceme-li shrnout marxistické materialistické pojetí dedukce v jednom heslu, můžeme to učinit takto:

Právě tak, jako podle STALINOVÝCH slov (*O dialektickém a historickém materialismu, Otázky leninismu,* s. 539, č. př.) dle marxistického filosofického materialismu „svět se vyvíjí podle zákonů pohybu hmoty a naprosto nepotřebuje žádného ‚světového ducha' " — právě tak matematika i logika se vyvíjí — a to tak, že k tomu naprosto nepotřebuje idealistického zabsolutnění deduktivní evidence, či intuice, která pokud je tak říkajíc zbožněna a považována za zvláštní, na skutečnosti naprosto nezávislý zdroj poznání, představuje v idealistickém pojímání matematiky zmíněného „světového ducha" v poněkud jemnějším, zdánlivě vědečtějším převlečení.

Zdůrazněme nyní jinou slabinu idealistického názoru na matematiku. Je to jeho nehistoričnost. Jestliže otázka „quid iuris" matematiky byla uměle a naprosto oddělena od otázky „quid facti", t. j. tím od historie a vzniku matematiky, pak se vznik matematiky jako samostatné vědy jeví jako jakési blíže nepodmíněné osvícení, kterým se starým Řekům dostalo náhodou jasného vědomí o rozdílu mezi dedukcí a indukcí. Naproti tomu marxistické, historické pojetí matematiky je s to podat pro vznik matematiky jako vědy o historická fakta opřený vědecký výklad. Tlumočit jej bude úkolem dalšího odstavce; k tomu však nejsme vedeni pouhým zájmem o historii.

Matematika totiž není jen tím, čím se nám jeví dnes.

Dnešní stav matematiky je výsledkem dlouhého dějinného vývoje této vědy, který není možno ignorovat, chceme-li odpovědět na otázku, co vlastně matematika je. Na stručném a zběžném výkladu vzniku matematiky jako samostatné vědy ukážeme převahu marxistického pojímání matematiky, jak je všeobecně charakterisováno v uvedené základní thesi Engelsově.

6. *Vznik matematiky a její osamostatnění jako vědy.*

Jak známo, nejprimitivnější matematické poznatky jsou tak staré, jako kultura sama. Avšak ještě ve vyvinutých kulturách předřeckých (hlavně máme na mysli starý Egypt a Babylonii) dle všeho nebylo matematiky resp. geometrie v dnešním smyslu slova. Matematické, t. j. i geometrické poznatky se vyskytovaly tehdy patrně v aplikovaném rouše, jak bychom řekli dnes. Sestávaly z množství vzájemně málo souvisejících, i když často velmi důvtipných praktických návodů, jak počítat a měřit. Tyto návody byly získávány buď bezprostředně v praxi řemeslné a zemědělské výroby, ve stavitelství, v obchodu a státní správě, anebo prostřednictvím prvních přírodovědeckých poznatků (jež si rovněž vyžádaly praktické potřeby), na př. astronomické, geodetické a chronologické poznatky, jichž vyžadovala mořeplavba, předvídání pravidelných zátop na Nilu, poznatky mechaniky, jichž vyžadovala stavba pyramid a vojenství atd.). Ve svých počátcích jsou tedy matematické poznatky k nerozeznání smíšeny s přírodovědeckými a technickými poznatky, v nichž byly objeveny. Deduktivní a induktivní myšlenkové pochody nejsou ještě jasně rozlišovány. A přece se i tak dochází k jednotlivým nikterak triviálním správným matematickým poznatkům — ovšem vedle celé řady chybných.

K osamostatnění matematiky jako vědy dochází až v rozkvětu kultury starého Řecka; za mezník považujeme slavná EUKLIDOVA *Elementa,**) v nichž, jak se zdá po prvé, jsou geometrické poznatky systematicky a přísně logicky odvozovány, dokazovány postupně z jistých, za základ přijatých a dostatečně zřejmých jednoduchých pouček, t. zv. axiomů a postulátů, jako na př. jsou: „Každými dvěma body lze vést vždy jedinou přímku." „Každým poloměrem okolo libovolného bodu jako středu lze vždy opsat jedinou kružnici." „Daným bodem, ležícím mimo danou přímku, lze vždy vést právě jednu rovnoběžku."

Tato fakta z historie matematiky, to jest že první matematické poznatky byly získány přímo abstrakcí ze skutečnosti, tak jak si to praxe vyžádala, jsou na tolik nepochybná, že je uznávají i všichni rozumní zastánci idealistického pojetí matematiky všech směrů. Uznávají v celku také, že EUKLIDOVY axiomy a postuláty byly utvořeny z podnětů vzatých z praktické geometrie — a že odtud si prakticky odnášely svoji zřejmost. Přece však neuznávají onen všeobecný rys matematiky, který je dán jejím historickým vznikem a který z historických faktů vyvodil ENGELS (*Antidühring*, str. 37) slovy:

„Jako všechny ostatní vědy, vznikla i matematika z potřeb lidí, z měření země a obsahu nádob, z počítání času a z mechaniky. Ale jako ve všech oborech myšlení, i tu se na jistém stupni vývoje zákony, abstra-

*) *Euklidova* Elementa nejsou dílem samotného *Euklida*, ale systematickým shrnutím poznatků celé epochy, která předcházela, až v době *Alexandrijské*.

hované ze skutečného světa, odloučí od skutečného světa a postaví se proti němu jako něco samostatného, jako zákony, pocházející z vnějšku, podle nichž se má svět řídit; tak se to dálo ve společnosti a ve státě — a nejinak se později čistá matematika aplikuje na svět, ačkoli je právě z tohoto světa převzata a představuje pouze část forem jeho složení — a právě jen proto je vůbec aplikovatelná."

Věnujeme se rozvedení těchto *Engelsových* thesí.

(V tomto odstavci budu čerpat z ENGELSOVA „*Původu rodiny, soukromého vlastnictví a státu*" a z B. FARRINGTONOVY „*Vědy ve starém Řecku*" (Rovnost 1950). (Užiji též na jednom místě podnětu z dosud nevydané knihy prof. K. KOUTSKÉHO: *Matematika a marxismus*.)

Je jasné, že deduktivně lze zásadně uvažovat o čemkoli, že lze na jakýchkoli premisách budovat deduktivní systém. Avšak stejně jasné je, že vezmeme-li za premisy libovolné obrazy skutečností, ať již konkretnější, nebo abstraktnější, nenalezneme mezi nimi (resp. mezi vlastnostmi a vztahy, jež jsou jimi zachyceny) vždy souvislostí, které by umožňovaly se deduktivně povznést nad více méně triviální důsledky premis. Ostatně, ani by nestálo za to, deduktivně zkoumat předpoklady, které nejsou dostatečně obecnými, dostatečně trvalými anebo dostatečně často přicházejícími obrazy skutečnosti, ať již více nebo méně idealisovanými. Příliš měnivé předpoklady by také nedovolovaly provádět konfrontace výsledků se skutečností.

Pokud se tedy poznání přírody v předvědeckém stupni nepovzneslo o mnoho nad pouhou registraci konkretních a měnících se po sobě následujících událostí, pokud tedy generalisací a idealisací (což jsou induktivní myšlenkové pochody) theoretické myšlení nepronikło k základním obecným poznatkům o přírodě, potud deduktivní myšlení nemělo na čem se rozvinout a ověřit, neboť se mu nedostávalo srovnání pravdivosti předpokladů s pravdivostí závěrů. (Je to — mimochodem řečeno — další doklad toho, jak indukce je vázána na dedukci a obráceně.) Tedy teprve již poměrně vyvinuté obecné znalosti přírody, které člověk získal již v poměrně vysokém stupni kultury, opatřené písmem k trvalému zaznamenávání takových poznatků, jsou jedním z nutných předpokladů vzniku uvědomělého deduktivního uvažování.

Obecné poznatky o přírodě získal člověk již v raných kulturách starého Egypta a Babylonie, z podnětů nepochybně praktických, jak již o tom byla řeč. Tam se také nahromadila řada praktických aritmetických a geometrických poznatků, které ještě netvořily systém a jichž oprávněnost se prakticky ověřovala u každého z nich zvlášť.

Avšak způsob života v předřeckých kulturách v rovinách velkých řek byl vázán na zemědělství a toto opět na budování a na udržování zavodňovacích staveb, resp. na zvládnutí následků zátop. K tomu bylo třeba organisovaného fysického úsilí velkých mas poddaného lidu, resp. otroků. Individuální, soběstačné zemědělské hospodaření nebylo možné. Organisování gigantických prací stavebních a zemědělských vyžadovalo v rovinách velkých řek za otrokářského řádu vytvoření absolutní a přísně centralistické státní moci, řízené rukou despotického panovníka a prováděné jemu oddanou úřednicko-kněžskou kastou. K tomu bylo nutno obdařit panovníka (zejména Faraona v Egyptě) atributem božství a utvořit přímo náboženskou hrůzovládu (zvláště v Babylonii a Assyrii). Za takového monarcho-theokratického absolutismu nemůže být řeči o aktivní účasti širších vrstev obyvatelstva na řízení státu, o politickém životě vůbec. — Za takových okolností mohly se tedy vědy rozvíjet jen fragmentárně, postupovat od jednoho isolovaného praktického objevu k jinému. Myšlení vězelo zcela v tuhých poutech náboženských představ a předsudků. Filosofie vlastně nebylo.

Objektivní potřeba větších theoretických koncepcí — a potřeba samostatné, jasně deduktivní matematiky již byla dána (hromaděním se jednotlivých isolovaných matematicko-přírodovědeckých objevů). Nebyla však dána politická podmínka svobodného rozvoje myšlení politického a filosofického, protože, za daných předpokladů hospodářské základny, tato podmínka nemohla vzniknout. Snad se nedopustím příliš anekdotického zjednodušení věci, když nemožnost jasného deduktivního myšlení ve starém Egyptě budu ilustrovat na příkladě uvedeného syllogismu o Faraonovi: Jestliže všichni lidé chybují a Farao nikdy nechybuje, pak Farao není člověk. Zde asi absolutní jistota toho, že Farao nechybuje, byla silnější, než jasné logické usuzování, nepodléhajíc žádnému zkoumání. Srovnávání pravdivosti závěru s pravdivostí premis nebylo dovoleno provést a deduktivní uvažování nejspíše — pokud bylo — nemělo bezpodmínečné průkaznosti.

Politický předpoklad, nezbytný vedle objektivní praktické potřeby matematiky jako samostatné deduktivní vědy, byl dán teprve ve starém Řecku.

Staré Řecko bylo sice rovněž otrokářské. Ale rozdrobenost řeckého obyvatelstva do osad, měst a jednotlivých státečků, oddělených horami, resp. mořem, individualisované zemědělství (po rozpadu kmenového zřízení), intensivní zámořský obchod (po zdolání Foenické nadvlády na moři), zámořské osady (kolonie), vyspělá řemeslná výroba, rozrostší se v takřka kapitalistickou výrobu manufakturní — tyto všechny rysy hospodářské a materiální základny — a ještě jistě i mnohé další — vynutily si vznik zcela jiné politické formy, než byla v Egyptě. Jejím nejvyspělejším typem je athénská otrokářská demokracie (po Solonově ústavě).

V této demokracii existovala, pravda, veliká vrstva bezprávných otroků (kteří později tvořili většinu obyvatelstva), ale plnoprávní občané si byli před zákonem rovni a účastnili se — byť i s ohledem na majetek — řízení státu a zejména volby svých zástupců.

Odpovídající náboženské představy starých Řeků, jak známo, nebyly nikterak upjaté. Řečtí bohové představovali docela zřejmě typisované lidské vlastnosti — byli to mohutní, silní lidé, proměnění v idoly, ale mající i mnohé lidské slabosti. Nebylo dobře si je rozhněvat, ale bylo také možno se o ně celkem nestarat. Filosofické myšlení se po prvé osvobodilo od strohých náboženských předsudků a dosáhlo neobyčejné hloubky.

Avšak pro ujasnění vzniku uvědomělého deduktivního myšlení, a tedy i vzniku EUKLIDOVÝCH *Elementů*, je nejdůležitější patrně tato věc: politický život athénské demokracie vyžadoval rozvoj řečnického umění. Vyžadoval, aby kandidáti voleb uměli přesvědčit svoje voliče o správnosti svého programu a aby uměli v diskusi vyvrátit argumenty politického odpůrce. A toto umění argumentovat bylo podstatným podnětem k rozlišování úsudků zřejmých, logicky evidentních, od úsudků pouze plausibilních nebo falešných, při čemž argumentace neunikaly konfrontaci se skutečností.

Tak asi dochází ve starém Řecku k dovršení oněch historických, materiálních podmínek, které vedly k osamostatnění matematiky jako deduktivní theoretické vědy, kde se způsobem co možno samozřejmým a jasným, krok za krokem vyvozují složitější matematické resp. geometrické poznatky postupně ze základních poznatků, t. zv. axiomů, a postulátů, resp. definic. Že tyto prvotní axiomy samy byly bezprostředními idealisacemi skutečností, o tom sotva lze pochybovat.*)

Theoretická logika pak vznikala téměř současně s theoretickou matematikou (PLATO, ARISTOTELES).

Doplňme náčrtek vzniku matematiky jako samostatné deduktivní vědy ještě ze dvou stránek:

Theoretická potřeba vytvořit z matematiky, resp. geometrie ucelený deduktivní systém, nebyla jedinou — a možná ani ne hlavní pohnutkou k poměrné deduktivní ryzosti EUKLIDOVÝCH *Elementů*. Podstatná tu byla potřeba praxe, aplikace. Staří Řekové se přesvědčovali, že v egyptské geometrii jsou i poznatky nesprávné, platné jen přibližně za jistých předpokladů. (Na př., že obsah rovnoramenného trojúhelníka je roven polovičnímu součinu ze základny a ramene. Tento vzorec platí jen přibližně pro velmi vysoké trojúhelníky, a tak ho také Egypťané potřebovali při určování zatopené plochy, resp. nadržené vody.)

To jest, ukázalo se, že některé geometrické poznatky starých Egypťanů v praxi selhávaly. Bylo tedy třeba k zaručení úspěšné aplikace geometrických pouček zkoumat, za jakých předpokladů vlastně poučka platí, bylo třeba zajistit, že nejsou činěny žádné skryté předpoklady. Bylo třeba

---

*) K tomuto zjednodušenému historickému obrazu by bylo třeba mnohé dodat. Tak na př. to, že vládnoucí vzdělaná vrstva ve starořeckých demokraciích se čím dále tím méně věnovala výrobě a obchodu, což mělo za následek nejprve jednostranný geometrický ráz starořecké matematiky (malá účast na obchodu, málo aritmetiky, zalíbení v geometrické kráse). Stupňování tohoto odtržení matematiky od výroby a obchodu se nakonec zhoubně projevilo v omezení rozvoje matematiky, až neschopnost vládnoucí řecké třídy řešit hospodářské a politické problémy vedla k rozkladu starořeckých států a jejich vzdělanosti vůbec.

vědět, kde při selhání theorie a technické aplikace je třeba hledat chybu — a kde ji není třeba hledat — a ani nelze hledat.

Starým řeckým geometrům bylo jasno, že geometrie získaná induktivně, při jejíž aplikaci by bylo třeba v každém jednotlivém případě počítat s možností, že se v praxi objeví chyba theorie, kořenící v samotné geometrii — taková geometrie že by byla pro aplikaci málo platná.

Konečně se brzy ukázalo, že při ryze deduktivním pojímání matematiky se tytéž vztahy, tak zvané strukturní, objevují v nečekaně různých oblastech skutečnosti. Stačí tedy jednou provést matematické úvahy abstraktně a deduktivně přesně, abychom, vyzdvihnuvše obecnou matematickou strukturu jistého druhu skutečných (ovšem vždy více méně idealisovaných) vztahů mezi jistými předměty, měli předem současně připraven nástroj pro stejné získávání dalších poznatků v každém případě skutečnosti, kde budou shledány stejné strukturní předpoklady. Deduktivní přesnost je tedy podmínkou oné relativně mnohem obecnější platnosti a aplikability matematických poznatků, než jakou mají i ty nejobecnější přírodní zákony, jichž obor platnosti musí být omezen na konkretní předměty určitého druhu. To staří Řekové již věděli.

A to jsou tedy praktické požadavky, které si vynutily vznik a neustálé zdokonalování abstraktní deduktivní přesnosti matematiky.

Z jiné strany je vidět praktický původ deduktivní geometrie takto: Vedení důkazů synthetické geometrie je vlastně popisem a logickým rozvíjením konstrukcí (pravítkem, kružítkem). Není to tedy nic jiného nežli theoretické rozvíjení praktické činnosti i za meze jejich technické proveditelnosti, čili jsou to t. zv. myšlenkové pokusy. (Toho vyžaduje již spojování velmi vzdálených bodů, neomezenost poloměrů kružnic a pod.)

Ostatně jasné stopy tohoto „theoreticky experimentálního" původu matematických dedukcí se zachovaly v tradičním matematickém jazyku; říkáme: utvořme si číslo to a to, proveďme s rovnicí změny ty a ty, pak výsledek bude ten a ten.

Tolik tedy k materiálním okolnostem, jimiž z hlediska marxistického vykládáme historicky vznik matematiky jako samostatné deduktivní vědy.

Tím je — doufám uspokojivě — objasněna přiléhavost a správnost základní Engelsovy marxistické materialistické these o matematice, dle níž je matematika vědou o jistých obecných abstraktních a idealisovaných vztazích mezi skutečnými předměty hmotného světa — alespoň pokud jde o nejstarší elementární, resp. t. zv. klasické matematické theorie. Doufám také, že positivní charakter a relativní ucelenost filosofického marxistického pojímání matematiky ve srovnání s pojetím idealistickým je potud ozřejmena.

Pokud jde o matematiku moderní, souvisí bližší osvětlení marxistického pojetí s již zmíněnou otázkou t. zv. libovolné volitelnosti axiomů a s nesnadnou otázkou t. zv. matematické existence. O tom, pokud je to možné bez zvláštních odborných znalostí v matematické logice, bude řeč v následujícím.

7. *O t. zv. libovolné volitelnosti axiomů.*

Z doby Euklidovy skočíme do doby velkých zakladatelů neeuklidovské geometrie, Lobačevského, Bolyaie a Gausse.

Jak známo, tito tři matematikové nezávisle na sobě a téměř současně, s větší či menší dávkou odvahy (u Gausse byla odvaha malá) vytvořili první systémy neeuklidovské geometrie, založené na takových postulátech o rovnoběžkách, které vesměs odporovaly t. zv. pátému Euklidovu postulátu, že totiž jediným bodem mimo přímku lze vést vždy jedinou rovnoběžku. Tím zakončili dlouholetou historii marných pokusů o důkaz onoho pátého postulátu z ostatních postulátů, axiomů a definic.

Objev neeuklidovské geometrie rozrušil vládu Kantova idealismu (apriorismu), dle něhož geometrické axiomy jsou jedinými možnými a nezměněnými základy geometrie. Tento Kantův metafysický názor byl revolučním objevem neeuklidovské geometrie vyvrácen a jeho zkázu dovršil Poincaré svými euklidovskými modely neeuklidovských geometrií, čímž poslední filosofické námitky padly.

Je pravidlem, že idealismus, byv z vědecké theorie vypuzen dveřmi, vrací se do ní oknem v jiné podobě. Tak Kantův apriorismus, dle něhož axiomy euklidovské geometrie patřily k apriorním formám čistého rozumu (jimiž — jak bylo hlásáno — rozum sám formuje amorfní materiál t. zv. „věci o sobě" v předměty v prostoru), byl vystřídán konvencionalismem Poincarého. Jestliže se ukázalo, že některé axiomy euklidovské geometrie možno změnit v jejich pravý opak, pak byl rázem z toho učiněn závěr, že axiomy jsou libovolně volitelné konvence (úmluvy), jejichž jediným omezením je požadavek, aby si logicky neodporovaly. Objekty matematiky jsou volnými výtvory rozumu a existují, pokud předpoklad jejich existence nevede k logickému sporu.

Je nejprve potřebí připomenout zásadní obtíž konvencionalismu při výkladu aplikability matematiky na skutečnost, jak již o tom byla řeč. Zatím co Kantova koncepce v této věci byla uzavřena, a aplikabilita matematiky pochopitelná, stává se v konvencionalismu záhadou, které lze sotva uniknout tím, že se matematik o aplikace prostě nebude starat. Filosofická posice konvencionalismu, jakožto subjektivně zabarveného idealismu, je všeobecně vzato slabší a reakční ve srovnání s objektivním idealismem Kantovým, který nad to představoval určitý kompromis s materialismem (v době, kdy buržoasie byla ještě společensky pokrokovou vrstvou).

Stručné vyjádření marxistického materialistického výkladu možnosti různých axiomatických systémů, které vznikají náhradou jistých axiomů axiomy jim odporujícími, je asi toto.

Všechny axiomatické systémy, které kdy dosud byly s úspěchem zkoumány v matematice, byly získány abstrakcí, resp. idealisací z modelů, ať již tyto modely byly konkrétně skutečné, nebo sestávaly z vlastností a vztahů předmětů, již dříve zkoumaných v jiné matematické theorii a to:

1. přímo, vytčením strukturních vlastností modelu,

2. nepřímo, dodatečnou modifikaci axiomatického systému, získaného sub 1 tím, že některý z původních axiomů se vynechá nebo nahradí novým axiomem, který starému axiomu logicky odporuje.

Pokud jde o případ 1., jeho materialistické chápání je jasné.

Jak a kdy došlo k modifikacím sub 2?

Tehdy, když později modifikované axiomy byly takové, že jejich zřejmost, jakožto idealisované skutečnosti, bylo lze důvodně uvést v pochybnost, jestliže bylo přírodovědecky představitelné, že zkoumaný axiom není uspokojivým vystižením skutečnosti. Tak GAUSS, jak známo, přímo měřil součet úhlů v astronomických trojúhelnících (tvořených ze světelných paprsků), protože patrně nebyl přesvědčen o tom, že skutečný prostor se řídí zákony euklidovské geometrie. (Nezjistil odchylek od 180° mimo meze pozorovacích chyb.) I když ne vždy jsou hluboké podněty, vedoucí k modifikaci abstrakcí získaného systému axiomů, již dnes tak jasně svázány se skutečností, jako je tomu v případě neeuklidovské geometrie, přece konec konců vždy přirozená, obsažná (nikoli jen formální) theoreticky zajímavá, to jest hluboké matematické poznatky přinášející modifikace axiomatického systému není nikdy náhodná a vždy směřuje k lepšímu poznávání hmotné skutečnosti. Povrchní, toliko formální modifikace axiomatických systémů, tohoto rysu postrádající, ostatně rychle hynou na podvýživu. Jiná je otázka, jak si vyložit současnou možnost dvou axiomatických systémů, z nichž v jednom odporují axiomy axiomům druhého, s hlediska dialektického materialismu, když obojí jsou idealisací a abstrakcí z jedné a téže skutečnosti.

K tomu stačí říci, že tato okolnost způsobuje sice obtíže metafysickému materialismu, ale nikoli dialektickému materialismu, který pokládá poznání za proces postupného a nikdy neukončeného přibližování se skutečnosti a zobrazování věcí z různých stran.

S hlediska dialektického materialismu je naopak snadno pochopitelné, že jedna a táž skutečnost při různém přiblížení a z různých stran pozorována, jeví některé protichůdné vlastnosti. Konkretní analogie a triviální příklady na to jsou každému běžné. (Třebas hmotný trojúhelník jeví určitou plochu; jestliže však naň hledíme v jeho rovině, plochu nejeví, jeví se jako úsečka.)

K samotnému požadavku t. zv. libovolné volitelnosti axiomů můžeme ještě dodat toto:

Se svobodnou volbou axiomů je to podobné, jako s osobní svobodou občana v kapitalistické demokracii. Tato svoboda je sice formálně proklamována, avšak fakticky je ilusorní, protože jí může užít jen ten, kdo na to má, a kdo na to má, ten se neodvolává na proklamace.

Neméně ilusorní je svoboda při volbě axiomů, jestliže ovšem mají axiomy k něčemu být. Nemá-li matematik docházet k plochým a bezvýznamným výsledkům, má-li požadavku svobodné volby axiomů nějak skutečně použít, pak musí navazovat na úhrn dosavadní matematiky — ať již rozvíjí myšlenky svých předchůdců a současníků, nebo je kritisuje. Je tedy zařazen do dějinného proudu vývoje matematiky, ať chce, či ne a nemůže si dělat naprosto co se mu zlíbí (opakuji — chce-li ovšem k něčemu kloudnému dojít).

Nadto celý vývoj matematiky je ve svých základních tendencích spoluurčován vývojem materiální základny společnosti. I toto podstatně omezuje *faktický* výběr axiomů.

Lze tedy říci o požadavku t. zv. libovolné volitelnosti axiomů úhrnem z materialistického marxistického stanoviska asi toto:

Pokud je tento požadavek namířen proti apriorním předsudkům jakéhokoli rázu, pokud se jím chce vyjádřit jen tolik: Žádný systém axiomů, k němuž jsme se dostali v matematice přirozenou cestou, který není isolován od ostatní matematiky, ani od skutečnosti, který je s to se rozvinout do hloubky, nemá být apriori vyloučen ze zkoumání — potud proti tomuto požadavku t. zv. svobodné volby axiomů není námitek. Ve všem, co je nad to, je ilusorní a falešný.

8. *O t. zv. matematické existenci.*

Nyní se obraťme k otázce bezespornosti axiomatických systémů a k otázce t. zv. matematické existence na něm založené.

Jde o to, zda je třeba zásadně oddělovat pojem reálné existence (v hmotném světě) od pojmu matematické existence, nebo zda je takové principiální oddělování zbytečné a umělé, protože jde v podstatě o tutéž a jedinou reálnou existenci z různých hledisek — jak to pojímáme v marxistickém materialismu.

Pokusím se stručně objasnit, pokud je to možné, při nesnadnosti této subtilní otázky, jak marxistické materialistické stanovisko je i tu jednak přirozené, jednak i vědecky progresivní, na rozdíl od stanoviska idealistického.

Dle názoru Poincarého, který sdílejí všichni idealisticky smýšlející matematikové, matematické objekty, o jejich vztazích se hovoří v nějakém systému axiomů, existují, jakmile jen jsou příslušné axiomy bezesporné. — Ale jak zjistit bezespornost systému axiomů?

K tomu máme jen dva základní prostředky: 1. *Formální důkaz bezespornosti*. 2. Důkaz bezespornosti udáním *modelu* axiomatického systému.

Pohovořme stručně o tom, co je to formální důkaz bezespornosti, přesně důkaz formalisované bezespornosti.

Důkaz formalisované bezespornosti probíhá takto: Nejprve matematické axiomy a logické (úsudkové) principy, jež vystupují v dané theorii, se hledí vystihnout formulemi a logické usuzování se hledí převést v přesně předepsané transformace formulí. Jde o to ukázat, že mezi takto formálně dokazatelnými formulemi nemůže se vyskytovat formule tvaru „*A* a non*A*“ (kde *A* značí tvrzení).

Zde jsou ovšem dvě zásadní nesnáze. Předně není nikdy naprosto zaručeno, že jsme formalisovali veškery obsahové deduktivní a definiční kroky, jichž v dané matematické theorii je anebo bude zapotřebí; ba u některých složitějších theorií, jako je na př. analysa, je i nesnadné zajistit, že jsme formalisovali veškeré úsudky a definice, jež byly v takové theorii již skutečně učiněny. Má tedy potud takový důkaz formalisované bezespornosti vždy jen relativní význam: pokud se omezíme na tyto a tyto předem vytčené prostředky usuzování a definování, máme zaručeno, že nedojdeme k logickému sporu.

Druhá potíž je v tom, že důkaz formalisované bezespornosti dané matematické theorie nutno vésti pomocí jiné matematické theorie, jejíž bezespornost musíme již znát. Ke všemu důkazové prostředky takové matematické theorie, které užíváme k důkazu bezespornosti dané matematické theorie (dle již zmíněných výsledků GÖDELOVÝCH) nutně vycházejí z rámce důkazových prostředků, jež byly vyhrazeny samotné dané matematické theorii. Není tedy formalisace bezespornosti zásadním řešením problému, nýbrž nanejvýš jeho převáděním z vyšetřované matematické theorie na její, jak se říká, metatheorii, jíž k takovému vyšetřování užíváme.

Zbývá tedy pohovořit o tom, co je to vlastně důkaz bezespornosti axiomatického systému udáním jeho *modelu*. Jde o to ukázat, že takový model musí být, konec konců, vždy zbudován pomocí skutečně, objektivně existujících hmotných předmětů.

Musíme rozlišovat dva případy:

a) daný axiomatický systém má model konečný,
b) daný axiomatický systém nemůže být realisován pomocí konečného počtu individuálních věcí.

V případě a) je materialistické hledisko na věc celkem nesporné a jasné: konečný počet věcí, jež mají být nositely vztahů charakterisovaných abstraktně v systému axiomů, lze si vždy představit jako reálně existující v čase a prostoru, lze je pomocí smyslů přehlédnout (alespoň theoreticky), jak připouštějí sami idealisté.

Avšak hlubší, zajímavější a důležitější partie matematiky vesměs mají co činit s nekonečným počtem předmětů, jde tedy především o případ b).

Zde, jak tvrdí idealisté, nelze nekonečný model považovat za daný ve skutečnosti pomocí zkušenosti, poněvadž nekonečno prý nikde není v názorné zkušenosti dáno. — Jak tedy je nekonečný model axiomatické theorie (zbudovaný na nekonečně mnoha předmětech) možno udat (dle idealistického názoru)? Nekonečný model matematické theorie je třeba vytvořit z předmětů jiné matematické theorie, tak jako na př. číselný (analytický) model obyčejné synthetické geometrie poskytuje analytická geometrie nebo tak jako na př. Poincaré dokázal bezespornost neeuklidovských geometrií za pomoci euklidovské geometrie svými euklidovskými modely neeuklidovské geometrie.

Avšak tím se problém neřeší zásadně, nýbrž převádí se bezespornost jednoho axiomatického systému na druhý, u něhož musí být již známa.

Jaké je tu tedy východisko, po nezdaru formalistického řešení, o němž byla již řeč?

Je to onen idealistický deus ex machina, totiž intuice jakožto nadsmyslný zdroj matematického poznání, kterému je vždy přístupno to, co se zdá být nedostupné zkušenosti a smyslovému názoru. Základní matematické theorie, jako je theorie přirozených čísel, ale i theorie reálných čísel, mají dle Brouwera modely, které jsou dány bezprostředně intuicí.

Je zbytečné opakovat tu již jednou uvedené důvody, ozřejmující protivědeckost a zpátečnickost takového řešení otázky. Pokud se týče idealistického přesvědčení, že nekonečno v žádné podobě nemůže být nazíráno pomocí smyslů, vyrovnal se s ním již v podstatě Engels v *Dialektice přírody*.

Marxistické materialistické hledisko je stručně vyjádřeno takovéto:

Nekonečné modely matematických theorií jsou dány ve skutečnosti, v aplikacích a v původu elementární matematiky (aritmetiky a geometrie). Čím přesněji, ve smyslu kriteria dosavadní lidské praxe, vystihují matematické theorie skutečné vztahy mezi věcmi, resp. abstraktnější theorie struktury těchto vztahů, s tím větším oprávněním můžeme mít předměty té které matematické theorie za skutečně existující, i když *těmito předměty nejsou konkretní věci v čase a prostoru, ale obecné vztahy mezi věcmi.* Je ovšem samozřejmou pravdou, že nemůžeme přehlédnout nekonečně mnoho jednotlivých od sebe odlišných skutečných věcí v konečném čase, jestliže čas potřeby k registraci jednoho předmětu neklesne pod jistou hranici. Můžeme si však v konečném čase představit proces takového přehlížení na př. u přirozené posloupnosti $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1, \ldots$ tak názorně, jako cokoli jiného. Můžeme si, ba musíme si v konečném čase představit i sečtení nekonečně mnoha členů nekonečné konvergentní řady a také to děláme. Pro marxistického materialistu to není žádný div: dialektické materiální myšlení i v matematice je proces, obrážející procesy, které se odehrávají přímo v přírodě. Na tom nemění ničeho nutnost, aby tento dialektický proces představy nekonečna (v různých tvarech) byl v zápětí kontrolován přesným logickým jeho zachycením, rozčleněním a uspořádáním.

Matematická existence je tedy totéž co existence v reálném světě, ovšem je to existence vztahů, vlastností, či teprve jejich struktur, tedy předmětů, jež jsou povahy velmi obecné. Matematika dokazuje deduktivně (nikoli pokusným stykem se skutečností) a konečně matematika ve svých nejvyšších partiích předbíhá nutně bezprostřední potřeby aplikace. *Musí tedy být existence objektů matematiky nejprve theoreticky, deduktivně seznána jako logicky možná* (*přípustná*). Aniž bychom zacházeli do jemných a odborných problémů, jakými cestami lze dokázat možnost matematického objektu dříve, než došlo k jeho nalezení ve skutečnosti, můžeme tedy říci: Ve smyslu uvedené II. Marxovy these o Feuerbachovi i pro předmětnost matematického myšlení je konečným kriteriem zkušenost, praxe, *i když nikoli vždy ihned a nikoli vždy bezprostředně.*

Marxistický materialismus vychází z přesvědčení, že logicky zjištěná možnost existence i toho nejabstraktnějšího matematického objektu je nutně dříve nebo později, v té nebo v oné formě převedena ve skutečnost a tak potvrzena — jestliže ovšem si úhrn vědy pod nátlakem praxe nevyžádá revisi deduktivních prostředků, jichž bylo užito k theoretickému matematickému zajišťování možnosti existence takového matematického objektu. To vyplývá ze zásadní materialisticky pojímané korespondence mezi skutečností a myšlením jakožto jejím obrážením. — Je samozřejmé, že těchto několik thesí nemůže vyčerpat složitou problematiku matematické existence (která je ostatně dosud v intensivním vývoji) do všech důsledků. Ale zásadní materialistické marxistické pojetí je, doufám, dostatečně jasné. Je snad ještě třeba k němu dodat toto:

Sledovat, jak bezespornost jisté theorie, resp. její části v matematice možno převést na bezespornost jiné theorie, poskytuje často hluboké a zajímavé poznatky v matematice. Avšak poukazuje to na druhé straně i k tomu, že zásadně nelze dobře uvažovat o bezespornosti jedné isolované matematické theorie. Spíše se dá říci, že *je třeba bezespornost v matematice chápat jako bezespornost celé matematiky* v jejím úhrnu. Všeobecně vzato, z marxistického materialistického hlediska nemá však problém a důkaz bezespornosti matematiky onoho zásadního až metafysického významu jakési absolutní „conditio sine qua non", jaký je mu přikládán v idealistickém, zvláště pak v Hilbertově pojetí matematiky. Takové pojímání problému bezespornosti je marxismu cizí a pramení konec konců v introvertované posici idealistického filosofa, v níž jde o to, aby, tak říkajíc, theoretické myšlení opodstatnilo sebe sama ze sebe sama.

Matematika ani nestojí ani nepadá s důkazy bezespornosti, třebaže je nutno, aby byla proti možnosti paradoxů neustále na stráži. Tolik z marxistického, dialekticky materialistického hlediska, pokud se týká problémů základů matematiky, matematické axiomatiky a matematické existence v současné matematice.*)

---

*) Je jasné, že problém není těmito několika poznámkami a thesemi vyčerpán. Zejména by bylo potřebí dodat materialistický výklad jedné z nejdůležitějších poučeк theorie axiomatických systémů, t. zv. věty *Löwenheim-Skolemovy*, jež bývá idealisticky skresleně vykládána. — To však přesahuje rámec našeho článku.

Můžeme tedy tento odstavec uzavřít takto.

Marxistická zásadní charakterisace matematiky jako vědy o velmi obecných, resp. idealisovaných vztazích mezi předměty reálného světa, zůstává v platnosti i pro moderní matematiku. Pokud jde ovšem *o doslovné* znění první, na počátku uvedené ENGELSOVY these, toto zásadní marxistické materialistické pojímání matematiky charakterisující, je třeba uvážit, že se mohlo *do důsledku doslovně* vztahovat — a také se právem vztahovalo — toliko na matematiku, kterou mohl v době před 100 lety ENGELS — sám nematematik — znát. Je samozřejmé, že se od té doby matematika nemálo rozvinula a rozrostla, takže omezení předmětu matematiky na „kvantitativní vztahy a formy prostoru", je třeba chápat historicky, tak, jak bylo míněno a podmíněno.

Avšak i doslovné znění ENGELSOVY materialistické marxistické charakterisace matematiky lze rozšířit a aktualisovat.

V klasické matematice, kterou měl (a jedině mohl mít) na mysli ENGELS, representuje vlastně *analysa* a ta část matematiky, jejímiž základními objekty jsou čísla, *kvantitativní* stránku matematiky a *geometrie* (synthetická) *kvalitativní* stránku matematiky.

V moderní matematice však dochází k novým výzkumům axiomatických theorií kvalitativní povahy i k novým kvantitativním charakterisacím prostorových forem. Díváme-li se tedy na ENGELSOVU charakterisaci matematiky z hlediska specifického projevu protikladu mezi kvantitativním (číselným) a kvalitativním (nečíselným), můžeme ENGELSOVU formulaci aktualisovat takto:

Abstraktní axiomatisované theorie v moderní matematice (na př. topologie, theorie grup), které jsou nečíselné povahy, tvoří nyní kvalitativní stránku matematiky (která dříve byla omezena na geometrii). Analysa a theorie čísel jakožto theorie budované na číselném materiálu tvoří nadále kvantitativní stránku matematiky. Zatím co splývání obou protichůdných složek se v klasické matematice uskutečňovalo téměř výhradně na půdě analytické geometrie, v současné matematice se uskutečňuje v různých číselných *kvantitativních representacích kvalitativních axiomatických systémů pomocí vztahů mezi čísly.* (Na př. v representacích abstraktních grup grupami číselných matic, ve vnořování abstraktních topologických prostorů do HILBERTOVA prostoru nebo do TICHONOVOVY krychle a pod.)

9. *K dějinné úloze idealismu v matematice.*

Zbývá říci několik slov o dějinné úloze idealismu v matematice.

Bylo by naprosto chybné, protože nehistorické, kdybychom šmahem odsoudili účast idealistických tendencí na rozvoji matematiky jako reakční a škodlivou.

Rozebíráme-li tyto idealistické tendence, musíme vidět, že vedle takových, které jsou a odjakživa byly vědecky i společensky reakční a které vždy zaváděly matematiku na pokraj mysticismu, vystupovaly v idealistickém rouše i tendence v podstatě pokrokové a pro vědecký rozvoj matematiky potřebné. Tyto druhé byly vesměs projevy oposice vůči vulgárnímu, metafysickému materialismu, jehož filosofická koncepce byla v matematice mnohem méně udržitelná, než v popisných přírodních vědách. Proti vulgárně materialistickým, resp. i omezeně empiristickým tendencím ve filosofii všech dob musela matematika vybojovat svůj zápas o osamostatnění a metodologické ujasnění. Není divu, že za daných historických okolností, nebyl-li, anebo nemohl-li ještě být znám dialektický materialismus, dál se tento boj o osamostatnění matematiky a o matematickou přesnost a hloubku abstrakce z části pod idealistickou vlajkou. Máme tu opět jistou obdobu mezi vývojem vědy a vývojem společnosti. Pokrokové společenské ideje ve středověku vystupovaly v náboženském rouše — na př. v naší husitské revoluci. Podobně boj o pokrok v matematice si často bral na sebe formu a hesla idealistická.

Je třeba v této souvislosti uvésti hluboká slova LENINOVA (*K otázce dialektiky*, *Materialismus a empiriokriticismus*, s. 283 č. př.):

„Filosofický idealismus jest *jen* (podtr. LENINEM) nesmyslem s hlediska materialismu hrubého, prostého, metafysického. Naopak, s hlediska dialektického materialismu jest filosofický idealismus *jednostranný* (podtr. LENINEM), přehnaný vývoj (nafukování, nabubřování) jednoho rysu, stránky, hranice poznání až k absolutnu, odtrženému od hmoty, od přírody, a zbožněnému."

Je ovšem zapotřebí vidět, že idealistická vlajka v zápase o deduktivní ryzost, hloubku a rozvoj matematiky jako samostatné vědy je již dosti dlouho přežitkem (alespoň po CAUCHYHO reformě analysy) — a dnes, jak se ukazuje, dokonce i škodlivým, reakčně využívaným a uměle křiseným přežitkem.

Je třeba dialekticko-materialistického pojímání matematiky pro matematiku samu, aby konec konců nedocházelo k onomu zhoubnému nafukování, nabubřování stále abstraktnějších, ale po případě i při tom plochých matematických úvah, s jakými se setkáváme na př. v části současné matematické odborné časopisecké literatury v USA. Neboť zatím co idealistické tendence klasických matematiků byly udržovány v rozumných mezích tím, že tito velicí matematikové vesměs bývali i velkými fysiky a tedy v tom smyslu i spontánními filosofickými materialisty (i když to nevždy byli ochotni přiznat) — není již dnes takováto kompensace idealistických tendencí možná. Matematika i fysika se tak příliš rozrostly, že není v lidských silách být odborníkem v celé matematice, na tož dělat zároveň i fysiku. Za takových okolností je zdravé filosofické dialekticko-materialistické uvědomění pro matematika zvláště potřebné. Ono je oním vitaminem, z něhož se sice tělo matematiky přímo nestaví, ale který je k trvalému zdravému vývoji matematiky nejvýš potřebný.

A je třeba i dialekticko-materialistického chápání matematiky a jeho neustálého propracovávání — vzhledem k tomu, jak se znovu křísí dnes již vyloženě reakční zbytky starých idealistických filosofických systémů (opatřených po případě novými učenými nápisy) a jak hledají v matematice, resp. ve filosofii matematiky — „ideovou" oporu současného imperialistického kapitalismu.

I z matematického „útočiště" nastupuje konec konců reakční útočná idealistická filosofie v USA ke své úloze v ideologické přípravě fašismu a útočné války. A tomuto zneužívání vědy jsme povinni čelit.

10. *Souhrn.*

Pokusme se shrnout výsledek všech našich úvah do několika stručných thesí o matematice a logice (nikoli tedy snad úplných definic, jež v provždy dokonalé formě neexistují), charakterisujících marxistické materialistické pojetí logiky a matematiky v jeho současné podobě.

Logika je theorie způsobů, jakými vycházejíce z daných obrazů skutečnosti, t. zv. předpokladů, pouhým uvažováním hledáme nové obrazy skutečnosti; při tom jde o to, aby výsledek uvažování — závěr — se shodoval se skutečností pokud možná tak dobře, jako předpoklady.

Má-li být již pouhým *samotným způsobem usuzování zaručeno,* že závěr je právě tak věrným obrazem hmotné skutečnosti, jako jím je předpoklad, pak je nutné, aby během usuzování bylo užíváno výlučně těch znalostí skutečnosti, jež jsou výslovně vyjádřeny v předpokladech. Takovým usuzováním, t. zv. *deduktivním,* se zabývá logika *dedukce,* také někdy ne zcela výstižně *formální logika.*

T. zv. formální logika je ta část logiky, která vyšetřuje způsoby sestrojování *nových obrazů jisté části hmotné skutečnosti — závěrů — výlučně z daných obrazů téže části hmotné skutečnosti,* aniž by tedy byly nevědomky přibírány jiné obrazy, ať již téže, nebo jiné skutečnosti.

Správnost logických principů dedukce spočívá na jejich ověření úhrnem konfrontací výsledků deduktivního usuzování se skutečností pomocí opakované praxe, experimentu, během celého dosavadního života lidstva.

I principy dedukce se vyvíjejí, doplňují a zdokonalují ve smyslu neustálého přibližování se k naprosté objektivní správnosti, ovšem nejpomaleji ve srovnání s ostatním poznáním.

Matematika je deduktivní sledování a rozvíjení obecných vztahů mezi předměty hmotného, reálného světa. Proto, že tyto vztahy, t. j. předměty matematiky, jsou vzaty ze skutečnosti, proto je matematika aplikovatelná na skutečnost. Proto, že matematika postupuje deduktivně, proto matematika skýtá relativně jisté, bezpečné, ovšem ale i omezené poznatky o skutečnosti. Základní matematické vztahy, z nichž vycházíme, nalézáme jako přibližně adekvátní obrazy skutečnosti. Bývají vyjádřeny v několika axiomech.

Vlastním předmětem matematické theorie tedy jsou buď systémy skutečných vztahů anebo v abstraktnějších theoriích *typy takových systémů* reálných vztahů. Tedy předmětem matematiky je reálná látka ve skutečném světě, třebaže vlastním předmětem matematiky nejsou jednotlivé individuální konkretní reálné věci, které jsou nositeli řečených vztahů. Jednotlivé konkretní věci v přírodě a ve společnosti jsou vlastní látkou zkoumání různých přírodních věd. Matematika má k těmto vědám úzký vztah, pokud v nich lze matematiku aplikovat. Matematika ovšem nemůže žádnou, i tu nejexaktnější přírodní vědu nahradit, jsouc jejím pouhým pomocníkem. Ale právě proto, že matematika nejedná o konkretních, individuálních skutečných předmětech (nýbrž teprve o jejích vztazích) — právě proto je matematika tak mnohostranně obecně použitelná.

Matematika vznikla osamostatněním z přírodních věd. První matematické poznatky byly získány cestou pokusnou. Ale i již jako ryze deduktivní věda se matematika vždy znovu obrací přímo ke skutečnosti, aby načerpala nové látky a nových podnětů, a ke skutečnosti se opět v podobě aplikací vrací.

Matematika však potřebuje také zkoušet dalším rozvíjením a prohlubováním svých základních themat další možnosti a sílu deduktivního matematického myšlení, jakožto nástroje budoucího hlubšího pronikání do hmotné objektivní skutečnosti. Matematika tedy nutně ve svých abstraktních partiích předbíhá svým vývojem bezprostřední potřebu techniky a přírodních věd. Je ovšem zavázána — a to nejen společnosti, ale i sobě samé — aby ve smyslu II. Marxovy *these o Feuerbachovi* — ukázala dříve či později, více či méně bezprostředně, svoji moc a pravdivost stykem se skutečností, v praxi. (Dosud se jí to vždy podařilo.)

Historické zkušenosti (na př. úpadek starořecké matematiky) ukazují a marxistické pojetí matematiky vykládá, že matematika, ztrativši na delší dobu všechen kontakt s praxí, se skutečností, by ustrnula ve svém vývoji a sama posléze by odumřela na nedostatek hlubších podnětů a látky, dříve než by se jí podařilo se od skutečnosti odtrhnout.

Naopak matematika, byť i velmi abstraktní, která je ve styku (třebas prostřednictvím elementární, přímo aplikované matematiky) se skutečností a praxí, má zaručen rozvoj a vývoj nekonečným bohatstvím stále nových a hlubších podnětů, jež přináší stále hlubší poznávání skutečnosti.

Tolik pokud jde o *marxistické materialistické, resp. historicko-materialistické pojímání matematiky.*

Pokud jde o *dialektickou marxistickou methodu*, možno věc stručně shrnout takto:

Matematická invence (tvořivost) je dána materiálně dialektickým myšlením. Materiálně dialektické myšlení ve své mnohotvárnosti, pružnosti, zkoumání všestranných souvislostí, je onou silou, vedoucí — za ustavičného prohlubování pojmů, dalším pronikáním do skutečnosti —

k novým, smělým matematickým poznatkům. Matematický objev je však relativně potvrzen teprve tehdy, až je proveden jeho důkaz, až dialektický, myšlenkový proces, vedoucí od předpokladů k tvrzením, je deduktivně zachycen a uspořádán v řadu na sebe navazujících přesných logických kroků. Logický důkaz je kontrolou správnosti *jednotlivé* matematické poučky. Tak to také vyžaduje praktická aplikace (přesnost) matematických pouček.

Avšak kontrola *celé* logiky a *celé* matematiky, nejvyšší kontrola, je *v úhrnu celého dosavadního užívání logiky a matematiky na poznání a ovládání hmotné skutečnosti.*

Některé idealistické tendence v pojímání matematiky svého času vystupovaly jako výraz v podstatě pokrokové oposice proti vulgárně metafysicky materialistickým a omezeně empiristickým názorům, které bránily osamostatnění a rozvoji matematiky do hloubky. V současné době jsou, kdysi relativně pokroková a do idealistické fraseologie zahalená hesla zpátečnickým přežitkem a dialekticko-materialistické chápání matematiky požadavkem vědeckého i společenského pokroku.