Časopis pro pěstování matematiky

Jan Mařík

Základy theorie integrálu v Euklidových prostorech. [II.]

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 77 (1952), No. 2, 125–145

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117026`

# ZÁKLADY THEORIE INTEGRÁLU V EUKLIDOVÝCH PROSTORECH

JAN MAŘÍK, Praha. 517

(Pokračování.)

74. Jestliže $A \subset E_m$, $B \subset E_n$, pak $A \times B$ znamená podle definice jistou množinu dvojic, z nichž každá má na prvním místě $m$-tici a na druhém místě $n$-tici čísel. Obyčejně však budeme symbolem $A \times B$ v tomto případě rozuměti množinu číselných $m + n$-tic, z nichž každá vznikne tím, že za každou $m$-tici dáme příslušnou $n$-tici. Jsou-li pak $A$, $B$ intervaly, je $A \times B$ opět interval ($m + n$-rozměrný). Je-li naopak $K$ $m + n$-rozměrný interval, $K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_{m+n}$, pak existují $m$-rozměrný interval $I$ a $n$-rozměrný interval $J$ tak, že $K = I \times J$; zřejmě

$$I = K_1 \times \ldots \times K_m,\ J = K_{m+1} \times \ldots \times K_{m+n}.$$

75. *Buď $K$ (resp. $L$) m-rozměrný (resp. n-rozměrný) interval. Buď $G$ (resp. $H$) nezáporná superaditivní funkce v $K$ (resp. v $L$). Buď $\Gamma$ funkce intervalu v $K \times L$, určená vztahem*

$$\Gamma(I \times J) = G(I)\, H(J)$$

*pro $I \subset K$, $J \subset L$.*

*Pak je $\Gamma$ superaditivní v $K \times L$.*

Důkaz: Nechť $(I_1 \times J_1) \dotplus (I_2 \times J_2) = I_3 \times J_3$. Podle věty 6 je na př. $I_1 + I_2 = I_3$, $J_1 = J_2 = J_3$; je ovšem dokonce $I_1 \dotplus I_2 = I_3$, takže $\Gamma(I_1 \times J_1) + \Gamma(I_2 \times J_2) = G(I_1)\, H(J_1) + G(I_2)\, H(J_2) = (G(I_1) + G(I_2)) \,.\, H(J_3) \leqq G(I_3)\, H(J_3) = \Gamma(I_3 \times J_3)$.

Poznámka: Podobná věta ovšem platí také pro nezáporné subaditivní funkce a pro aditivní funkce libovolného znaménka.

76. Objemem intervalu nazveme součin délek jeho hran. V jednorozměrném případě je „objem" ovšem délkou; víme, že délka je aditivní funkce. Z věty 75 a poznámky k ní pak plyne indukcí, že i pro více rozměrů je objem aditivní funkcí. Značí-li funkce $G$ objem, pak integrál tvaru $\int f \,\mathrm{d}G$ nazveme integrálem objemovým nebo též obyčejným.

77. (Ponechme označení věty 75.) *Buď $f$ bodová funkce v $K \times L$;*

*pro $x \in K$ buď $f_x$ bodová funkce v $L$, určená vztahem $f_x(y) = f(x, y)$. Buď $p$ funkce v $K$, pro niž platí $p(x) = \overline{\int_L} f_x \, dH$. Pak je*

$$\overline{\int_K} p \, dG \leqq \overline{\int_{K \times L}} f \, d\Gamma.$$

Důkaz: Buď $M$ majoranta funkce $f$ (vzhledem ke $\Gamma$). Každé dvojici $x$, $J$, kde $x \in K$ a kde interval $J$ je částí $L$, přiřadíme číslo $D(x, J)$ takto: Zvolíme $J$ a utvoříme funkci $N_J$ (superaditivní funkci v $K$) předpisem

$$N_J(I) = M(I \times J)$$

a položíme

$$D(x, J) = \underline{N_J}(G, x, K).$$

Pro $x \in K$ buď $D_x$ funkce intervalu v $L$, určená vztahem

$$D_x(J) = D(x, J).$$

$\underline{D_x}(y)$ bude ovšem značit $\underline{D_x}(H, y, L)$. Dokážeme nyní, že

$$\underline{D_x}(y) \geqq \underline{M}(x, y) \quad (= \underline{M}(\Gamma, [x, y], K \times L)); \tag{$\alpha$}$$

odtud vyplyne, že platí

$$-\infty \neq \underline{D_x}(y) \geqq f(x, y) = f_x(y). \tag{$\beta$}$$

Předpokládejme na okamžik, že je $\underline{D_x}(y) < \underline{M}(x, y)$. Zvolme $c$, $\underline{D_x}(y) < c < \underline{M}(x, y)$. Pak existují $J_n \to y$, $J_n \subset L$ tak, že platí

$$\{D_x(J_n) : H(J_n)\} < c, \text{ tedy } D_x(J_n) < c\, H(J_n) \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

Podle definice $D_x(J_n) = D(x, J_n)$ tedy existuje interval $I_n$, $x \in I_n$, $d(I_n) < \frac{1}{n}$, že $\{M(I_n \times J_n) : G(I_n)\} = \{N_{J_n}(I_n) : G(I_n)\} < c \, H(J_n)$, $M(I_n \times J_n) < c\, G(I_n)\, H(J_n)$, $\{M(I_n \times J_n) : \Gamma(I_n \times J_n)\} < c$. Ale $I_n \times J_n \to [x, y]$, tedy $\underline{M}(x, y) \leqq c$. To je spor, který dokazuje, že platí ($\alpha$) a tedy i ($\beta$).

Dokážeme nyní, že pro každé $x$ je funkce $D_x$ superaditivní. Nechť tedy $J_1 \dotplus J_2 = J_3 \subset L$. Máme dokázat, že platí

$$D_x(J_1) + D_x(J_2) \leqq D_x(J_3), \tag{$\gamma$}$$

má-li součet nalevo smysl. Předpokládejme tedy, že $D_x(J_1) > -\infty$, $D_x(J_2) > -\infty$, $D_x(J_3) < \infty$. Zvolme $I_n \subset K$, $I_n \to x$ tak, aby

$$\{M(I_n \times J_3) : G(I_n)\} \to D(x, J_3).$$

Je-li od jistého indexu $G(I_n) > 0$, pak ze vztahu

$$M(I_n \times J_1) + M(I_n \times J_2) \leqq M(I_n \times J_3) \tag{$\delta$}$$

plyne

$$\{M(I_n \times J_1) : G(I_n)\} + \{M(I_n \times J_2) : G(I_n)\} \leqq$$
$$\leqq \{M(I_n \times J_3) : G(I_n)\};$$

vybereme nyní takovou posloupnost, aby oba členové nalevo měli limitu a dostaneme snadno ($\gamma$).

Za daných předpokladů nemůže však platit $G(I_n) = 0$ pro nekonečně mnoho $n$; vybráním bychom dosáhli toho, že by platilo $G(I_n) = 0$ pro každé $n$ a ze vztahů $D_x(J_i) > -\infty$ $(i = 1, 2)$ by pak plynulo, že platí od jistého indexu $M(I_n \times J_i) \geqq 0$ a podle ($\delta$) $M(I_n \times J_3) \geqq 0$, tedy $M(I_n \times J_3) > 0$, tedy $D_x(J_3) = \infty$.

Z ($\beta$) a ($\gamma$) plyne, že je $D_x$ majorantou funkce $f_x$; je tedy $\overline{\int\limits_L} f_x \, \mathrm{d}H = p(x) \leqq D_x(L) = D(x, L)$. Víme (viz 32), že $D(x, L) > -\infty$ pro každé $x$; při pevném $L$ je $D(x, L)$ dolní derivací funkce $N_L(I) = M(I \times L)$ v bodě $x$. Funkce $N_L$ je tedy majorantou funkce $p$ a platí proto $\overline{\int\limits_K} p \, \mathrm{d}G \leqq N_L(K) = M(K \times L)$.

Odtud věta snadno plyne.

78. Ponecháme-li označení a předpokládáme-li ještě, že $f \in \mathfrak{P}(\Gamma, K \times L)$, pak z předešlé věty (a z věty k ní „symetrické") snadno plyne, že pro funkce $p$, $q$, určené vztahy

$$p(x) = \overline{\int\limits_L} f_x \, \mathrm{d}H, \quad q(x) = \underline{\int\limits_L} f_x \, \mathrm{d}H,$$

platí $p, q \in \mathfrak{P}(G, K)$ a dále

$$\int\limits_K p \, \mathrm{d}G = \int\limits_K q \, \mathrm{d}G = \int\limits_{K \times L} f \, \mathrm{d}\Gamma.$$

(Tyto vztahy lze napsat ve tvaru

$$\int\limits_K \Big(\overline{\int\limits_L} f(x, y) \, \mathrm{d}H\Big) \, \mathrm{d}G = \int\limits_K \Big(\underline{\int\limits_L} f(x, y) \, \mathrm{d}H\Big) \, \mathrm{d}G = \int\limits_{K \times L} (f(x, y) \, \mathrm{d}\Gamma.)$$

79. Buď $F$ funkce intervalu v $K$, $b \in K$. Utvořme množinu všech $t \in E_1^*$ tvaru

$$t = \lim F(I_n), \text{ kde } I_n \to b, \ I_n \subset K.$$

Největší (resp. nejmenší) prvek množiny všech takových $t$ označíme

$$\overline{\lim_{K \supset I \to b}} F(I) \quad (\text{resp. } \underline{\lim_{K \supset I \to b}} F(I);$$

píšeme též $\overline{\lim} F(I)$ pro $I \to b$ a pod.

Je-li v bodě $b$ $\overline{\lim} F(I) = \underline{\lim} F(I) = 0$, nazveme funkci $F$ slabě spojitou v bodě $b$.

Je-li $f$ konečná bodová funkce v $\langle a, b \rangle$, je funkce intervalu $f^*$ slabě spojitá v bodě $c \in \langle a, b \rangle$, když a jen když je $f$ spojitá v bodě $c$.

Funkci intervalu $F$ nazveme spojitou v $K$, jestliže platí $F(I_n) \to 0$, kdykoli objemy intervalů $I_n$ konvergují k nule.

Definice spojitosti funkce intervalu je uvedena jen pro úplnost; dále budeme mluvit jen o slabé spojitosti.

**80.** Buď $b \in E_1$. Definujme v $E_1$ funkci intervalu $Z_b$ předpisem

$$Z_b(I) = 0 \text{ resp. } \tfrac{1}{2} \text{ resp. } 1$$

podle toho, leží-li bod $b$ vně $I$ resp. na hranici $I$ resp. uvnitř $I$. Snadno nahlédneme, že je $Z_b$ aditivní funkce.

Je-li nyní

$$b = [b_1, b_2, \ldots, b_m] \in E_m,$$

nechť $Z_b$ značí funkci, určenou pro $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_m$ vztahem

$$Z_b(I) = Z_{b_1}(I_1)\, Z_{b_2}(I_2) \ldots Z_{b_m}(I_m).$$

Podle 75 (a poznámky) je $Z_b$ aditivní funkce. Je-li $b \in I$, je

$$\frac{1}{2^m} \leq Z_b(I) \leq 1;$$

jinak je $Z_b(I) = 0$.

Všude dále opět předpokládáme, že je $G$ konečná nezáporná aditivní v $K$.

**81.** *Buď $G$ slabě spojitá v bodě $b \in K$. Buď $f$ bodová funkce v $K$ taková, že $|\overline{\int\limits_K} f \,\mathrm{d}G| < \infty$. Pak pro $P = \overline{\int} f$ platí v bodě $b$*

$$\underline{\lim} P(I) = 0.$$

**Důkaz:** Nechť v bodě $b$ je $\underline{\lim} P(I) < -2\varepsilon < 0$. Pak existují $I_n \subset K$, $I_n \to b$ tak, že platí

$$P(I_n) < -2\varepsilon \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

Zvolme majorantu $M$ tak, aby platilo

$$M(K) < P(K) + \varepsilon.$$

Protože $\underline{M}(x) > -\infty$, existuje $A \in E_1$ tak, že od jistého indexu je $M(I_n) \geq A\, G(I_n)$. Protože však $G(I_n) \to 0$, je pro velká $n$ $M(I_n) > -\varepsilon$, tedy $M(I_n) - P(I_n) > -\varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon$, tím spíše $(M - P)(K) = M(K) - P(K) > \varepsilon$ — spor.

Nechť naopak $\underline{\lim} P(I) > 2\varepsilon > 0$. Zvolme majorantu $M$ tak, aby platilo

$$M(K) < P(K) + \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Buď $M_1 = M - \varepsilon Z_b$. Dokážeme, že i $M_1$ je majoranta. Protože pro $x \neq b$ je $\underline{M_1}(x) = \underline{M}(x)$, stačí dokázat, že $\underline{M_1}(b) = \infty$. Nechť tedy

$I_n \to b$. Od jistého indexu je pak $P(I_n) > 2\varepsilon$, tím spíše $M(I_n) > 2\varepsilon$, tedy $M_1(I_n) = M(I_n) - \varepsilon\, Z_b(I_n) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Protože $G(I_n) \to 0$, je $\lim(M_1(I_n) : G(I_n)) = \infty$. Platí tedy

$$P(K) \leqq M_1(K) = M(K) - \varepsilon\, Z_b(K) \leqq M(K) - \frac{\varepsilon}{2^m};$$

dostáváme opět spor.

Poznámka: Pro dolní integrál platí opět „symetrická" věta. Je-li zejména $f \in \mathfrak{P}$, je funkce $\int f$ slabě spojitá, kdekoli je $G$ slabě spojitá. — Je-li $f$ libovolná omezená funkce, jsou funkce $\overline{\int} f$, $\underline{\int} f$ slabě spojité, kdekoli je $G$ slabě spojitá, jak se snadno dokáže.

82. *Buď $M$ superaditivní v $K$; buď $f$ bodová funkce v $K$. Nechť existuje spočetná množina $A \subset K$ o těchto vlastnostech:*

*a) Pro $x \in A$ je $G$ slabě spojitá a platí* $\lim\limits_{K \supset I \to x} M(I) \geqq 0$.

*b) Pro $x \in K - A$ je* $-\infty \neq \underline{M}(x) \geqq f(x)$.

*Pak je* $M(K) \geqq \overline{\int\limits_K} f\, \mathrm{d}G$.

Důkaz: Nechť $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $Z = \sum\limits_n \frac{\varepsilon}{2^n} Z_{a_n}$. $Z$ je ovšem nezáporná aditivní funkce a platí

$$Z(K) \leqq \varepsilon.$$

Snadno nahlédneme, že funkce $M_1 = M + Z$ splňuje vztahy

$$\underline{M_1}(a_n) = \infty,\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Je tedy $M_1$ majorantou k $f$ a platí $\overline{\int\limits_K} f \leqq M_1(K) \leqq M(K) + \varepsilon$. Odtud pak věta snadno plyne.

83. Funkci $M$, která splňuje předpoklady věty 82, nazveme zobecněnou majorantou funkce $f$; podobně definujeme zobecněnou minorantu.

84. Řekneme, že funkce $f$ má Knichalův (Knichal-Stieltjesův) integrál vzhledem k funkci $G$ v intervalu $K$, jestliže existuje funkce $F$, která je v $K$ zároveň zobecněnou majorantou a zobecněnou minorantou funkce $f$. Funkce $F$ je pak zřejmě neurčitým (Perron-Stieltjesovým) integrálem funkce $f$; říkáme též, že je $F$ zobecněnou primitivní funkcí k funkci $f$. Snadno nahlédneme, že aditivní funkce $F$ je zobecněnou primitivní funkcí k $f$ (vzhledem k...), když a jen když existuje spočetná množina $A \subset K$ taková, že

*a)* v každém bodě $x \in A$ je funkce $F$ i funkce $G$ slabě spojitá,
*b)* v každém bodě $x \in K - A$ platí

$$f(x) \sim F'(x).$$

**85.** *Nechť $g \in \mathfrak{P}(G, K)$, $g \geqq 0$, $G_1 = \int g \, dG$. (Pak je $G_1$ konečná nezáporná aditivní v $K$). Nechť bodová funkce $f$ má v $K$ Riemannův integrál $R \int_K f \, dG_1$. Pak existuje $\int_K fg \, dG$ a rovná se $\int_K f \, dG_1$.*

(Důkaz je snadný; podobá se důkazu věty 61.)

**86.** Funkci $f$ nazveme funkcí první třídy v intervalu $K$, jestliže je limitou posloupnosti funkcí v $K$ spojitých. (Funkce první třídy ovšem nemusí být spojitá; snadno se zjistí, že na př. funkce $f$, určená v $\langle 0, 1 \rangle$ vztahy $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$, je funkcí první třídy. Lze ukázat, že funkce první třídy nemusí mít Riemannův integrál, ani když je omezená.)

**87.** *Nechť $g \in \mathfrak{P}(G, K)$; $g$ buď konečná nezáporná funkce, $G_1 = \int g \, dG$. Buď $f$ funkce první třídy v $K$; nechť $f \in \mathfrak{P}_A(G_1, K)$. Pak existuje $\int_K fg \, dG$ a rovná se $\int_K f \, dG_1$.*

Důkaz: Buďte $f_n$ spojité funkce, $f_n \to f$. Předpokládejme napřed, že je funkce $f$ omezená, $-c \leqq f \leqq c$. Pak můžeme předpokládat, že i funkce $f_n$ jsou takto omezené; můžeme totiž volit $'f_n = \min(f_n, c)$, $''f_n = \max('f_n, -c)$, kde $''f_n$ jsou spojité, $-c \leqq {''f_n} \leqq c$, a platí $''f_n \to f$. Místo $''f_n$ píšeme tedy opět $f_n$. Protože spojitá funkce má vždy Riemannův integrál, existuje podle 85 $\int_K f_n g \, dG$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a platí

$$\int_K f_n \, dG_1 = \int_K f_n g \, dG. \qquad (\alpha)$$

Protože $-cg \leqq f_n g \leqq cg$, kde $cg \in \mathfrak{P}(G, K)$, a platí $f_n g \to fg$, můžeme použít věty 72 na obě strany $(\alpha)$; tím dostáváme

$$\int_K f \, dG_1 = \int_K fg \, dG. \qquad (\beta)$$

Budiž nyní $f$ libovolná funkce první třídy z $\mathfrak{P}_A$. Pak jsou zřejmě i funkce $f_+, f_-$, a tedy i funkce

$$\tilde{f}_n = \min(f_+, n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

funkce první třídy. Z $(\beta)$ nyní plyne, že platí

$$\int_K \tilde{f}_n \, dG_1 = \int_K \tilde{f}_n g \, dG \ \text{ pro } n = 1, 2, \ldots \qquad (\gamma)$$

Protože $\tilde{f}_n \nearrow f_+$, $\tilde{f}_n g \nearrow (f_+)g$, plyne z $(\gamma)$ podle věty 73, že $(f_+)g \in \mathfrak{P}(G, K)$ a že platí

$$\int_K f_+ \, dG_1 = \int_K (f_+)g \, dG.$$

Stejný vztah platí ovšem i pro $f_-$ a tedy i pro $f$. Tím je věta dokázána.

Poznámka: Funkcí druhé třídy rozumíme limitu posloupnosti funkcí první třídy; podobně definujeme funkci třetí třídy atd. Je patrné, že věta 87 zůstane správnou, nahradíme-li v ní slova „první třídy" slovy „$n$-té třídy". Později dokážeme, že ke každé funkci $f \in \mathfrak{P}_A$ existují funkce $f_1, f_2$ druhé třídy, pro něž platí $f_1 \leqq f \leqq f_2$ a $\int f_1 = \int f = \int f_2$ (zřejmě pak $f_1, f_2 \in \mathfrak{P}_A$); odtud vyplyne, že slova „první třídy" ve větě 87 lze vůbec vynechat. Uvidíme též, že předpoklad o konečnosti funkce $g$ ve větě 87 rovněž není podstatný. (Čtenář nechť si uvědomí, kde by při našem důkaze věty vadily hodnoty $g(x) = \infty$.)

Lze také dokázat, že věta 87 platí pro libovolnou funkci $f \in \mathfrak{P}(G_1, K)$, je-li však $G_1$ Knichalovým integrálem funkce $g$. (Je-li totiž v tomto případě $M$ majorantou k $f$ vzhledem ke $G_1$, je $M$ zobecněnou majorantou k $fg$ vzhledem ke $G$, jak se celkem snadno zjistí.)

88. Všimli jsme si, že v jednorozměrném případě, kdy $K = \langle a, b \rangle$, lze přiřadit každé konečné aditivní funkci intervalu $F$ bodovou funkci $f$, pro niž platí $f^* = F$ a která je až na aditivní konstantu jednoznačně určena. Je-li $G = g^*$, kde $g(x) = x$, znamená horní (dolní) derivace funkce $F$ podle funkce $G$ právě horní (dolní) derivaci funkce $f$ v obvyklém slova smyslu. Funkce $F$ je slabě spojitá v bodě $x$, když a jen když je $f$ spojitá v bodě $x$; funkce $F$ je nezáporná, když a jen když je $f$ neklesající.

Buď nyní $F$ konečná superaditivní v intervalu $\langle a, b \rangle$. Zvolme libovolně $c \in E_1$ a položme

$$f(a) = c,$$
$$f(x) = F(I) + c,$$

kde

$$I = \langle a, x \rangle \subset \langle a, b \rangle.$$

Snadno nahlédneme, že pro funkci $f^*$ platí pak

$$f^* \geqq F.$$

Je-li nyní $G$ konečná nezáporná aditivní v $K = \langle a, b \rangle$ a je-li $M$ konečná majoranta bodové funkce $h$, existuje tedy konečná aditivní funkce $M_1$ tak, že platí $M_1 \geqq M$, $M_1(K) = M(K)$. Vidíme, že $M_1$ je rovněž majorantou k funkci $h$ a že tedy můžeme $\overline{\int_K} h \, \mathrm{d}G$ definovat také jako $\inf M(K)$, kde $M$ je konečná aditivní majoranta k $h$. (Je-li $\overline{\int_K} h \, \mathrm{d}G = \infty$, souhlasí to také, protože $\inf \emptyset = \infty$.)

Řekneme, že konečná bodová funkce $M$ je majorantou bodové funkce $f$ (v intervalu $K = \langle a, b \rangle$), jestliže funkce intervalu $M^*$ je majorantou funkce $f$. Vidíme, že $\overline{\int_K} f \, \mathrm{d}G$ je infimem množiny čísel tvaru $M(b) - M(a)$, kde $M$ je konečná bodová majoranta funkce $f$; podobná poznámka platí i pro dolní integrál.

Jsou-li $f, g$ bodové funkce v $\langle a, b \rangle$, $x \in \langle a, b \rangle$, pak $\overline{f}(g, x, \langle a, b \rangle)$, event. $\overline{f}(x)$ a pod. značí ovšem $\overline{f^*}(g^*, x, \langle a, b \rangle)$ atd.

Řekneme, že konečná bodová funkce $F$ je neurčitým horním (dolním) integrálem funkce $f$, je-li funkce intervalu $F^*$ neurčitým horním (dolním) integrálem funkce $f$.

Je-li konečná bodová funkce $F$ neurčitým horním (dolním) integrálem funkce $f$ v $\langle a, b\rangle$ podle funkce $G = g^*$, pak v každém bodě $c \in (a, b)$, v němž je $g$ spojitá, platí podle věty 81

$$\overline{\lim_{x\to c-}}\, F(x) = F(c) = \underline{\lim_{x\to c+}}\, F(x)$$

$$\left(\text{resp. } \underline{\lim_{x\to c-}}\, F(x) = F(c) = \overline{\lim_{x\to c+}}\, F(x)\right).$$

Je-li zejména $F$ integrálem podle spojité funkce $g$, je $F$ rovněž spojitá.

**89.** *Buď $g$ konečná neklesající v $\langle a, b\rangle$ a spojitá zleva v bodě $b$. Pak k libovolné bodové funkci $f$ v $\langle a, b\rangle$ buď existuje $y \in (a, b)$ tak, že platí $\overline{\int_a^b} f\,dg = \infty$ a pro $x \in (y, b)$ je $\overline{\int_a^x} f\,dg = -\infty$ nebo platí*

$$\overline{\int_a^b} f\,dg = \overline{\lim_{x\to b-}}\, \overline{\int_a^x} f\,dg.$$

**Důkaz:** Je-li $\overline{\int_a^b} f\,dg \in E_1$, plyne to z 81 (viz též 88).

Je-li $\overline{\int_a^b} f\,dg = -\infty$, existuje ke každému $c \in E_1$ konečná bodová majoranta $M$, pro niž platí $M(a) = 0$, $M(b) < c$. Kdyby bylo $\overline{\lim_{x\to b-}} M(x) > c$, byla by dolní derivace funkce $M$ podle $g$ v bodě $b$ zleva rovna $-\infty$; je tedy $\overline{\lim_{x\to b-}}\, M(x) \leqq c$ a tedy tím spíše $\overline{\lim_{x\to b-}}\, \overline{\int_a^x} f\,dg \leqq c$; je tedy

$$\lim_{x\to b-} \overline{\int_a^x} f\,dg = -\infty = \overline{\int_a^b} f\,dg.$$

Buď nyní $\overline{\int_a^b} f\,dg = \infty$. Předpokládejme napřed, že je $\overline{\int_a^x} f\,dg \in E_1$ pro každé $x \in (a, b)$. Zvolme

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots,\; b_n \nearrow b.$$

Pro $n = 1, 2, \ldots$ pak existuje bodová majoranta $M_n$ v intervalu $\langle b_{n-1}, b_n\rangle$ tak, že platí

$$M_1(b_0) = 0,\ M_{n-1}(b_{n-1}) = M_n(b_{n-1}),$$

$$M_n(b_n) - M_n(b_{n-1}) < \overline{\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}} f\,\mathrm{d}g + \frac{1}{2^n}.$$

Předpokládejme nyní, že je $\overline{\lim\limits_{x\to b-}} \overline{\int\limits_a^x} f\,\mathrm{d}g < \infty$ a definujme v $\langle a, b\rangle$ funkci $M$ vztahem

$$M(x) = M_n(x) \text{ pro } x \in \langle b_{n-1}, b_n\rangle,\ M(b) = c,$$

kde

$$\overline{\lim\limits_{x\to b-}} \overline{\int\limits_a^x} f\,\mathrm{d}g + 1 < c < \infty.$$

Pro $x \in (a, b)$ je

$$M(x) = (M(x) - M(a) - \overline{\int\limits_a^x} f\,\mathrm{d}g) + \overline{\int\limits_a^x} f\,\mathrm{d}g,$$

tedy $M(x) < \overline{\int\limits_a^x} f\,\mathrm{d}g + 1$, a též $\overline{\lim\limits_{x\to b-}} M(x) < c = M(b)$. Vidíme, že derivace zleva funkce $M$ v bodě $b$ podle funkce $g$ je $\infty$; je tedy $M$ majorantou funkce $f$ v $\langle a, b\rangle$ a platí $\overline{\int\limits_a^b} f\,\mathrm{d}g \leqq M(b) - M(a) = c < \infty$ — spor.

Je-li nyní pro některé $x \in (a, b)$ $\overline{\int\limits_a^x} f\,\mathrm{d}g = \infty$, je podle 50 $\overline{\int\limits_a^y} f\,\mathrm{d}g = \infty$ pro každé $y \in (x, b)$ a věta zřejmě platí.

Je-li pro každé $x \in (a, b)$ $\overline{\int\limits_a^x} f\,\mathrm{d}g < \infty$, je-li však pro některé $y \in (a, b)$ $\overline{\int\limits_a^y} f\,\mathrm{d}g = -\infty$, je podle 55 pro každé $z \in (y, b)$ $\overline{\int\limits_a^z} f\,\mathrm{d}g = -\infty$ a věta je dokázána.

Poznámka: Obyčejný integrál funkce

$$f(x) = \{x : (1 - x^2)\}$$

v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ ukazuje, že první případ věty 89 opravdu může nastat.

**90.** *Buď $g$ konečná neklesající v $\langle a, b\rangle$ a spojitá zleva v bodě $b$. Buď $f$ bodová funkce v $\langle a, b\rangle$ taková, že existuje $\int\limits_a^x f\,\mathrm{d}g$ pro každé $x \in (a, b)$; nechť dále existuje*

$$\lim\limits_{x\to b-} \int\limits_a^x f\,\mathrm{d}g = c.$$

*Pak platí*

$$c = \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}g = \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}g.$$

*Je-li zejména* $c \in E_1$, *existuje též* $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ *a rovná se* $c$.

(Plyne z věty 89 a z věty „symetrické“.)

**91.** Pro levý koncový bod intervalu lze ovšem také dokázat větu, obdobnou větě 90. Dokázali jsme, že Perronův integrál je zobecněním vlastního Riemannova integrálu; nyní je patrné, že je zobecněním i nevlastního Riemannova integrálu. (Řekneme, že existuje nevlastní Riemannův integrál $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, jestliže existuje buď $\lim_{x \to b-} R \int_a^x f(x) \, \mathrm{d}x \in E_1$ nebo $\lim_{x \to a+} R \int_x^b f(x) \, \mathrm{d}x \in E_1$ nebo jestliže lze interval $\langle a, b \rangle$ rozdělit na konečný počet takových intervalů.)

**92.** *Buďte* $F, g, h, H$ *bodové funkce v* $\langle a, b \rangle$, $F$, $g$ *konečné neklesající*; $H$ *buď neurčitým integrálem funkce* $h$ *podle funkce* $g$. *Budiž* $H(x) \geqq c$ *pro každé* $x \in \langle a, b \rangle$. *Pak platí*

$$\overline{\int_a^b} Fh \, \mathrm{d}g \leqq [FH]_a^b - c[F]_a^b.^{9)}$$

**Důkaz:** Pro konstantní funkci $F$ věta zřejmě platí; také jistě platí pro $c = -\infty$. Buď tedy $c > -\infty$ (je ovšem také $c < \infty$). Platí-li nyní věta 92 při daných $h$, $g$ pro funkce $F_1$, $F_2$, platí i pro $F_1 + F_2$, protože $\overline{\int}(F_1 + F_2) \, h \, \mathrm{d}g \leqq \overline{\int} F_1 h \, \mathrm{d}g + \overline{\int} F_2 h \, \mathrm{d}g$. Protože $F(x) = (F(x) - F(a)) + F(a)$, stačí dokázat větu pro funkci $F$, pro niž platí $F(a) = 0$ (a tedy také $F \geqq 0$).

Buď tedy za tohoto předpokladu $M_0$ konečná bodová majoranta funkce $h$; buď $M(x) = M_0(x) - M_0(a) + H(a) - c$. Protože $M_0(x) - M_0(a) \geqq H(x) - H(a)$, je $M(x) \geqq H(x) - H(a) + H(a) - c = H(x) - c \geqq 0$. Dokážeme nyní, že funkce $FM$ je majorantou funkce $Fh$. Zvolme $y \in \langle a, b \rangle$; buď

$$F(y) = A, \quad P(x) = (F(x) - A) \, M(x), \quad Q(x) = AM(x).$$

Pak je $FM = P + Q$. Pro $x \geqq y$ je $P(x) \geqq 0$, pro $x \leqq y$ je $P(x) \leqq 0$; odtud plyne snadno, že je $\underline{P}(y) \geqq 0$ (derivujeme ovšem podle funkce $g$). Dále je

$$-\infty \neq \underline{Q}(y) \geqq A \, \underline{M}(y) \geqq F(y) \, h(y);^{10)}$$

---

[9]) Je-li $f$ bodová funkce, pak $[f]_x^y$ znamená jako obvykle $f(y) - f(x)$.

[10]) Pro $A > 0$ je ovšem $\underline{Q}(y) = A \, \underline{M}(y)$; pro $A = 0$ může však být $\underline{Q}(y) = \infty$.

je tedy

$$-\infty \neq \underline{(FM)}(y) \geqq \underline{P}(y) + \underline{Q}(y) \geqq F(y)\,h(y).$$

Odtud plyne

$$\overline{\int_a^b} Fh\,\mathrm{d}g \leqq F(b)\,M(b) = F(b)(M_0(b) - M_0(a) + H(a) - c).$$

Protože však $M_0(b) - M_0(a)$ můžeme volit libovolně blízko k $H(b) - H(a)$, platí též

$$\overline{\int_a^b} Fh\,\mathrm{d}g \leqq F(b)(H(b) - c) = [FH]_a^b - c[F]_a^b$$

(protože $F(a) = 0$). Tím je věta dokázána.

**93.** *Buďte $F, g, h, H$ bodové funkce v $\langle a, b\rangle$, $F, g$ konečné neklesající; $H$ buď neurčitým integrálem funkce $h$ podle funkce $g$. Nechť existuje Riemannův integrál $\int_a^b H\mathrm{d}F$. Pak existuje také Perronův integrál $\int_a^b Fh\,dg$ a platí*

$$\int_a^b Fh\,\mathrm{d}g + \int_a^b H\,\mathrm{d}F = [FH]_a^b. \qquad (\alpha)$$

*Je-li nadto funkce $H$ spojitá, existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že*

$$\int_a^b Fh\,\mathrm{d}g = F(a)[H]_a^\xi + F(b)[H]_\xi^b. \qquad (\beta)$$

Důkaz: Nechť body $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ určují dělení $\langle a, b\rangle$; buď $c_i = \inf H(x)$ v $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$. Podle 92 platí

$$\overline{\int_{t_{i-1}}^{t_i}} Fh\,\mathrm{d}g \leqq [FH]_{t_{i-1}}^{t_i} - c_i[F]_{t_{i-1}}^{t_i} \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n,$$

tedy též

$$\overline{\int_a^b} Fh\,\mathrm{d}g \leqq [FH]_a^b - \sum_{i=1}^n c_i(F(t_i) - F(t_{i-1})),$$

$$\overline{\int_a^b} Fh\,\mathrm{d}g \leqq [FH]_a^b - R\int_a^b H\,\mathrm{d}F.$$

Přechodem k funkci $(-h)$ zjistíme, že platí

$$\underline{\int_a^b} Fh\,\mathrm{d}g \geqq [FH]_a^b - R\int_a^b H\,\mathrm{d}F;$$

existuje tedy $\int_a^b Fh\,\mathrm{d}g$ a platí zde rovnost.

Buď nyní $H$ spojitá funkce; buď $c$ její minimum, $C$ její maximum.

Protože také funkce $H(x)$. $[F]_a^b$ je spojitá a číslo $\int_a^b H\,\mathrm{d}F$ leží mezi jejím minimem $c[F]_a^b$ a jejím maximem $C[F]_a^b$, existuje podle známé věty $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že platí

$$H(\xi)[F]_a^b = \int_a^b H\,\mathrm{d}F.$$

Dosazením do ($\alpha$) dostaneme ($\beta$).

Poznámka: Předpoklad o spojitosti funkce $H$ a o existenci Riemannova integrálu $\int_a^b H\,\mathrm{d}F$ můžeme ovšem podle 88 nahradit předpokladem, že funkce $g$ je spojitá. — Vzorec ($\beta$) platí, i když je $F$ funkce nerostoucí (přejdeme k funkci $-F$).

**94.** *Buďte $f, g, h$ bodové funkce v $\langle a, b\rangle$, $g$ spojitá neklesající. Nechť $h \in \mathfrak{P}(G)$, $f \in \mathfrak{P}_A(G)$, kde $G = g^*$; buďte $H, F$ neurčité integrály funkcí $h, f$. Pak platí*

$$\int_a^b Fh\,\mathrm{d}G + \int_a^b Hf\,\mathrm{d}G = [FH]_a^b.$$

Důkaz: Je-li $f \geqq 0$, plyne věta snadno z vět 93 a 85; pro libovolnou funkci $f \in \mathfrak{P}_A(G)$ dokážeme větu tím, že funkci $f$ rozložíme na součet $f_+ + f_-$.

**95.** *Buďte $F, g$ bodové funkce v $\langle c, d\rangle$, $\varphi, h$ v $\langle a, b\rangle$, $F, g, h$ buďte konečné, $\varphi$ spojitá, $c \leqq \varphi \leqq d$. Buď $t \in \langle a, b\rangle$. Nechť*

$$v \sim F'(g, \varphi(t), \langle c, d\rangle),$$
$$w \sim (g(\varphi))'(h, t, \langle a, b\rangle).$$

*Pak platí*

$$vw \sim (F(\varphi))'(h, t, \langle a, b\rangle). \qquad (\alpha)$$

Důkaz: Máme dokázat, že platí

$$\lim\{(F(\varphi(t_n)) - F(\varphi(t))) : (h(t_n) - h(t))\} = vw \in E_1, \qquad (\beta)$$

jestliže $t_n \in \langle a, b\rangle$, $t_n \neq t$, $t_n \to t$ a jestliže limita v ($\beta$) existuje.

Mějme tedy taková $t_n$ a nechť limita v ($\beta$) existuje. Rozeznávejme tyto případy:

a) Od jistého indexu platí $g(\varphi(t_n)) = g(\varphi(t))$. Kdyby bylo v tomto případě $F(\varphi(t_n)) \neq F(\varphi(t))$ pro nekonečně mnoho $n$, existovala by taková posloupnost $k_1 < k_2 < \ldots$, že pro $x_n = \varphi(t_{k_n})$, $x = \varphi(t)$ by bylo $F(x_n) \neq F(x)$, tedy $x_n \neq x$, $x_n \to x$ (v důsledku spojitosti funkce $\varphi$) a konečně

$$\lim\{(F(x_n) - F(x)) : (g(x_n) - g(x))\} = \infty \text{ nebo } -\infty$$

ve sporu se vztahem $v \sim F'(g, x, \langle c, d\rangle)$.

Platí tedy v tomto případě

$$F(\varphi(t_n)) = F(\varphi(t))$$

pro všechna dostatečně velká $n$ a tedy je limita v ($\beta$) rovna nule. Pro velká $n$ je pak ovšem $h(t_n) \neq h(t)$ a tedy je také

$$0 = w = \lim\{(g(\varphi(t_n)) - g(\varphi(t))) : (h(t_n) - h(t))\}.$$

Vztah ($\beta$) je pro tento případ dokázán.

b) Nechť je pro nekonečně mnoho $n$ $g(\varphi(t_n)) \neq g(\varphi(t))$. Pak můžeme předpokládat, že je $g(\varphi(t_n)) \neq g(\varphi(t))$ pro $n = 1, 2, \ldots$; můžeme totiž takovou posloupnost vybrat. Potom však platí

$$\{F(\varphi(t_n)) - F(\varphi(t))\} : (h(t_n) - h(t)) = V_n W_n,$$

kde

$$\{F(\varphi(t_n)) - F(\varphi(t))\} : \{g(\varphi(t_n)) - g(\varphi(t))\} = V_n,$$
$$\{g(\varphi(t_n)) - g(\varphi(t))\} : (h(t_n) - h(t)) = W_n.$$

Odtud nyní snadno plyne vztah ($\beta$).

**96.** Je-li $F$ neurčitým integrálem funkce $f$ v $\langle a, b\rangle$, je ovšem $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = [F]_a^b$. Abychom zachovali platnost tohoto vztahu, definujeme

$$\int\limits_x^x f = F(x) - F(x) = 0$$

a pro $y < x$

$$\int\limits_x^y f = F(y) - F(x) = -(F(x) - F(y)) = -\int\limits_y^x f.$$

**97.** *Buďte $f, g$ bodové funkce v $\langle c, d\rangle$, $\varphi, h, k$ v $\langle a, b\rangle$; $g, h$ buďte konečné neklesající, $\varphi$ spojitá, $c \leq \varphi \leq d$. Buď $F$ neurčitým Newtonovým integrálem funkce $f$ podle funkce $g$; $g(\varphi)$ buď neurčitým Newtonovým (Knichalovým) integrálem funkce $k$ podle funkce $h$. Pak je $F(\varphi)$ neurčitým Newtonovým (Knichalovým) integrálem funkce $f(\varphi) . k$ podle funkce $h$, zejména tedy platí*

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, \mathrm{d}g = \int\limits_a^b f(\varphi) \, . \, k \, \mathrm{d}h.$$

Důkaz: Je-li $g(\varphi)$ Newtonovým integrálem, plyne věta 97 ihned z věty 95. Buď nyní $g(\varphi)$ Knichalovým integrálem funkce $k$; nechť není $k(t) \sim (g(\varphi))'(t)$. Pak jsou $h$, $g(\varphi)$ spojité v bodě $t$; nechť $\varphi(t) = x$. Protože je buď $\underline{F}(x) = \overline{F}(x) \in E_1$ nebo $\overline{F}(x) = -\infty$, $\underline{F}(x) = \infty$, existuje ke každé posloupnosti $x_n \to x$, $x_n \in \langle c, d\rangle$, číslo $A \in E_1$ tak, že

$$|F(x_n) - F(x)| \leq A|g(x_n) - g(x)|.$$

Pro $t_n \to t$ odtud plyne, že. $F(\varphi(t_n)) \to F(\varphi(t))$. Je tedy $F(\varphi)$ opravdu Knichalovým integrálem.

Poznámka: Na první pohled by se mohlo zdát, že můžeme ve větě 97 nahradit předpoklad, že $F$ je Newtonovým integrálem, předpokladem, že je $F$ Knichalovým integrálem, chceme-li pouze dokázat, že $F(\varphi)$ je Knichalovým integrálem. Tento úsudek by však byl nesprávný; není-li pro některé $x$ $f(x) \sim F'(x)$, může se stát, že pro nespočetně mnoho $t$ je $\varphi(t) = x$ a pro tato $t$ pak nemusí být $f(\varphi(t)) \,.\, k(t) \sim (F(\varphi))'(t)$.

Lze na př. v $\langle a, b\rangle$ sestrojit funkci $\varphi$, která má spojitou derivaci a pro niž je $0 \leqq \varphi \leqq 1$ tak, že neexistuje ani Perronův integrál $\int\limits_a^b (1 : \sqrt{\varphi(t)})\,.$ $.\,\varphi'(t)\,dt$, ač funkce $1 : \sqrt{x}$ má v $\langle 0, 1\rangle$ zřejmě Knichalův integrál. (Pro srovnání s větou 97 bychom kladli $f(x) = 1 : \sqrt{x}$, $\langle c, d\rangle = \langle 0, 1\rangle$, $g(x) = h(x) = x$, $k(x) = \varphi'(x)$.) Tato funkce $\varphi$ ovšem nabývá hodnoty 0 v nespočetně mnoha bodech.

Přece však můžeme větu 97 značně zobecnit.

Napřed zavedeme některá označení. Buď $\emptyset \neq A \subset E_1$. Množinu $A$ můžeme rozdělit na disjunktní části tak, že dva její body $x$, $y$ dáme do téže části, když a jen když celý interval $\langle x, y\rangle$ (resp. $\langle y, x\rangle$) je částí množiny $A$. (Podrobněji řečeno: Každému $x \in A$ přiřadíme množinu $A_x \subset A$, obsahující bod $x$ a všechna $y$ uvedené vlastnosti. Snadno se zjistí, že každé dvě množiny $A_{x_1}$, $A_{x_2}$ jsou buď totožné nebo disjunktní.) Takto vzniklým částem říkáme komponenty množiny $A$. Snadno nahlédneme, že každá komponenta je buď jednobodová množina nebo interval (zde musíme ovšem připustit všechny druhy intervalů).

Dále značíme

$$\lim_{x \to t+} f(x) = f(t+), \quad \lim_{x \to t-} f(x) = f(t-).$$

**98.** *Nechť funkce $f, g, h, k, \varphi$ mají týž význam jako ve větě 97. Buď $F$ neurčitým Knichalovým integrálem funkce $f$ podle funkce $g$; $g(\varphi)$ buď neurčitým Knichalovým integrálem funkce $k$ podle funkce $h$. Buďte $x_1, x_2, \ldots$ ty body, kde neplatí $f(x) \sim F'(x)$; buď $A_i$ množina těch $t$, pro něž platí $\varphi(t) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Předpokládejme, že každá z množin $A_i$ má jen spočetně mnoho komponent a že pro každé $t$ z množiny*

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,$$

*pro něž $a < t < b$, platí*

$$\text{buď } h(t-) = h(t) = h(t+) \text{ nebo } h(t-) < h(t) < h(t+).$$

*Pak je funkce $F(\varphi)$ neurčitým Knichalovým integrálem funkce $f(\varphi)\,.\,k$ podle funkce $h$.*

Důkaz: Jestliže platí

$$f(\varphi(t)) \sim F'(\varphi(t)) \tag{$\alpha$}$$

a zároveň

$$k(t) \sim (g(\varphi))'(t), \tag{$\beta$}$$

platí podle 95 také

$$f(\varphi(t))\, k(t) \sim (F(\varphi))'(t). \tag{$\gamma$}$$

Množina $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ je právě množinou těch $t$, pro něž neplatí ($\alpha$). Buď $B$ (resp. $C$) množina těch $t$, kde neplatí ($\beta$) (resp. ($\gamma$)).

Pro $t \in A$ jsou funkce $F$, $g$ spojité v bodě $\varphi(t)$, tedy jsou funkce $F(\varphi)$, $g(\varphi)$ spojité v bodě $t$.

Je-li $t \in A$ a není-li funkce $h$ spojitá v bodě $t$, platí tedy

$$\lim_{x \to t}\{(F(\varphi(x)) - F(\varphi(t))) : (h(x) - h(t))\} = \\ = 0 \sim (F(\varphi))'(t).$$

Pak ovšem platí ($\beta$); pro funkci $g(\varphi)$ dostáváme tak podobně

$$\lim_{x \to t}\{(g(\varphi(x)) - g(\varphi(t)))\} : (h(x) - h(t)) = \\ = 0 = k(t) \sim (g(\varphi))'(t).$$

Odtud plyne ihned, že v tomto bodě $t$ platí ($\gamma$). Vidíme, že v každém bodě $t \in AC$ je funkce $h$ spojitá.

Pro $t \in B - A$ jsou funkce $F(\varphi)$, $h$ spojité podle důkazu věty 97. Protože $C \subset A + B = A + (B - A)$, $C \subset AC + (B - A)$, vidíme, že v každém bodě množiny $C$ jsou obě funkce $F(\varphi)$, $h$ spojité.

Zvolme nyní některou z množin $A_i$ a rozdělme ji na části $A_i'$, $A_i''$ tak, že do množiny $A_i'$ dáme ty body množiny $A$, které leží uvnitř některé z jejích komponent, a do množiny $A_i''$ dáme ostatní body množiny $A$, tedy koncové body jejích intervalových komponent (ze spojitosti funkce $\varphi$ plyne, že takový bod vždy k množině $A_i$ patří) a prvky jejích jednobodových komponent.

Množina $A_i''$ je ovšem spočetná. Dokážeme, že v bodech množiny $A_i' - B$ platí ($\gamma$) neboli že

$$(A_i' - B)\, C = \emptyset$$

a tedy

$$(A_i - B)\, C = ((A_i' - B) + (A_i'' - B))\, C = (A_i'' - B)\, C.$$

Zvolíme-li totiž $t \in A_i' - B$, je v jistém okolí bodu $t$ funkce $\varphi$ konstantní, tedy jsou tam i funkce $F(\varphi)$, $g(\varphi)$ konstantní a platí tedy podle chování funkce $h$ buď $\overline{F(\varphi)}(t) = \underline{F(\varphi)}(t) = \overline{g(\varphi)}(t) = \underline{g(\varphi)}(t) = k(t) = 0$ nebo $\overline{F(\varphi)}(t) = -\infty$, $\underline{F(\varphi)}(t) = \infty$; v obou případech platí ($\gamma$).

Odtud plyne, že i množina

$$C = CB + C(A - B) = CB + C\sum_{i=1}^{\infty}(A_i - B) = CB + \sum_{i=1}^{\infty} C(A_i'' - B) \subset$$
$$\subset B + \sum_{i=1}^{\infty} A_i''$$

je spočetná.

Tím je věta dokázána.

Poznámka: Při použití vět 97, resp. 98 lze snadno udělat chybu i v jednoduchém případě. Pro obyčejné Newtonovy integrály má příslušná formule tvar

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tato formule se snadno pamatuje takto: Zavedeme substituci $x = \varphi(t)$; pak platí $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ neboli $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$; mezím $t = a$, $t = b$ odpovídají meze $x = \varphi(a)$, $x = \varphi(b)$; odtud pak formuli snadno dostaneme.

Není však radno této „úvahy" používat; může se totiž snadno stát, že píšeme, aniž si to uvědomíme, $\sqrt{a^2} = a$ místo $\sqrt{a^2} = |a|$ nebo že děláme substituci pomocí nespojité funkce a pod. Podáme dva příklady této „úvahy".

Substitucí $x = t^2$ převedeme integrál libovolné funkce $f$ proměnné $t$ v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ na integrál od 1 do 1 (je $\varphi(-1) = \varphi(1) = 1$) a dostaneme tedy nulu.

Substitucí $x = \operatorname{tg}\frac{1}{2}t$ převedeme integrál funkce $R(\sin t, \cos t)$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ na integrál od 0 do 0 a dostaneme opět nulu; na př. $\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi = \int_0^0 \ldots = 0$.

**99.** Buď $a \in E_1$; funkce $f, g$ buďte definovány v $\langle a, \infty)$, $g$ buď konečná neklesající. Existuje-li $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ pro každé $b > a$ a existuje-li

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}g = A \in E_1,$$

řekneme, že existuje integrál funkce $f$ podle funkce $g$ v intervalu $\langle a, \infty)$ a píšeme

$$A = \int_a^\infty f\,\mathrm{d}g.$$

Podobně definujeme

$$\int_{-\infty}^{a} f \, dg.$$

Jsou-li $f$, $g$ definovány v $(-\infty, \infty)$ a existují-li obě vlastní limity

$$A_1 = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f \, dg, \quad A_2 = \lim_{c \to -\infty} \int_c^0 f \, dg,$$

řekneme, že existuje integrál funkce $f$ podle funkce $g$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ a píšeme

$$A_1 + A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f \, dg.$$

Čtenář snadno dokáže věty, obdobné větám 48, 66, 67, 68, 69, 72, 93, 94, 97, 98 i pro integrály typu $\int_a^{\infty}$ atd.

*Cvičení 1.* Buď $g$ neklesající konečná v $\langle 0, a \rangle$. Zjistěte geometrický význam $\int_0^a x \, dg(x)$. (Lze použít věty 93 pro $F = g$, $h = 1$.)

*Cvičení 2.* Nechť $g(x) = 0$ pro $x \leq 0$, $g(x) = 1$ pro $x > 0$, $f_1(x) = f_2(x) = 1$ pro $x < 0$, $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 1$, $f_1(x) = f_2(x) = 0$ pro $x > 0$. Dokažte, že existuje $R \int_{-1}^{1} f_1 \, dg$, ale že existují libovolně jemná dělení $\vartheta$ intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, pro něž je $S(f_1, \vartheta) = 1$, $s(f_1, \vartheta) = 0$. Dále ukažte, že existuje (Perronův) $\int_{-1}^{1} f_2 \, dg = 1$, ale neexistuje $R \int_{-1}^{1} f_2 \, dg$.

*Cvičení 3.* Buď $F(x) = \sin \frac{1}{x}$; buď $f(0) = 0$, $f(x) = F'(x)$ pro $x \neq 0$. Vypočtěte $\underline{\int_0^a} f(x) \, dx$, $\overline{\int_0^a} f(x) \, dx$ na př. pro $a = \frac{1}{\pi}$. (Podle věty 89.)

*Cvičení 4.* Dokažte, že platí $\int_K f \, dG = 0$, kde $K = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, $f(0, 0) = 0$, pro $[x, y] \neq [0, 0]$ je $f(x, y) = (x - y) : (x + y)^2$; $G$ je objem. (Dokažte, že funkce intervalu $F$, určená pro $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ vztahem $F(I) = \int_a^b (\int_c^d f(x, y) \, dy) \, dx$, je Knichalovým integrálem funkce $f$, a použijte věty 78.)

*Cvičení 5.* Dokažte, že neexistuje $\int_K f \, dG$, kde $K = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, $f(0, 0) = 0$, pro $[x, y] \neq [0, 0]$ je $f(x, y) = (x - y) : (x + y)^3$; $G$ je objem. (Ukažte, že funkce intervalu $F$, určená vztahem $F(I) = \int_a^b (\int_c^d f(x, y) \, dy) \, dx$ pro $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, není slabě spojitá v bodě $[0, 0]$; integrály $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) \, dy) \, dx$, $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) \, dx) \, dy$ sice existují, ale mají různé hodnoty.)

*Cvičení 6.* Buď $G$ konečná nezáporná aditivní funkce v intervalu $K$; buď $G$ slabě spojitá v každém bodě $x \in K$. Nechť omezená bodová funkce $f$ má v $K$ jen spočetně mnoho bodů nespojitosti. Pak má $f$ v $K$ Knichalův integrál. Je-li funkce $f$ pouze zdola omezená, pak $f \in \mathfrak{P}_B(G, K)$. — Jsou-li $g$, $h$ bodové funkce v $K$ takové, že množina těch $x \in K$, kde $g(x) \neq h(x)$, je spočetná, pak $\int_K g \, dG = \int_K h \, dG$.

*Cvičení 7.* Jestliže existuje $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$, můžeme utvořit řadu

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde $a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ (n = 0, 1, \ldots)$, $b_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \ (n = 1, 2, \ldots)$. (Řada je utvořena jen formálně; nemluvíme o její konvergenci.) Tato řada se nazývá Fourierovou řadou, příslušnou k funkci $f$. Dokažte, že v případě $a_0 = 0$ dostaneme (při vhodné volbě „integračních konstant") Fourierovu řadu příslušnou k neurčitému integrálu funkce $f$ tak, že Fourierovu řadu funkce $f$ integrujeme člen po členu. (Použijte věty 94.)

*Cvičení 8.* Nechť $a_n \in E_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$; nechť ke každému $\varepsilon > 0$ existuje, takové $p$, že pro každou dvojici indexů $m$, $n$, kde $m > p$, $n > p$, platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Pak je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. (Podle věty 11 existuje vybraná posloupnost s limitou; zjistíme snadno, že tato limita je konečná a že je to limita i původní posloupnosti.)

*Cvičení 9.* Buď funkce $f$ definována v $\langle a, \infty)$. Pak existuje $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \in E_1$, $\alpha$) když a jen když každá posloupnost $\{f(a_n)\}$, kde $a_n \to \infty$, je konvergentní, $\beta$) když a jen když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $A$, že pro $x > A$, $y > A$ platí vždy $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

*Cvičení 10.* Buďte $f$, $g$ omezené v $(-\infty, \infty)$, $g$ buď neklesající. Nechť existuje $\int_a^b f \, dg$ pro každou dvojici $a, b \in E_1$. Pak existuje $\int_{-\infty}^{\infty} f \, dg$.

*Cvičení 11.* Buďte funkce $f$, $g$, $h$ definovány v $\langle a, \infty)$; $f$, $g$ buďte konečné, $f$ omezená monotonní, $g$ spojitá neklesající. Buď funkce $H$ v $\langle a, \infty)$ neurčitým integrálem funkce $h$ podle funkce $g$. Jestliže buď je funkce $H$ omezená a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ nebo existuje $\int_a^{\infty} h \, dg$, pak existuje také $\int_a^{\infty} fh \, dg$. (Použijte cvičení 9 a věty 93.)

*Cvičení 12.* Dokažte, že existuje $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin x}{x} \, dx$, ale neexistuje $\int_0^{\infty} \dfrac{|\sin x|}{x} \, dx$. (V prvním případě lze užít cvič. 11, v druhém případě odhadu $\dfrac{|\sin x|}{x} \geqq \dfrac{\sin^2 x}{x} = \dfrac{1 - \cos 2x}{2x}$.)

*Cvičení 13.* Ukažte na příkladě funkcí $f$, $g$, kde $f(0) = g(0) = 0$, $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^4}$, $g(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x^4}$, že formule

$$\int_a^b f'(x) \, g(x) \, dx + \int_a^b f(x) \, g'(x) \, dx = [f(x) \, g(x)]_a^b$$

nemusí mít smysl, ani když v každém bodě existují vlastní derivace. (Zde je $\int_0^1 f'(x) \cdot g(x)\, dx = -\infty$, $\int_0^1 f(x)\, g'(x) = \infty$, jak se snadno zjistí vhodnou substitucí.)

*Cvičení 14.* Dokažte, že množina všech posloupností, jejichž členové jsou nuly a jedničky, není spočetná. (Kdyby byla, sestavili bychom posloupnost $P_1, P_2, \dots$ všech takových posloupností; je-li však $P_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \dots\}$, pak posloupnost $P = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, kde $b_i = 1 - a_i^{(i)}$, je různá ode všech $P_i$.)

*Cvičení 15.* Buď $D_1$ množina, vzniklá z $\langle 0, 1\rangle$ odstraněním otevřené prostřední třetiny; $D_1$ je tedy sjednocením dvou intervalů $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ a $\langle \frac{2}{3}, 1\rangle$. Buď $D_2$ množina, která vznikne odstraněním prostředních třetin z obou intervalů množiny $D_1$; $D_2$ je tedy sjednocením čtyř intervalů. Tak postupujme dále; obecně buď $D_n$ sjednocení systému $2^n$ uzavřených intervalů, který vznikne tím, že z každého z $2^{n-1}$ intervalů množiny $D_{n-1}$ odstraníme otevřenou prostřední třetinu. Buď $D = \prod_{n=1}^{\infty} D_n$. Množina $D$ se nazývá Cantorovo diskontinuum. Dokažte, že $D$ není spočetná. (Intervaly z $D_1$ očíslujeme (0), (1); intervaly z $D_2$ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1); intervaly z $D_3$ očíslujeme (0, 0, 0), (0, 0, 1), ..., (1, 1, 1) atd.[11]) Každé posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = 0$ nebo $a_n = 1$, můžeme tedy přiřadit posloupnost intervalů s indexy $(a_1)$, $(a_1, a_2)$, $(a_1, a_2, a_3)$, ... a také průnik této posloupnosti. Tak je každé posloupnosti z nul a jedniček přiřazen jistý bod z $D$ a zřejmě různým posloupnostem jsou přiřazeny různé body.)

*Cvičení 16.* Je-li $A \subset E_1$, nazveme charakteristickou funkcí množiny $A$ funkci $c_A$, určenou vztahy $c_A(x) = 0$ pro $x \in E_1 - A$, $c_A(x) = 1$ pro $x \in A$. Je-li $A$ omezená, $a \leq x \leq b$ pro $x \in A$, nazveme čísla $\overline{\int_a^b} c_A(x)\, dx$, $\underline{\int_a^b} c_A(x)\, dx$ horní, resp. dolní měrou množiny $A$. Existuje-li $\int_a^b c_A(x)\, dx$, řekneme, že množina $A$ je měřitelná. Existuje-li dokonce Riemannův integrál $R\int_a^b c_A(x)\, dx$, řekneme, že množina $A$ je jordanovsky měřitelná (má Jordanovu míru). Snadno se zjistí, že interval $\langle u, v\rangle$ má Jordanovu míru $v - u$. Dokažte, že Cantorovo diskontinuum $D$ má Jordanovu míru 0. Dále ukažte, že funkce $c_D$ nemá Knichalův integrál přes to, že má Riemannův integrál. (Součet délek všech intervalů z $D_n$ je roven $(\frac{2}{3})^n$, tedy $R\int_0^1 c_D(x)\, dx \leq$ $\leq (\frac{2}{3})^n$ pro $n = 1, 2, \dots$)

*Cvičení 17.* Buď $A$ množina všech racionálních čísel v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte, že funkce $c_A$ má v tomto intervalu Knichalův integrál, ale nemá Riemannův integrál (vzhledem k funkci $g(x) = x$).

*Cvičení 18.* Jsou-li $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$ měřitelné množiny v $\langle 0, 1\rangle$, je též $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ měřitelná množina a její míra je rovna limitě posloupnosti měr množin $A_n$. Tvoříme-li nyní množiny $D_1, D_2, \dots$ podobně jako ve cvičení 15, ale tak, že při tvoření množiny $D_n$ odstraníme z každého z intervalů množiny $D_{n-1}$ pouze prostřední část o délce $\frac{2}{6^n}$, má množina $D = \prod_{n=1}^{\infty} D_n$ míru $\frac{1}{2}$. Sestavme „vymazané" části v posloupnost $\{I_1, I_2, I_3, \dots\}$ a definujme v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ funkci $f$ tímto předpisem:

---

[11]) Při číslování postupujeme vždy „od leva do prava".

Na množině $D$ buď $f(x) = 0$. Je-li nyní $I_n = \langle a_n, b_n\rangle$, $3d_n = b_n - a_n$, $x \in (a_n, a_n + d_n\rangle$, buď $f(x) = (x - a_n)^2 \sin \frac{1}{x - a_n}$, pro $x \in \langle b_n - d_n, b_n)$ buď $f(x) = (b_n - x)^2 \sin \frac{1}{b_n - x}$; v intervalu $\langle a_n + d_n, b_n - d_n\rangle$ pak doplníme $f$ tak, aby platilo pro každé $x \in (a_n, b_n)$ jednak $|f'(x)| < 2$, jednak $|f(x)| \leqq \min((x - a_n)^2, (b_n - x)^2)$.

Dokažte, že funkce $f$ má v každém bodě intervalu $\langle 0, 1\rangle$ derivaci (v krajních bodech zprava a zleva) a že platí pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ $|f'(x)| < 2$; pro $x \in D$ je $f'(x) = 0$, ale $\overline{\lim_{t\to x}} f'(t) = 1$, $\underline{\lim_{t\to x}} f'(t) = -1$. Funkce $f'$ má tedy v $\langle 0, 1\rangle$ Newtonův integrál. Je-li však interval $J$ částí $\langle 0, 1\rangle$ a je-li $JD \neq 0$, je $\sup_{x \in J} f'(x) \geqq 1$, $\inf_{x \in J} f'(x) \leqq -1$. Je-li nyní $\vartheta$ libovolné dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je součet délek všech intervalů $J \in \vartheta$, pro něž $JD \neq 0$, vždy aspoň $\frac{1}{2}$ (jinak by byla míra $D$ menší než $\frac{1}{2}$); odtud plyne, že je $S(f', \vartheta) \geqq 1 + s(f', \vartheta)$ (viz 60) a tedy funkce $f'$ nemá Riemannův integrál. Protože $f'(x) = \lim n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ (pro $x < 1$), máme zároveň příklad omezené funkce první třídy, která nemá Riemannův integrál.

*Cvičení 19.* Je-li $f \in \mathfrak{P}_A(G, K)$, řekneme, že funkce $f$ má v $K$ Lebesgueův integrál (vzhledem k funkci $G$). Buď $g(0) = 0$, $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ pro $x \neq 0$. Ukažte, že všude existuje $g'(x)$ (je $g'(0) = 0$) a že funkce $g'$ nemá v $\langle 0, 1\rangle$ (obyčejný) Lebesgueův integrál (je $\int_0^1 |g'(x)|\, dx = \infty$). Funkce $g'$ má ovšem v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ Newtonův a nevlastní Riemannův integrál. Je-li $f$ funkce, sestrojená ve cvičení 18, pak funkce $f' + g'$ nemá v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ani Riemannův (vlastní ani nevlastní) ani Lebesgueův integrál (a má ovšem Newtonův integrál).

*Cvičení 20.* Buď $g$ konečná neklesající v $\langle a, b\rangle$; buďte $f, h$ konečné nezáporné bodové funkce v $\langle a, b\rangle$, $h$ buď neklesající. Pak platí (píšeme $\underline{f}(x)$ místo $\underline{f}(g, x, \langle a, b\rangle)$ atd.) $(\underline{fh})(x) \geqq \underline{f}(x)\, h(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. (Viz důkaz věty 92.)

*Cvičení 21.* Řekneme, že funkce $f$ má v intervalu $\langle a, b\rangle$ vlastnost $V$, je-li tam konečná, existuje-li $f(x+)$, $f(x-)$ a platí-li $f(x-) \leqq f(x) \leqq f(x+)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ (klademe $f(a-) = f(a)$, $f(b+) = f(b)$). Dokažte: Je-li $g$ konečná neklesající v $\langle a, b\rangle$ a mají-li **nezáporné** funkce $f$, $h$ v $\langle a, b\rangle$ vlastnost $V$, platí pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ ($\underline{f}(x)$ značí opět $\underline{f}(g, x, \langle a, b\rangle)$ atd.)

$$(\underline{fh})(x) \geqq \underline{f}(x)\, h(x) + f(x)\, \underline{h}(x).$$

(Návod: Dokažte napřed, že platí $(\underline{fh})(g, x, \langle x, b\rangle) \geqq \underline{f}(x)\, h(x) + f(x)\, \underline{h}(x)$. Rozeznávejte případ, kdy některá z funkcí $f, h$ je spojitá zprava a případ, kdy platí zároveň $f(x) < f(x+)$, $h(x) < h(x+)$. Srovnejte s výsledkem cvič. 20.)

*Cvičení 22.* Buď $g$ **spojitá** neklesající v $\langle a, b\rangle$; nechť $f \in \mathfrak{P}(g, \langle a, b\rangle)$. Buď $M$ bodová majoranta funkce $f$ vzhledem ke $g$. Pak má $M$ vlastnost $V$ ze cvič. 21.

*Cvičení 23.* Buď $g$ spojitá neklesající v $\langle a, b\rangle$. Nechť $f, h \in \mathfrak{P}(g, \langle a, b\rangle)$; buďte $F$, $H$ jejich neurčité integrály. Pak je $Fh + Hf \in \mathfrak{P}$ a platí

$$\int_a^b (Fh + Hf) = [FH]_a^b.$$

Zejména je tedy součin dvou (bodových) neurčitých integrálů opět neurčitým integrálem.

(Návod: Předpokládejme napřed $0 \leqq F \leqq 1$, $0 \leqq H \leqq 1$. Buďte $M, N$ majoranty, $m, n$ minoranty funkcí $f, h$; nechť $M(a) = m(a) = F(a)$, $N(a) = n(a) = H(a)$. Budiž $\Phi = MN + M(H - n) + N(F - m) + (M - m)(1 - n) + (N - n)(1 - m)$. Ze cvičení 20 až 22 plyne $\underline{\Phi} \geqq \underline{M}N + M\underline{N} + \underline{M}(H - n) + \underline{N}(F - m) - \overline{n}(M - m) - \overline{m}(N - n) = (\underline{M} - \overline{m})(N - n) + (\underline{N} - \overline{n})(M - m) + \underline{M}H + \underline{N}F \geqq \underline{M}H + \underline{N}F \geqq fH + hF$; tedy je $\Phi$ majorantou k $Fh + Hf$. Avšak $\inf(\Phi(b) - \Phi(a)) = [FH]_a^b$; platí tedy $[FH]_a^b \geqq \overline{\int_a^b} (Fh + Hf)$. Funkce $F^* = 1 - F$ je neurčitým integrálem funkce $f^* = -f$ a je $0 \leqq F^* \leqq 1$; platí tedy také $[F^*H]_a^b \geqq \overline{\int_a^b} (F^*h + Hf^*)$. Odtud plyne $-[FH]_a^b = -\int_a^b h + [H]_a^b - [FH]_a^b = \overline{\int_a^b} (-h) + [F^*H]_a^b \geqq \overline{\int_a^b} (-h) + \overline{\int_a^b} (F^*h + Hf^*) \geqq \overline{\int_a^b} (-h + (1 - F)\, h - Hf) = \overline{\int_a^b} (-Fh - Hf) = -\underline{\int_a^b} (Fh + Hf)$, tedy $[FH]_a^b \leqq \underline{\int_a^b} (\ldots)$, $[FH]_a^b = \int_a^b (\ldots)$. Předpoklad $0 \leqq F \leqq 1$, $0 \leqq H \leqq 1$ se nyní snadno odstraní. — Srovnejte tento výsledek s větou 94 a se cvič. 13.)

*Pokračování.*