Miroslav Brdička

Užití tensorové symboliky v elasticitě

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 3, 311--314

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117036

REFERÁTY O PŘEDNÁŠKÁCH V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ A V BRNĚ

UŽITÍ TENSOROVÉ SYMBOLIKY V ELASTICITĚ

(Referát o přednášce *M. Brdičky*, přednesené dne 23. ledna 1952.)

V přednášce autor ukázal na přednosti a užití tensorového počtu v klasické elasticitě, hlavně pokud jde o obecné úvahy. Tensorový počet není totiž jen „těsnopisem" matematických postupů, ale umožňuje i hlubší proniknutí k fysikální podstatě theorie. Pro zjednodušení úvah byly v této přednášce uvažovány pouze kartézské tensory, pro něž, jak je známo, odpadá rozdíl mezi složkami kontravariantními a kovariatními.

Tensory, jejichž složky se nezmění při libovolném otočení os souřadné soustavy nazýváme isotropními. Tak Kroneckerův symbol δ_{ij} je (jedničkový) isotropní tensor druhého řádu a Levi-Civitův tensor ε_{ijk}, antisymetrický ve všech třech indexech, je (jedničkový) isotropní tensor třetího řádu. Lze ukázati, že obecný isotropní tensor čtvrtého řádu η_{ijkl} lze vyjádřiti jako lineární kombinaci výrazů $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{ik}\delta_{jl}$ δ_{ie} a δ_{jk} ve tvaru

$$\eta_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{je} + \delta_{ie}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{je} - \delta_{ie}\delta_{jk}). \tag{1}$$

Složky vektoru elastického posunutí označme μ_i; pak složky symetrického tensoru deformace e_{ij} jsou definovány vztahem

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{2}$$

kde čárkou je vyznačena parciální derivace podle souřadnice, na př. $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Označíme-li složky tensoru napětí $\tau_{ij}(= \tau_{ji})$, je vztah mezi napětím a deformací dán zobecněným Hookovým zákonem

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}\,; \tag{3}$$

kde zavádíme sumační pravidlo, že se sčítá od 1 do 3 přes každý index, který se vyskytuje v jednom článku dvakrát. Elastické koeficienty C_{ijkl} ve vzorci (3) jsou materiálové konstanty; ovšem jsou to konstanty jen pokud máme na mysli tělesa homogenní.

Nyní nás zajímá tensorový charakter veličin C_{ijkl}. Je-li orthogonální transformace souřadnic dána vztahem

$$x'_i = a_{ik} x_k,$$

snadno dokážeme, že C_{ijkl} se transformují podle zákona

$$C'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kr} a_{ls} C_{mnrs},$$

t. j. jako složky tensoru čtvrtého řádu. Z rovnic (3) je zřejmé, že tento tensor je symetrický v indexech i a j, k a l a z energetických úvah plyne, že je i symetrický ve dvojicích indexů i, j a k, l. Obecně má tedy tento tensor 21 nezávislých složek; stejný počet nezávislých složek má i symetrický tensor druhého řádu v šestirozměrném prostoru a tak leží na snadě možnost zobrazení tensoru čtvrtého řádu v trojrozměrném prostoru C_{ijkl} jako symetrický tensor druhého řádu v prostoru šestirozměrném ([1] str. 37). Tímto zobrazením (podobně jako v označení Voigtově pomocí jen dvou indexů) je ovšem jeho přirozený tensorový charakter setřen.

Půjde-li o těleso isotropní, musí být zřejmě tensor C_{ijkl} isotropní, t. j. $C_{ijkl} = \eta_{ijkl}$, kde η_{ijkl} je dáno rovnicí (1). Dosadíme-li do pravé strany rovnice (3) za η_{ijkl} z (1), dostáváme

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\vartheta + 2\mu e_{ij}, \quad \vartheta = e_{mm}; \tag{4}$$

to je znění Hookova zákona pro isotropní těleso, vyjádřené pomocí Laméových konstant λ a μ.

Neuvažujeme-li objemové síly, můžeme psát podmínky rovnováhy v tensorové symbolice takto:

$$\tau_{ij,j} = 0 \tag{5}$$

a při úvahách o elastické rovnováze jde v podstatě o řešení těchto rovnic s příslušnými krajovými podmínkami. Jsou-li krajové podmínky dány v elastických posunutích μ_i, vyjadřujeme zpravidla v těchto posunutích pomocí Hookova zákona (4) i složky napětí τ_{ij}, t. j. vycházíme z rovnic

$$\mu\Delta\mu_i + (\lambda + \mu)\,\vartheta_{,i} = 0, \tag{6}$$

kde Δ je Laplaceův symbol v kartézských souřadnicích.

Jsou-li krajové podmínky dány v napětích τ_{ij}, snažíme se pochopitelně rovnici (5) integrovati přímo. Funkce τ_{ij} nejsou však navzájem nezávislé, neboť prostřednictvím Hookova zákona (4) jsou spojeny s funkcemi e_{ij}; mají-li pak tato e_{ij} vyjadřovati deformaci, t. j. mají-li mít tvar (2), musí být splněno šest rovnic kompatibility deformací (rovnice Saint-Venantovy), které lze tensorově psáti takto:

$$\varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{jln}\,e_{kl,mn} = 0. \tag{7}$$

Z nich můžeme po dosazení ze (4) a úpravách odvoditi rovnice kompatibility napětí (rovnice Beltramiho) ve tvaru

$$\Delta\tau_{ij} + \frac{1}{1+\sigma}\,\Theta_{,ij} = 0, \tag{8}$$

kde $\Theta = \tau_{mm}$ a σ je Poissonova konstanta. Máme tedy nalézti šest funkcí τ_{ij}, které by splňovaly rovnice (5) a (8), a pochopitelně i dané krajové podmínky.

Máme-li integrovati dvě soustavy rovnic (v našem případě jedna soustava sestává ze tří a druhá ze šesti rovnic), zpravidla se snažíme nalézti takové funkce, pomocí kterých by jedna soustava byla splněna identicky, takže pak druhá soustava slouží k určení těchto nových funkcí. V elasticitě při integraci výše uvedeného problému nazýváme tyto funkce funkcemi napětí. Položme na př.

$$\tau_{ij} = \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{jmn}\,\gamma_{km,ln}, \tag{9}$$

kde funkce napětí γ_{km} jsou složkami symetrického tensoru; rovnice (5) je splněna identicky a dosazení (9) do rovnice (8) vede po úpravách na rovnici (která ovšem representuje šest rovnic)

$$\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{jmn}\left(\Delta\gamma_{km} - \frac{1}{1+\sigma}\,\delta_{km}\,\Theta\right)_{,ln} = 0. \tag{10}$$

Rovnice (10) má však stejný vzhled jako rovnice kompatibility deformací (7), z čehož usuzujeme, že výraz v kulaté závorce má charakter deformace, t. j. můžeme jej vyjádřiti pomocí libovolného vektoru v_i takto:

$$\Delta\gamma_{km} - \frac{1}{1+\sigma}\,\delta_{km}\,\Theta = \tfrac{1}{2}\,(v_{i,k} + v_{k,i}).$$

To je řešení, ke kterému jiným postupem (a nikoliv s použitím tensorové symboliky) dospěl Krutkov ([2] str. 17—24), v jehož právě citované knize je též toto řešení podrobně diskutováno. V tomto řešení je jako speciální případ zahrnuto řešení Maxwellovo ($\gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} = 0$) a řešení Morerovo ($\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 0$).

Připomeňme závěrem, že před podobnou úlohou, jakou byla integrace rovnic (5) a (8), stojíme na př. v theorii elektromagnetického pole při integraci rovnic Maxwellových. Ve čtyřrozměrném prostoru specielni theorie relativnosti můžeme Maxwellovy rovnice pro vakuum psáti takto ($x_4 = ict$, c rychlost světla):

$$F_{ik,k} = 0, \tag{11}$$

$$\varepsilon_{iklm}\,F_{kl,m} = 0,$$

kde F_{ik} jsou složky antisymetrického tensoru druhého řádu, které odpovídají složkám intensity elektrického a magnetického pole, a kde

ε_{iklm} je Levi-Civitův tensor ve čtyřrozměrném prostoru. Každá z tensorových rovnic (11) představuje soustavu čtyř rovnic; jsou to ovšem parciální diferenciální rovnice prvého řádu, zatím co v (8) máme parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Zavedeme-li čtyřpotenciál φ_i tak, aby platilo

$$F_{ik} = \varepsilon_{iklm}\,\varphi_{e,m},$$

je první rovnice z (11) splněna identicky, zatím co druhá dává rovnici pro φ_i

$$\Box\,\varphi_i - \varphi_{k,ki} = 0,$$

kde $\Box$ je Laplaceův symbol v čtyřrozměrném pseudoeuklidovském prostoru. Bez omezení obecnosti veličin F_{ik} lze vždy zvoliti φ_i tak, aby platilo $\varphi_{k,k} = 0$, takže rovnice pro φ_i se zjednoduší na tvar

$$\Box\,\varphi_i = 0.$$

Zobecnění uvedených výsledků na obecné orthogonální souřadnice bude podáno na jiném místě.

Literatura

[1] *S. G. Lechnickij*, Teorija uprugosti anizotropnogo tela, Gostechizdat 1947.

[2] *Ju. A. Krutkov*, Tenzor funkcij naprjaženij i obščie rešenija v statike teorii uprugosti, Izdatelstvo AN SSSR, 1949.

DYNAMICKÉ ÚČINKY NA ŽELEZNIČNÍ MOSTY

(Referát o přednášce *Vl. Kalouška*, proslovené 21. května 1952.)

V úvodě přednášky byl podán přehled o výzkumu dynamických účinků v mezinárodních organisacích a u železničních správ různých států. Rozsáhlá měření byla konána v SSSR, Velké Britanii a USA. Poněvadž poměry na železnicích těchto zemí jsou odlišné od našich, nebylo možno výsledky prostě převzíti. Zkoumání v ostatních zemích, kde jsou poměry podobné jako u nás, nebylo dosti soustavné, a proto musely ČSD provésti měření vlastní.

Další část přednášky pojednávala o povaze dynamických vlivů na železniční mosty. Jsou to především rázy, vliv pohybu břemen po mostě a harmonicky proměnné síly, vznikající při rotaci hnacích kol lokomotivy. Podle toho, jak tyto vlivy na mosty působí, můžeme mosty rozděliti do tří skupin, na mosty s malým, středním a velkým rozpětím. V přednášce bylo analysováno pouze kmitání mostů velkého rozpětí a to ocelových mostů nejobvyklejší konstrukce s hlavními nosníky prostými.

Při theoretickém vyšetřování vycházíme z pohybových rovnic délkového elementu nosníku o délce dx, které mají při kmitání vlastní tvar