Miroslav Fiedler

O jistých maticích a rovnici pro parametry singulárních bodů racionální křivky. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 3, 243--265

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117047`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 77 (1952)

O JISTÝCH MATICÍCH A ROVNICI PRO PARAMETRY SINGULÁRNÍCH BODŮ RACIONÁLNÍ KŘIVKY

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 5. července 1951.)

DI 512.831

V prvé části článku přiřazuje autor formě n-tého stupně v proměnných t_1, t_2 matici, zavádí t. zv. defekt matice a odvozuje věty mezi defektem matice tvořené z matic několika forem a stupněm největšího společného dělitele. Dále dokazuje věty o maticích přiřazených daným formám.

V druhé části článku aplikuje výsledky při řešení problému určení parametrů singulárních bodů racionální křivky. Odvozuje formu, jež anulována dává rovnici pro tyto parametry.

Ve třetí části specialisuje a prohlubuje výsledky pro rovinné racionální křivky.

Část I.

V celém tomto článku budou všechny koeficienty brány ze základního tělesa K (o němž nečiníme zatím žádné předpoklady). Binární formě n-tého stupně, n-celé nezáporné,

$$a_{(n)}(t) = a_0 t_1^n + a_1 t_1^{n-1} t_2 + \ldots + a_n t_2^n,$$

přiřadíme pro každé přirozené číslo m matici

$$A_m^{(n)} = \begin{pmatrix} a_0, & a_1, \ldots & a_n, & 0, & \ldots 0 \\ 0, & a_0, \ldots & a_{n-1}, & a_n, & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, \ldots & & , a_0, & \ldots a_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

jež má m řádek (a $m + n$ sloupců).

Označme T_m, $m \geqq 1$, matici

$$T_m = \begin{pmatrix} t_1^{m-1} \\ t_1^{m-2} t_2 \\ \vdots \\ t_2^{m-1} \end{pmatrix}$$

Platí zřejmě

$$A_m^{(n)} T_{m+n} = a_{(n)}(t) \, . \, T_m. \tag{2}$$

Jsou-li $a_{(n_1)}$, $b_{(n_2)}$ dvě formy stupňů n_1 resp. n_2, $c_{(n_1+n_2)}$ jejich součin, pak pro každé přirozené m platí, jak se snadno verifikuje,

$$A_m^{(n_1)} B_{m+n_1}^{(n_2)} = C_m^{(n_1+n_2)} = B_m^{(n_2)} A_{m+n_2}^{(n_1)}. \tag{3}$$

V dalším budeme užívat matic rozdělených na pole. Příslušné věty o nich jsou uvedeny na př. v knize *A. J. Malceva*: *Osnovy linejnoj algebry*, kap. I. § 4. Typy (t. j. počet řádek a sloupců) nebudeme obvykle uvádět, na př. nulová pole značíme prostě 0. Jednotkovou s-řádkovou matici značíme I_s.

Defektem matice M, značeným def$M$, *nazveme rozdíl počtu sloupců matice a její hodnosti.*

Pro defekty platí pravidla:

P 1: $\quad \operatorname{def}A = 0 \Rightarrow \operatorname{def}\begin{pmatrix}A, & 0\\ C, & B\end{pmatrix} = \operatorname{def}\begin{pmatrix}0, & A\\ B, & C\end{pmatrix} = \operatorname{def}B.$

P 2: $\quad \operatorname{def}A = 0 \Rightarrow \operatorname{def}AB = \operatorname{def}B.$

P 3: $\quad \operatorname{def}A = 0 \Rightarrow \operatorname{def}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix} = 0.$

P 4: $\quad \operatorname{def}B' = 0 \Rightarrow \operatorname{def}AB = \operatorname{def}A + \operatorname{def}B.$

Důkaz. Platí známá věta, že hodnost matice (a tedy ani defekt) se nezmění, násobíme-li ji regulární maticí zprava nebo zleva, nezmění se ovšem ani permutací řádek nebo sloupců.

P 1: V matici $\begin{pmatrix}A, & 0\\ C, & B\end{pmatrix}$ permutujeme řádky tak, že místo matice A je po permutaci matice $\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}$, kde A_1, je regulární matice (A_1 existuje, neboť podle předpokladu je def$A = 0$). Je tedy

$$\operatorname{def}\begin{pmatrix}A, & 0\\ C, & B\end{pmatrix} = \operatorname{def}\begin{pmatrix}A_1, & 0\\ A_2, & 0\\ C, & B\end{pmatrix} = \operatorname{def}\left\{\begin{pmatrix}A_1^{-1}, & 0, 0\\ A_2A_1^{-1}, & -I, 0\\ CA_1^{-1}, & 0, I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1, & 0\\ A_2, & 0\\ C, & B\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \operatorname{def}\begin{pmatrix}I, & 0\\ 0, & 0\\ 0, & B\end{pmatrix} = \operatorname{def}B,$$

neboť předposlední matice má hodnost i počet sloupců o totéž číslo větší než matice B. Konečně

$$\operatorname{def}\begin{pmatrix}0, & A\\ B, & C\end{pmatrix} = \operatorname{def}\begin{pmatrix}A, & 0\\ C, & B\end{pmatrix},$$

neboť druhá matice vznikne z prvé permutací sloupců.

P 2: Nechť opět $\operatorname{def} A = 0$. Pak dle P 1 je

$$\operatorname{def} AB = \operatorname{def}\begin{pmatrix} AB, & 0 \\ B, & I \end{pmatrix} = \operatorname{def}\left\{\begin{pmatrix} I, & -A \\ 0, & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB, & 0 \\ B, & I \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \operatorname{def}\begin{pmatrix} 0, & -A \\ B, & I \end{pmatrix} = \operatorname{def} B.$$

P 3 je evidentní.

P 4: Poněvadž hodnosti matice A a matice transponované A' jsou stejné, je rozdíl mezi počtem sloupců a počtem řádek matice A roven $\operatorname{def} A - \operatorname{def} A'$, a tedy

$$\operatorname{def} AB - \operatorname{def}(AB)' = \operatorname{def} A - \operatorname{def} A' + \operatorname{def} B - \operatorname{def} B'.$$

Je-li $\operatorname{def} B' = 0$, je $\operatorname{def}(AB)' = \operatorname{def} B'A' = \operatorname{def} A'$, takže vskutku $\operatorname{def} AB = \operatorname{def} A + \operatorname{def} B$.

Než uvedeme hlavní větu 1, dokážeme tuto pomocnou větu: *Nechť $a_{(n_1)}$, $b_{(n_2)}$ jsou formy stupňů n_1 resp. n_2, ne obě rovny nule. Jsou-li nesoudělné (t. j. největší společný dělitel roven jedné, což značíme $\langle a_{(n_1)}, b_{(n_2)}\rangle = 1$, pak pro všechna celá $m \geqq n_1 + n_2$ je*

$$\operatorname{def}\begin{pmatrix} A^{(n_1)}_{m-n_1} \\ B^{(n_2)}_{m-n_2} \end{pmatrix} = 0.$$

Důkaz. Věta platí, je-li $n_1 = 0$ nebo $n_2 = 0$, lze tedy předpokládat $n_i > 0$, $i = 1, 2$, a pak jsou obě formy nenulové.

Je alespoň jedno z čísel a_{n_1}, b_{n_2} různé od nuly, neboť jinak by t_1 dělilo $a_{(n_1)}$ i $b_{(n_2)}$, budiž to $b_{(n_2)} \neq 0$. Pak však determinant hořejší matice, složený z prvých n_2 a posledních $m - n_2$ řádek, je roven

$$b_{n_2}^{m-n_1-n_2}\begin{pmatrix} A^{(n_1)}_{n_2} \\ B^{(n_2)}_{n_1} \end{pmatrix}.$$

Kdyby však determinant matice $\begin{pmatrix} A^{(n_1)}_{n_2} \\ B^{(n_2)}_{n_1} \end{pmatrix}$ byl roven nule, existovaly by jednořádkové matice

$$C_1^{(n_2-1)} = (c_0, c_1, \ldots, c_{n_2-1}), \quad D_1^{(n_1-1)} = (d_0, \ldots, d_{n_1-1})$$

ne obě současně nulové tak, že

$$(C_1^{(n_2-1)}, D_1^{(n_1-1)})\begin{pmatrix} A^{(n_1)}_{n_2} \\ B^{(n_2)}_{n_1} \end{pmatrix} = 0,$$

tedy

$$C_1^{(n_2-1)}A^{(n_1)}_{n_2} = -D_1^{(n_1-1)}B^{(n_2)}_{n_1};$$

jsou-li $c_{(n_2-1)}(t)$, $d_{(n_2-1)}(t)$ formy příslušné k maticím $C_1^{(n_2-1)}$, $D_1^{(n_1-1)}$, je podle (3) identicky

$$a_{(n_1)}(t) \,.\, c_{(n_2-1)}(t) = - b_{(n_2)}(t)\, d_{(n_1-1)}(t).$$

Poněvadž jsou $a_{(n_1)}$, $b_{(n_2)}$ nesoudělné, $a_{(n_1)}$ dělí $d_{(n_1-1)}$, takže $d_{(n_1-1)} = 0$ a také $c_{(n_2-1)} = 0$ identicky, což je spor.

Věta 1. *Budiž dáno r forem n-tého stupně, $n \geqq 1$, $a_{(n)}, b_{(n)}, \ldots, l_{(n)}$ takových, že matice*

$$\begin{pmatrix} A_1^{(n)} \\ B_1^{(n)} \\ \vdots \\ L_1^{(n)} \end{pmatrix}$$

má hodnost $h \geqq 1$.

Pak platí: je-li největší společný dělitel forem $a_{(n)}, \ldots, l_{(n)}$ s-tého stupně, pak pro všecka celá $m \geqq 2n - s - (h - 2)$ má matice

$$\begin{pmatrix} A_{m-n}^{(n)} \\ B_{m-n}^{(n)} \\ \vdots \\ L_{m-n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

defekt právě s.

Důkaz. Především dokážeme nerovnost

$$s \leqq n - h + 1. \tag{4}$$

Budiž

$$\langle a_{(n)}, b_{(n)}, \ldots, l_{(n)} \rangle = d_{(s)},$$

$$a_{(n)} = \bar{a}_{(n-s)} d_{(s)},\ b_{(n)} = \bar{b}_{(n-s)} d_{(s)}, \ldots, l_{(n)} = \bar{l}_{(n-s)} d_{(s)}.$$

Podle (3) je

$$A_1^{(n)} = \bar{A}_1^{(n-s)} D_{n-s+1}^{(s)}$$

atd., takže matice

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} A_1^{(n)} \\ B_1^{(n)} \\ \vdots \\ L_1^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1^{(n-s)} \\ \bar{B}_1^{(n-s)} \\ \vdots \\ \bar{L}_1^{(n-s)} \end{pmatrix} . D_{n-s+1}^{(s)}.$$

Poněvadž je $\operatorname{def}(D_{n-s+1}^{(s)})' = 0$, lze užít P 4, takže (defekt matice je vždy nezáporný)

$$n - h + 1 = \operatorname{def} \begin{pmatrix} A_1^{(n)} \\ \vdots \\ L_1^{(n)} \end{pmatrix} \geqq \operatorname{def} D_{n-s+1}^{(s)} = s,$$

což jsme chtěli dokázat.

Nyní přejdeme k vlastnímu důkazu věty. Pro $h = 1$ věta platí (je pak $s = n$). Budiž tedy $h > 1$ a předpokládejme platnost věty pro všechny soustavy forem, jejichž hodnost je menší než h.

Nechť tedy hodnost μ_1 je $h > 1$; mezi řádky μ_1 je h řádek lineárně nezávislých, nechť je to prvých h:

$$A_1^{(n)}, B_1^{(n)}, \ldots, F_1^{(n)}, G_1^{(n)},$$

ostatní jsou na nich lineárně závislé.

Dokážeme nejprve: Matice

$$\bar{\mu}_1 = \begin{pmatrix} A_{m-n}^{(n)} \\ B_{m-n}^{(n)} \\ \vdots \\ G_{m-n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

má pro $m \geqq 2n - s - (h - 2)$ defekt s (je ovšem opět $\langle a_{(n)}, b_{(n)}, \ldots$ $\ldots, g_{(n)}\rangle = \bar{d}_{(s)}$).

Je $\langle \bar{a}_{(n-s}, \bar{b}_{(n-s)}, \ldots, \bar{g}_{(n-s)}\rangle = 1$, je tedy alespoň jeden z koeficientů u $t_1^{n-s} : \bar{a}_0, \ldots, \bar{g}_0$ různý od nuly (jinak by t_2 dělilo všechny $\bar{a}_{(n-s)}, \ldots, \bar{g}_{(n-s)}$), budiž to $\bar{g}_0 \neq 0$.

Formy

$$\begin{aligned} \bar{\bar{a}}_{(n-s)} &= \bar{g}_0\bar{a}_{(n-s)} - \bar{a}_0\bar{g}_{(n-s)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\bar{f}}_{(n-s)} &= \bar{g}_0\bar{f}_{(n-s)} - \bar{f}_0\bar{g}_{(n-s)} \end{aligned}$$

mají největšího společného dělitele $\delta_{(p)}$ stupně $p \geqq 1$ (5), neboť jsou všechny dělitelny alespoň t_2, nechť tedy

$$\begin{gathered} \bar{\bar{a}}_{(n-s)} = \alpha_{(n-p-s)}\delta_{(p)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\bar{f}}_{(n-s)} = \varphi_{(n-p-s)}\delta_{(p)}, \\ \langle \alpha_{(n-p-s)}, \ldots, \varphi_{(n-p-s)}\rangle = 1, \quad \langle \bar{g}_{(n-s)}, \delta_{(p)}\rangle = 1. \end{gathered} \tag{6}$$

K $\alpha_{(n-p-s)}, \ldots, \varphi_{(n-p-s)}$ příslušná matice

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n-p-s)} \\ \beta_1^{(n-p-s)} \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-p-s)} \end{pmatrix}$$

má hodnost $h - 1$, protože má $h - 1$ řádek, je její hodnost $\mathrm{h}(\nu_1) \leqq h - 1$. Kdyby však $\mathrm{h}(\nu_1) < h - 1$, byly by formy $\alpha_{(n-p-s)}, \ldots, \varphi_{(n-p-s)}$ lineárně závislé, a proto i formy $a_{(n)}, \ldots, g_{(n)}$ proti předpokladu.

Poněvadž je $h(\nu_1) < h$, lze na formy $\alpha_{(n-p-s)}, \ldots, \varphi_{(n-p-s)}$ podle indukčního předpokladu aplikovat větu: je tedy (pro naše $m \geqq 2n - s - (h-2)$)

$$\operatorname{def}\begin{pmatrix} \alpha_{m-n}^{(n-p-s)} \\ \beta_{m-n}^{(n-p-s)} \\ \vdots \\ \varphi_{m-n}^{(n-p-s)} \end{pmatrix} = 0,$$

neboť

$$n_0 = n - p - s,\ m_0 = m - p - s,\ s_0 = 0,\ h_0 = h - 1$$

a z

$$m \geqq 2n - s - (h-2) \geqq 2n - s - (h-2) - (p-1),$$

plyne

$$m - p - s \geqq 2(n - p - s) - (h - 3),$$

čili vskutku

$$m_0 \geqq 2n_0 - s_0 - (h_0 - 2).$$

Je však

$$\operatorname{def}\begin{pmatrix} A_{m-n}^{(n)} \\ B_{m-n}^{(n)} \\ \vdots \\ G_{m-n}^{(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{def}\left\{\begin{pmatrix} \bar{A}_{m-n}^{(n-s)} \\ \bar{B}_{m-n}^{(n-s)} \\ \vdots \\ \bar{G}_{m-n}^{(n-s)} \end{pmatrix} D_{m-s}^{(s)}\right\} \underset{(P4)}{=} \operatorname{def}\begin{pmatrix} \bar{A}_{m-n}^{(n-s)} \\ \vdots \\ \bar{F}_{m-n}^{(n-s)} \\ \bar{G}_{m-n}^{(n-s)} \end{pmatrix} + \operatorname{def} D_{m-s}^{(s)} =$$

$$= \operatorname{def}\left\{\begin{bmatrix} \bar{g}_0 I_{m-n}, & 0, & \ldots, & 0, & -\bar{a}_0 I_{m-n} \\ 0, & \bar{g}_0 I_{m-n}, & \ldots, & 0, & -\bar{b}_0 I_{m-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & \bar{g}_0 I_{m-n}, & -\bar{f}_0 I_{m-n} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & I_{m-n} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \bar{A}_{m-n}^{(n-s)} \\ \vdots \\ \bar{F}_{m-n}^{(n-s)} \\ \bar{G}_{m-n}^{(n-s)} \end{pmatrix}\right\} + s =$$

$$= \operatorname{def}\begin{pmatrix} \bar{\bar{A}}_{m-n}^{(n-s)} \\ \vdots \\ \bar{\bar{F}}_{m-n}^{(n-s)} \\ \bar{G}_{m-n}^{(n-s)} \end{pmatrix} + s = \operatorname{def}\begin{pmatrix} \alpha_{m-n}^{(n-p-s)} \cdot \delta_{m-p-s}^{(p)} \\ \vdots \\ \varphi_{m-n}^{(n-p-s)} \cdot \delta_{m-p-s}^{(p)} \\ \bar{G}_{m-n}^{(n-s)} \end{pmatrix} + s =$$

$$\underset{(P1)}{=} \operatorname{def}\begin{bmatrix} \alpha_{m-n}^{(n-p-s)} \cdot \delta_{m-p-s}^{(p)}, & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{m-n}^{(n-p-s)} \cdot \delta_{m-p-s}^{(p)}, & 0 \\ \bar{G}_{m-n}^{(n-s)}, & 0 \\ \delta_{m-p-s}^{(p)}, & I_{m-p-s} \end{bmatrix} + s =$$

$$= \operatorname{def}\left\{\begin{bmatrix} I_{m-n}, & \ldots, & 0, & 0, & \alpha_{m-n}^{(n-p-s)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \ldots, & I_{m-n}, & 0, & \varphi_{m-n}^{(n-p-s)} \\ 0, & \ldots, & 0, & I_{m-n}, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & 0, & I_{m-p-s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0, & -\alpha_{m-n}^{(n-p-s)} \\ \vdots & \vdots \\ 0, & -\varphi_{m-n}^{(n-p-s)} \\ \bar{G}_{m-n}^{(n-s)} & 0 \\ \delta_{m-p-s}^{(p)} & I_{m-p-s} \end{bmatrix}\right\} + s =$$

$$= \operatorname{def}\begin{bmatrix} 0, & -\alpha_{m-n}^{(n-p-s)} \\ \vdots & \vdots \\ 0, & -\varphi_{m-n}^{(n-p-s)} \\ \overline{G}_{m-n}^{(n-s)}, & 0 \\ \delta_{m-p-s}^{(p)}, & I_{m-p-s} \end{bmatrix} + s \underset{(\mathrm{P1})}{=} \operatorname{def}\begin{pmatrix} \overline{G}_{m-n}^{(n-s)} \\ \delta_{m-p-s}^{(p)} \end{pmatrix} + s = s,$$

neboť pro poslední rovnici je $\overline{m} = m - s$, $\overline{n}_1 = n - s$, $\overline{n}_2 = p$, aplikace nerovnosti (4) na formy $\overline{a}_{(n-s)}, \ldots, \overline{f}_{(n-s)}$ dává $p \leqq (n - s) - (h - 1) + 1$, takže z dané nerovnosti $m \geqq n + n - s - (h - 1) + 1 \geqq n + p$ plyne

$$m - s \geqq n + p - s, \quad \text{t. j.} \quad \overline{m} \geqq \overline{n}_1 + \overline{n}_2$$

a pro formy $\overline{g}_{(n-s)}, \delta_{(p)}$ lze užít předchozí pomocné věty, z níž plyne

$$\operatorname{def}\begin{pmatrix} \overline{G}_{m-n}^{(n-s)} \\ \delta_{m-p-s}^{(p)} \end{pmatrix} = 0.$$

Protože je

$$\operatorname{def}\begin{bmatrix} A_{m-n}^{(n)} \\ \vdots \\ G_{m-n}^{(n)} \\ H_{m-n}^{(n)} \\ \vdots \\ L_{m-n}^{(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{def}\begin{bmatrix} A_{m-n}^{(n)} \\ \vdots \\ G_{m-n}^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{def}\begin{pmatrix} A_{m-n}^{(n)} \\ \vdots \\ G_{m-n}^{(n)} \end{pmatrix} = s,$$

je věta dokázána pro všechny soustavy hodnosti h a tedy úplně.

Ukážeme ještě, jak se nalezne forma (a k ní příslušná matice), která vznikne substitucí

$$\begin{aligned} t_1 &= p_{(k)}(t_1', t_2') \\ t_2 &= q_{(k)}(t_1', t_2'), \end{aligned} \tag{7}$$

kde $p_{(k)}, q_{(k)}$ jsou nesoudělné formy stupně $k \geqq 1$, do dané formy.

Věta 2. *Budiž $c_{(n)}(t)$ forma n-tého stupně, $f_{(kn)}(t')$ pak forma po substituci* (7) *do $c_{(n)}$:*

$$f_{(kn)}(t') = c_{(n)}(p_{(k)}(t'), q_{(k)}(t'));$$

pak pro $m > nk$ platí

$$F_{m-kn}^{(kn)} = c_0[P^n]_{m-kn} + c_1[P^{n-1}Q]_{m-kn} + \ldots + c_n[Q^n]_{m-kn}, \tag{8}$$

kde matice $[P^rQ^{n-r}]$ je matice o $m - kn$ řádkách, příslušná formě $p_{(k)}^r q_{(k)}^{n-r}$, matice $F_{m-kn}^{(kn)}$ pak matice příslušná formě $f_{(kn)}$.

Důkaz. Platí zřejmě: je-li věta 2 správná pro dvě formy téhož stupně $c_{(n)}^1, c_{(n)}^2$, je správná i pro formu $\gamma_1 c_{(n)}^1 + \gamma_2 c_{(n)}^2$, kde γ_1, γ_2 jsou čísla. Věta 2 je však správná pro formy $t_1^n, t_1^{n-1}t_2, \ldots, t_2^n$, je tedy správná pro každou formu n-tého stupně $c_{(n)}(t)$.

Věta 3. *Pro každé přirozené r platí*

$$F_{rkn}^{(kn)} = R_r^{-1}(C_{rn}^{(n)} \times . I_k)R_{r+1}, \tag{9}$$

kde 1.

$$R_s = \begin{pmatrix} [P^{sn-1}]_k \\ [P^{sn-2}Q]_k \\ \vdots \\ [Q^{sn-1}]_k \end{pmatrix}$$

je regulární matice,

2. $$C_{rn}^{(n)} \times . I_k = \begin{pmatrix} c_0 I_k, c_1 I_k, \ldots, & c_n I_k, & 0, \ldots, 0 \\ 0, \quad c_0 I_k, \ldots, c_{n-1} I_k, c_n I_k, \ldots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0, \quad 0, \quad \ldots, c_0 I_k, \quad \ldots, \quad c_n I_k \end{pmatrix},$$

kde řádek je celkem rkn.

Důkaz. Podle věty 2 je

$$F_{rkn}^{(kn)} = c_0[P^n]_{rkn} + c_1[P^{n-1}Q]_{rkn} + \ldots + c_n[Q^n]_{rkn};$$

odtud

$$R_r F_{rkn}^{(kn)} = \begin{pmatrix} [P^{rn-1}]_k \\ [P^{rn-2}Q]_k \\ \vdots \\ [Q^{rn-1}]_k \end{pmatrix} (c_0[P^n]_{rkn} + \ldots + c_n[Q^n]_{rkn}) =$$

$$= \begin{pmatrix} c_0[P^{(r+1)n-1}]_k + c_1[P^{(r+1)n-2}Q]_k + \ldots + c_n[P^{rn-1}Q^n]_k \\ c_0[P^{(r+1)n-2}Q]_k + c_1[P^{(r+1)n-3}Q^2]_k + \ldots + c_n[P^{rn-2}Q^{n+1}]_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_0[P^n Q^{rn-1}]_k + c_1[P^{n-1}Q^{rn}]_k + \ldots + c_n[Q^{(r+1)n-1}]_k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_0 I_k, c_1 I_k, \ldots, & c_n I_k, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, \quad c_0 I_k, \ldots, c_{n-1} I_k, c_n I_k, \ldots, & & & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0, \quad 0, \quad \ldots, c_0 I_k, & & \ldots, & c_n I_k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} [P^{(r+1)n-1}]_k \\ [P^{(r+1)n-2}Q]_k \\ \vdots \\ [Q^{(r+1)n-1}]_k \end{pmatrix} =$$

$$= (C_{rn}^{(n)} \times . I_k)R_{r+1}.$$

Musíme ještě dokázat, že R_s je regulární matice. Předpokládejme, že je singulární, pak existuje sn k-členných vektorů ne vesměs nulových $\overset{1}{c}{}_1^{(k-1)}, \overset{2}{c}{}_1^{(k-1)}, \ldots, \overset{sn}{c}{}_1^{(k-1)}$ tak, že platí

$$(\overset{1}{c}{}_1^{(k-1)} \overset{2}{c}{}_1^{(k-1)} \ldots \overset{sn}{c}{}_1^{(k-1)})R_s = 0,$$

t. j.

$$\overset{1}{c}{}_1^{(k-1)}[P^{sn-1}]_k + \overset{2}{c}{}_1^{(k-1)}[P^{sn-2}Q]_k + \ldots + \overset{sn}{c}{}_1^{(k-1)}[Q^{sn-1}]_k = 0;$$

podle (3) je tedy identicky:

$$p_{(k)}^{sn-1}\overset{1}{c}_{(k-1)}(t) + p_{(k)}^{sn-2}q_{(k)}\overset{2}{c}_{(k-1)}(t) + \dots + q_{(k)}^{sn-1}\overset{sn}{c}_{(k-1)}(t) = 0,$$

kde $\overset{i}{c}_{(k-1)}$ je forma $(k - 1)$-ho stupně příslušná k $\overset{i}{c}_1^{(k-1)}$.

Množina nenulových $\overset{i}{c}_{(k-1)}$ je podle předpokladu neprázdná, existuje tedy $(i \leqq sn)$ největší index α, pro který je $\overset{\alpha}{c}_{(k-1)} \neq 0$. Mohou nastat dva případy:

a) $\alpha = sn$, pak musí být

$$p_{(k)}^{sn-1}\overset{1}{c}_{(k-1)} + \dots + p_{(k)}q_{(k)}^{sn-2}\overset{sn-1}{c}_{(k-1)} = 0$$

identicky, neboť jinak by $(p_{(k)}, q_{(k)}$ jsou nesoudělné) $p_{(k)}$ dělilo $q_{(k)}^{sn-1}\overset{sn}{c}_{(k-1)}$ a tedy $\overset{sn}{c}_{(k-1)}$, což vzhledem k $\overset{sn}{c}_{(k-1)} \neq 0$ a menšímu stupni $\overset{sn}{c}_{(k-1)}$ není možné. Pak však je též $q_{(k)}^{sn-1}\overset{sn}{c}_{(k)} = 0$ identicky, což je spor.

b) $\alpha < sn$, lze krátit $p_{(k)}^{sn-\alpha}$, čímž vznikne obdobná situace jako v a), což je nemožné.

Je tedy R_s regulární, existuje k ní matice inversní a platí (9).

Věta 4. *Budiž $k = 1$ ve větě 3. Pak platí pro každé přirozené m*

$$F_m^{(n)} = E_m^{-1}C_m^{(n)}E_{m+n} \tag{10}$$

kde

$$E_s = \begin{pmatrix} [P^{s-1}]_1 \\ [P^{s-2}Q]_1 \\ \vdots \\ [Q^{s-1}]_1 \end{pmatrix}$$

je matice regulární.

Důkaz je obdobný důkazu věty 3 a vynecháme jej.

Ve třetí části budeme ještě potřebovat tuto větu o maticích s prvky z oboru integrity $K[\lambda]$ polynomů jedné neurčité nad tělesem K*):

Věta 5. *Nechť A a B jsou matice téže hodnosti s prvky v $K[\lambda]$. Nutná a postačující pominka, aby invariantní faktory matice A byly dělitelny stejnolehlými**) invariantními faktory matice B, je: existují nad $K[\lambda]$ matice P a Q tak, že $A = PBQ$.*

*) Věta platí i pro matice s prvky v libovolném eukleidovském okruhu.

**) V tomto smyslu: mají-li matice A a B touž hodnost r a jsou-li invariantní faktory matice A resp. B $f_1, f_2, \dots, f_r$ ($f_i \mid f_{i+1}$ pro $i = 1, \dots, r - 1$) resp. $g_1, g_2, \dots, g_r$ ($g_i \mid g_{i+1}$ pro $i = 1, \dots, r - 1$), pak pro $i = 1, 2, \dots, r$ jsou f_i a g_i stejnolehlé invariantní faktory.

Poznámka 1. Vyhovují-li matice A a B podmínce věty, pak existují dokonce matice P a Q maximální možné hodnosti, pro něž je $A = PBQ$.

Poznámka 2. Věta 5 spolu s poznámkou 1 je zobecněním věty*): Nutná a postačující podmínka, aby matice A a B téhož typu měly stejné invariantní faktory, je: existují regulární**) matice P a Q nad $K[\lambda]$ tak, že $A = PBQ$.***) Této věty při důkazu věty 5 několikrát užijeme.

Důkaz věty 5. Nejprve dokážeme tři pomocná tvrzení:

Pomocné tvrzení 1. Budiž A matice nad $K[\lambda]$, která nemá prvý řádek nulový a budiž d největší společný dělitel prvků tohoto řádku. Pak existuje matice A_1, jejíž prvý řádek je $d, 0, \ldots, 0$, a regulární matice P tak, že $A = A_1 P$.

Důkaz. Označme a_1 matici, složenou z prvků prvého řádku matice A. Protože a_1 má jediný invariantní faktor d, existují podle poznámky 2 regulární matice $U = (u)$, V tak, že

$$a_1 = U(d, 0, \ldots, 0)\, V = (d, 0, \ldots, 0)\, U_1 V,$$

kde

$$U_1 = \begin{pmatrix} u, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix}.$$

Položíme-li $P = U_1 V$ a $A_1 = AP^{-1}$, dostaneme matice, vyhovující pomocnému tvrzení 1.

Pomocné tvrzení 2. Buďtež pro $n \geqq 1$

$$A = \begin{bmatrix} \varphi v_0, & 0, 0, \ldots, 0, & 0 \\ v_1, & f_1, 0, \ldots, 0, & 0 \\ v_2, & 0, f_2, \ldots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}, & 0, 0, \ldots, f_{n-1}, & 0 \\ v_n, & 0, 0, \ldots, 0, & f_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} v_0, & 0, 0, \ldots, 0, & 0 \\ v_1, & f_1, 0, \ldots, 0, & 0 \\ v_2, & 0, f_2, \ldots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}, & 0, 0, \ldots, f_{n-1}, & 0 \\ v_n, & 0, 0, \ldots, 0, & f_n \end{bmatrix}$$

matice nad $K[\lambda]$, $|A| \neq 0$, $\varphi \in K[\lambda]$, $f_{i+1} \mid f_i$ pro $i = 1, \ldots, n-1$. Potom invariantní faktory matice A jsou dělitelny stejnolehlými invariantními faktory matice B.

Důkaz. Definujme $f_{n+1} = 1$, $f_0 = 0$, $g_i = \dfrac{f_i}{f_{i+1}}$ pro $i = 0, \ldots, n$,

---

*) Důkaz této věty je uveden na př. v knize *J. Malcev: Osnovy linejnoj algebry*, OGIZ 1948, str. 162.

**) Matici P nazýváme regulární nad $K[\lambda]$, je-li čtvercová a existuje-li matice P^{-1} nad $K[\lambda]$; čili je-li determinant $|P|$ roven jednotce z $K[\lambda]$ (totiž nenulovému prvku z K); čili je-li P jednotka v okruhu všech čtvercových matic n-tého řádu nad $K[\lambda]$ pro některé n.

***) Vyhovují-li matice A, B této podmínce, budeme říkat, že jsou ekvivalentní.

takže $g_i \in K[\lambda]$, a označme d_i ($i = 0, 1, \ldots, n+1$, $d_0 = 1$) determinantní dělitele i-tého řádu matice B, β_i invariantní faktory této matice,

$$\beta_i = \frac{d_i}{d_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Pak je*) pro $k = 1, 2, \ldots, n+1$

$$d_k = \prod_{i=n-k+2}^{n+1} f_i \,.\, \langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-k+1}, v_{n-k+2}g_{n-k+1}, v_{n-k+3}g_{n-k+2}g_{n-k+1}, \ldots,$$
$$\ldots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \ldots g_{n-k+1}, f_{n-k+1}\rangle,$$

takže pro $k = 2, 3, \ldots, n$ je

$$f_{n-k+1}d_{k-1} = f_{n-k+2}g_{n-k+1}d_{k-1} = \prod_{i=n-k+2}^{n+1} f_i \,.\, \langle\langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-k+1}\rangle\, g_{n-k+1},$$
$$v_{n-k+2}g_{n-k+1}, \ldots, v_n g_{n-1}g_{n-2} \ldots g_{n-k+1}, f_{n-k+1}\rangle =^{**)}$$
$$= \prod_{i=n-k+2}^{n+1} f_i \langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-k+1}, v_{n-k+2}g_{n-k+1}, \ldots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \ldots g_{n-k+1}, f_{n-k+1}\rangle \,.$$
$$.\, \langle g_{n-k+1}, V_k\rangle = d_k \langle g_{n-k+1}, V_k\rangle,$$

kde

$$V_k = \frac{\langle v_{n-k+2}g_{n-k+1}, \ldots, v_n g_{n-1}g_{n-2} \ldots g_{n-k+1}, f_{n-k+1}\rangle}{\langle v_0, v_1, \ldots, v_{n-k+1}, v_{n-k+2}g_{n-k+1}, \ldots, v_n g_{n-1}g_{n-2} \ldots g_{n-k+1}, f_{n-k+1}\rangle}.$$

Odtud pro $k = 2, \ldots, n$

$$\beta_k = \frac{f_{n-k+1}}{\langle g_{n-k+1}, V_k\rangle};$$

dále je

$$\beta_1 = \langle v_0, v_1, \ldots, v_n, f_n\rangle \quad \text{a} \quad \beta_{n+1} = \frac{v_0 f_1}{\langle v_0, v_1, v_2 g_1, \ldots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \ldots g_1, f_1\rangle}.$$

Píšeme-li v těchto rovnicích φv_0 místo v_0, dostaneme pro invariantní faktory α_k matice A rovnice

$$\alpha_1 = \langle \varphi v_0, v_1, \ldots, v_n, f_n\rangle = \beta_1 \left\langle \varphi, \frac{\langle v_1, \ldots, v_n, f_n\rangle}{\langle v_0, v_1, \ldots, v_n, f_n\rangle}\right\rangle,$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\varphi v_0 f_1}{\langle \varphi v_0, v_1, v_2 g_1, \ldots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \ldots g_1, f_1\rangle} =$$

*) Označujeme opět $\langle a_1, a_2, \ldots, a_p\rangle$ největšího společného dělitele prvků $a_1, a_2, \ldots, a_p$ z $K[\lambda]$.

**) Podle pravidla $\langle ab, c\rangle = \langle a, c\rangle \left\langle b, \frac{c}{\langle a, c\rangle}\right\rangle$, je-li $\langle ab, c\rangle \neq 0$.

$$= \frac{\varphi v_0 f_1}{\langle v_0, v_1, v_2 g_1, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_1, f_1 \rangle \left\langle \varphi, \frac{\langle v_1, v_2 g_1, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_1, f_1 \rangle}{\langle v_0, v_1, v_2 g_1, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_1, f_1 \rangle} \right\rangle} =$$

$$= \beta_{n+1} \frac{\varphi}{\left\langle \varphi, \frac{\langle v_1, v_2 g_1, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_1, f_1 \rangle}{\langle v_0, v_1, v_2 g_1, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_1, f_1 \rangle} \right\rangle};$$

pro $k = 2, \dots, n$ je

$$\alpha_k = \frac{f_{n-k+1}}{\langle g_{n-k+1}, W_k \rangle},$$

kde

$$W_k = \frac{\langle v_{n-k+2} g_{n-k+1}, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{n-k+1}, f_{n-k+1} \rangle}{\langle \varphi v_0, v_1, \dots, v_{n-k+1}, v_{n-k+2} g_{n-k+1}, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{n-k+1}, f_{n-k+1} \rangle} =$$

$$= \frac{V_k}{\left\langle \varphi, \frac{\langle v_1, \dots, v_{n-k+1}, v_{n-k+2} g_{n-k+1}, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{n-k+1}, f_{n-k+1} \rangle}{\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-k+2} g_{n-k+1}, \dots, v_n g_{n-1} g_{n-2} \cdots g_{n-k+1}, f_{n-k+1} \rangle} \right\rangle} =$$

$$= \frac{V_k}{\psi_k},$$

takže

$$\alpha_k = \frac{f_{n-k+1}}{\left\langle g_{n-k+1}, \frac{V_k}{\psi_k} \right\rangle} = \frac{f_{n-k+1} \psi_k}{\langle \psi_k g_{n-k+1}, V_k \rangle} = \beta_k \frac{\psi_k}{\left\langle \psi_k, \frac{V_k}{\langle g_{n-k+1}, V_k \rangle} \right\rangle}.$$

Platí tedy pro $k = 1, 2, \dots, n + 1$ $\beta_k \mid \alpha_k$, což jsme chtěli dokázat.

Pomocné tvrzení 3. Budiž A matice, která vznikne z matice B nad $K[\lambda]$ tím, že se jeden řádek matice B násobí polynomem $\varphi \in K[\lambda]$ a nechť platí, že matice A i B mají touž hodnost. Pak invariantní faktory matice A jsou dělitelny stejnolehlými invariantními faktory matice B.

Důkaz. Zřejmě stačí toto tvrzení dokázat pro případ, že příslušný řádek je první řádek matice B.

Je-li prvý řádek matice B nulový, není co dokazovat, neboť pak $A = B$. Nechť tedy není nulový, pak existuje nenulový největší společný dělitel prvků tohoto řádku a podle pomocného tvrzení 1 existuje matice B_1 a regulární matice Q tak, že

$$B = B_1 Q, \quad B_1 = \begin{pmatrix} d, & 0 \\ c, & C \end{pmatrix}.$$

Označme r hodnost matice B, takže také $h(A) = r$, $r \geq 1$. Jsou-li $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1}$ (pro $r = 1$ je $C = 0$) invariantní faktory matice C, $\gamma_i \mid \gamma_{i+1}$

pro $i = 1, 2, \ldots, r - 2$, pak podle poznámky 2 existují regulární matice U, V tak, že

$$C = U \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ D, & 0 \end{pmatrix} V, \quad \text{kde} \quad D = \begin{pmatrix} \gamma_{r-1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \gamma_{r-2}, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0, & \ldots, & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Protože

$$A = \begin{pmatrix} \varphi, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \varphi, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d, & 0 \\ c, & C \end{pmatrix} Q =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d, & 0 \\ U_c^{-1}, & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ D & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & V \end{pmatrix} Q =$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d, & 0, & 0 \\ a, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & V \end{pmatrix} Q,$$

stačí, dokážeme-li tvrzení 3 pro

$$B = \begin{pmatrix} d, & 0, & 0 \\ a, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \end{pmatrix},$$

neboť tato matice má tytéž invariantní faktory a hodnost jako původní B a matice

$$\begin{pmatrix} \varphi, & 0, & 0 \\ 0, & I, & 0 \\ 0, & 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d, & 0, & 0 \\ a, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \end{pmatrix}$$

má podle předchozí rovnice tytéž invariantní faktory a hodnost jako původní matice A.

Budiž tedy pro

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} d, & 0, & 0 \\ a, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \varphi d, & 0, & 0 \\ a, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \end{pmatrix}$$

Jsou nenulové

$$d_1 = \langle d, a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle$$

a

$$d_2 = \langle \varphi d, a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle \doteq \langle d, a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle \left\langle \varphi, \frac{\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle}{\langle d, a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle} \right\rangle \doteq$$

$$\doteq d_1 \psi, \ \psi \neq 0.$$

Neboť $d \neq 0$, takže $d_1 \neq 0$, je-li $\varphi \neq 0$, je $\varphi d \neq 0$ a je i $d_2 \neq 0$; je-li však $\varphi = 0$, pak neplatí současně $a_1 = a_2 = \ldots = a_s = 0$, neboť pak by hodnost A byla $r - 1$, tedy menší než hodnost B, což je proti předpokladu. Podle pomocného tvrzení 1, aplikovaného na matici transponovanou k $\begin{pmatrix} d, & 0, & 0 \\ a, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, existuje regulární matice P tak, že

$$\begin{pmatrix} d, & 0, & 0 \\ a, & 0, & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} d_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Matice B je ekvivalentní matici

$$\begin{pmatrix} P^{-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} d_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \end{pmatrix},$$

která je opět ekvivalentní matici

$$\begin{pmatrix} d_1, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Obdobně matice A je ekvivalentní matici

$$\begin{pmatrix} d_2 & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\psi, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Je-li $r = 1$, jedná se prostě o matice

$$\begin{pmatrix} d_1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} d_1\psi, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

o nichž zřejmě platí, že invariantní faktor d_1 prvé matice dělí invariantní faktor $d_1\psi$ druhé matice a pomocné tvrzení 3 platí. Je-li $r > 1$, je

$$\begin{pmatrix} d_1, & 0, & 0 \\ b, & D, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^*, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1\psi, & 0, & 0 \\ b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

kde matice A^* a B^* mají tvar matic, o nichž bylo v pomocném tvrzení 2 dokázáno, že invariantní faktory matice A^* jsou dělitelny stejnolehlými invariantními faktory matice B^*. Protože invariantní faktory matice A a B jsou totožny s invariantními faktory matic A^* a B^*, je tvrzení úplně dokázáno.

Nyní přejdeme k vlastnímu důkazu věty 5. Budiž tedy předně $A = PBQ$, kde hodnosti matic A a B jsou stejné, rovné r. Nechť matice A je typu (m_1, n_1), matice B typu (m_2, n_2), takže matice P resp. Q jsou typů (m_1, m_2) resp. (n_1, n_2). Jsou-li $g_1, g_2, \ldots, g_s$ resp. $h_1, h_2, \ldots$ $\ldots, h_t (s \geq r, t \geq r)$ invariantní faktory matic P resp. Q, pak podle poznámky 2 existují regulární matice U_1, V_1, U_2, V_2 tak, že

$$P = U_1 G V_1,\ Q = U_2 H V_2 \ \text{pro}\ G = \begin{pmatrix} G_1, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_1, 0, \ldots, 0 \\ 0, g_2, \ldots, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots, g_s \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad H = \begin{pmatrix} H_1, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} h_1, 0, \ldots, 0 \\ 0, h_2, \ldots, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0 \ \ldots, h_t \end{pmatrix}.$$

Matice $A_1 = U_1^{-1} A V_2$ je tedy ekvivalentní matici A, matice $B_1 = V_1 B U_2$ je ekvivalentní matici B a platí, vzhledem k $A = PBQ$, $A_1 = GB_1H$. Součin $GB_1 = C$ je matice, která vznikne z matice B_1 těmito operacemi:

a) násobením 1. řádku polynomem g_1, násobením 2. řádku polynomem g_2, až násobením s-tého řádku polynomem g_s;

b) násobením $(s + 1)$-ho řádku nulou, až násobením μ-tého řádku nulou, kde $\mu = \min(m_1, m_2)$;

c_1) pro $m_1 < m_2$ vynecháním zbylých $m_2 - m_1$ řádků;

c_2) pro $m_1 > m_2$ přidáním $m_1 - m_2$ nulových řádků.

Protože hodnost $h(C) = h(B_1) = h(A_1) = r$*) nemůže se hodnost matice B_1 žádnou z těchto operací změnit: žádnou z nich se nezvýší a kdyby se některou snížila, měla by matice C hodnost menší než r, což nemá. Ukážeme teď, že každou jednotlivou z uvedených operací dostaneme z matice M_1 matici M_2, pro niž platí: má-li M_2 touž hodnost jako M_1, pak invariantní faktory matice M_2, jsou dělitelny stejnolehlými invariantními faktory matice M_1. Podle pomocného tvrzení 3 to platí pro operace sub a) a sub b). Pro operace c_1) je tvrzení zřejmé. Operaci c_1) provedeme tak, že nejprve násobíme příslušný řádek nulou (tím se hodnost nezmění, neboť jinak by se vynecháním tohoto řádku také změnila); tím dostaneme matici M_2', jejíž invariantní faktory jsou dělitelny stejnolehlými invariantními faktory matice M_1, protože tato operace je tvaru b). Vynecháme-li v matici M_2' příslušný nulový řádek, dostaneme tím právě matici M_2, která má tedy tytéž invariantní faktory jako M_2' (vynecháním nulového řádku se invariantní faktory nezmění).

Postupným prováděním operací a), b), c_1), c_2) dostaneme z matice B_1 matice $B_2, B_3, \ldots, B_M = C$, z nichž každá má vlastnost, že její invariantní faktory jsou dělitelny stejnolehlými invariantními faktory předchozí; vzhledem k transitivnosti této vlastnosti jsou invariantní faktory matice C dělitelny stejnolehlými invariantními faktory matice B_1, a tedy i matice B.

Stejným postupem pro transponovanou matici $A_1' = H'C'$ dostaneme, že invariantní faktory matice A_1', tedy i matice A, jsou dělitelny stejno-

---

*) To plyne z pravidla $h(AB) \leq \min(h(A), h(B))$: $A_1 = CH$, takže $h(A_1) \leq h(C)$; $C = GB_1$, takže $h(C) \leq h(B_1) = h(A_1)$.

lehlými invariantními faktory matice C', tedy i matice B, což dokazuje tvrzení věty 5 v jednom směru.

Nechť obráceně platí, že matice A a B mají při typech (m_1, n_1) resp. (m_2, n_2) touž hodnost r a že invariantní faktory matice B dělí stejnolehlé invariantní faktory matice A. Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ($\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$ pro $i = 1, \ldots, r - 1$) resp. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ ($\beta_i \mid \beta_{i+1}$ pro $i = 1, \ldots, r - 1$) invariantní faktory matic A resp. B, takže podle předpokladu $\beta_i \mid \alpha_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$, existují podle poznámky 2 regulární matice U_1, V_1, U_2, V_2 tak, že

$$A = U_1 A_1 V_1, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_2, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \alpha_2, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & \alpha_r \end{pmatrix}$$

a

$$B = U_2 B_1 V_2, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_2, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \beta_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \beta_2, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & \beta_r \end{pmatrix}.$$

Označme pro $\alpha_i = \beta_i \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \gamma_2, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & \gamma_r \end{pmatrix},$$

$\mu = \min(m_1, m_2)$, $\nu = \min(n_1, n_2)$, takže $\mu \geqq r$, $\nu \geqq r$. Pak je $A_2 = B_2 C$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_r, & 0, & 0 \\ 0, & I_{\mu-r}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} B_1 \begin{pmatrix} C, & 0, & 0 \\ 0, & I_{\nu-r}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} {}^{*)}$$

a tedy pro

$$P = U_1 \begin{pmatrix} I_r, & 0, & 0 \\ 0, & I_{\mu-r}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} U_2^{-1} \quad \text{a} \quad Q = V_2^{-1} \begin{pmatrix} C, & 0, & 0 \\ 0, & I_{\nu-r}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} V_1$$

je $A = PBQ$.

Tím je věta 5 úplně dokázána, i s poznámkou 1, neboť hodnosti P resp. Q jsou vzhledem k předchozí poznámce při daných typech maximální.

---

*) Podle toho, je-li $\mu = m_1$ nebo $\mu = m_2$, odpadá v matici

$$\begin{pmatrix} I_r, & 0, & 0 \\ 0, & I_{\mu-r}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

poslední „řádek“ nebo poslední „sloupec“, takže tato matice má při typu (m_1, m_2) maximální hodnost, rovnou μ; obdobně pro matici

$$\begin{pmatrix} C, & 0, & 0 \\ 0, & I_{\nu-r}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Část II.

V této části budeme aplikovat věty prvé části na algebraickou geometrii racionálních křivek.

Budeme značit S_m m-rozměrný lineární projektivní prostor nad naším tělesem K, o němž již budeme dále předpokládat, že je charakteristiky nula.

Budiž $t = (t_1, t_2) \in S_1$, $n \geqq 1$. Množinu bodů C z S_r, $r \geqq 2$, jež dostaneme pro $t \in S_1$, o souřadnicích

$$x_1 = a_{(n)}(t),\ x_2 = b_{(n)}(t), \ldots, x_{r+1} = l_{(n)}(t), \tag{11}$$

nazveme racionální křivkou, je-li

$$\langle a_{(n)}, b_{(n)}, \ldots, l_{(n)} \rangle = 1. \tag{12}$$

Bod $z = (z_1, \ldots, z_{r+1})$ se nazývá s-násobným bodem křivky C, je-li největší společný dělitel všech dvouřádkových determinantů matice

$$\begin{pmatrix} a_{(n)}(t), & z_1 \\ b_{(n)}(t), & z_2 \\ \cdots & \cdots \\ l_{(n)}(t), & z_{r+1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

jež nejsou všechny rovny nule, stupně s-tého (místo 0-násobný bod křivky C se říká bod, neležící na C).

Považujme na okamžik t_1, t_2, y_1, y_2 za neurčité nad T. Pak dvouřádkové determinanty matice

$$\begin{pmatrix} a_{(n)}(t), & a_{(n)}(y) \\ b_{(n)}(t), & b_{(n)}(y) \\ \cdots & \cdots \\ l_{(n)}(t), & l_{(n)}(y) \end{pmatrix}$$

mají největšího společného dělitele stupně alespoň prvého v (t_1, t_2), neboť jsou vesměs dělitelny $y_2 t_1 - y_1 t_2$. Budiž to forma stupně k-tého D_k, $k \geqq 1$. Je-li $k = 1$, pak skoro každému*) bodu z C odpovídá právě jeden bod z S_1; říkáme pak, že C je racionální křivka n-tého stupně.

Platí však *Lürothova* věta:**)

Je-li $k > 1$, má D_k tvar

$$D_k = \begin{vmatrix} u_{(k)}(t_1, t_2), & u_{(k)}(y_1, y_2) \\ v_{(k)}(t_1, t_2), & v_{(k)}(y_1, y_2) \end{vmatrix},$$

n je dělitelno k, $n = k\bar{n}$ a existují formy stupně $\bar{n}$: $\bar{a}_{(\bar{n})}, \bar{b}_{(\bar{n})}, \ldots, \bar{l}_{(\bar{n})}$ tak, že je identicky

---

*) Ve smyslu: nejvýše s konečným počtem výjimek.

**) Důkaz na př. H. Weber: Lehrbuch der Algebra II., § 124.

$$
\begin{aligned}
a_{(n)}(t) &= \bar{a}_{(\bar{n})}(u_{(k)}(t),\ v_{(k)}(t)),\\
b_{(n)}(t) &= \bar{b}_{(\bar{n})}(u_{(k)}(t),\ v_{(k)}(t)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
l_{(n)}(t) &= \bar{l}_{(\bar{n})}(u_{(k)}(t),\ v_{(k)}(t))
\end{aligned}
$$

a největší společný dělitel dvouřádkových determinantů matice

$$
\begin{pmatrix}
\bar{a}_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2), & \bar{a}_{(\bar{n})}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)\\
\bar{b}_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2), & \bar{b}_{(\bar{n})}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)\\
\dots\dots & \dots\dots\\
\bar{l}_{(\bar{n})}(\bar{t}_1, \bar{t}_2), & \bar{l}_{(\bar{n})}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)
\end{pmatrix}
$$

je $\bar{y}_2\bar{t}_1 - \bar{y}_1\bar{t}_2$, tedy stupně $\bar{k} = 1$.

Toto číslo k budeme dále nazývat *Lürothovo číslo* vyjádření (11).

Věta 6. *Budiž dána racionální křivka C v S_r rovnicemi* (11) *a budiž S_{h-1} lineární prostor o nejmenším počtu rozměrů, který křivku C obsahuje, $h \geqq 2$. Pak C je právě obsažena v systému nadploch, daném anulováním determinantů nejvyššího stupně v matici*

$$
M_{n-h+3}(x) = \begin{pmatrix}
A^{(n)}_{n-h+3}, & x_1 I_{n-h+3}\\
B^{(n)}_{n-h+3}, & x_2 I_{n-h+3}\\
\dots\dots & \dots\dots\\
L^{(n)}_{n-h+3}, & x_{r+1} I_{n-h+3}
\end{pmatrix};
$$

platí dokonce: je-li (z) s-násobným bodem C, $s \geqq 0$ je $\operatorname{def} M_{n-h+3}(z) = s$*).

Důkaz. Budiž $z \in S_r$, $z = (z_1, \dots, z_{r+1})$. Je alespoň jedna souřadnice bodu z různá od nuly, nechť to je $z_{r+1} \neq 0$.

Pak je největší společný dělitel dvouřádkových determinantů matice (13) roven n. s. děliteli forem

$$
\begin{aligned}
&z_{r+1}a_{(n)}(t) - z_1 l_{(n)}(t),\\
&z_{r+1}b_{(n)}(t) - z_2 l_{(n)}(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&z_{r+1}k_{(n)}(t) - z_r l_{(n)}(t).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Matice

$$
\begin{pmatrix}
z_{r+1}A^{(n)}_1 - z_1 L^{(n)}_1\\
z_{r+1}B^{(n)}_1 - z_2 L^{(n)}_1\\
\dots\dots\dots\dots\\
z_{r+1}K^{(n)}_1 - z_r L^{(n)}_1
\end{pmatrix}
\tag{15}
$$

*) Nazveme-li násobností bodu v soustavě nadploch nejmenší násobnost, s jakou se bod u všech nadploch soustavy vyskytuje, lze ukázat (ve III. části to učiníme pro h = 3), že násobnost libovolného bodu v S_r vzhledem k C je táž jako jeho násobnost v soustavě M_{n-h+3}.

má hodnost o jedničku menší než matice

$$\begin{pmatrix} A_1^{(n)}, & z_1 \\ B_1^{(n)}, & z_2 \\ \dots & \dots \\ L_1^{(n)}, & z_{z+1} \end{pmatrix},$$

tedy buď h nebo $h - 1$; neboť h je právě hodnost matice

$$\begin{pmatrix} A_1^{(n)} \\ B_1^{(n)} \\ \vdots \\ L_1^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Lze proto pro $m = 2n - h + 3$ užít věty 1 (pro každé $s \geqq 0$), jež dává: násobnost bodu (z) vzhledem k C je rovna defektu

$$\operatorname{def} \begin{pmatrix} z_{r+1}A_{n-h+3}^{(n)} - z_1L_{n-h+3}^{(n)} \\ z_{r+1}B_{n-h+3}^{(n)} - z_2L_{n-h+3}^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{r+1}K_{n-h+3}^{(n)} - z_rL_{n-h+3}^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{def} \begin{pmatrix} z_{r+1}A_{n-h+3}^{(n)} - z_1L_{n-h+3}^{(n)} & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots \\ z_{r+1}K_{n-h+3}^{(n)} - z_rL_{n-h+3}^{(n)} & 0 \\ L_{n-h+3}^{(n)} & z_{r+1}I_{n-h+3} \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{def} \begin{bmatrix} z_{r+1}A_{n-h+3}^{(n)} & z_{r+1}z_1I_{n-h+3} \\ z_{r+1}B_{n-h+3}^{(n)} & z_{r+1}z_2I_{n-h+3} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ z_{r+1}K_{n-h+3}^{(n)} & z_{r+1}z_rI_{n-h+3} \\ L_{n-h+3}^{(n)} & z_{r+1}\,I_{n-h+3} \end{bmatrix} = \operatorname{def} M_{n-h+3}(z),$$

což jsme chtěli dokázat.

Věta 7. *Budiž racionální křivka C v S_r definována opět rovnicemi* (11) *a budiž dimense nejmenšího lineárního prostoru, který křivku C obsahuje, rovna $h - 1$, $h \geqq 2$. Pak pro každý s-násobný bod $z \in C$, $s \geqq 2$ je*

$$\operatorname{def} \overline{M}(z) \geqq s - 1,$$

$$\overline{M}_{n-h+2}(x) = \begin{bmatrix} A_{n-h+2}^{(n)}, & x_1I_{n-h+2} \\ B_{n-h+2}^{(n)}, & x_2I_{n-h+2} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ L_{n-h+2}^{(n)}, & x_{r+1}I_{n-h+2} \\ 0, & \varrho_1^{(n-h+1)} \end{bmatrix},$$

kde

$$\varrho_1^{(n-h+1)} = (\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{n-h+1}),$$

což platí pro každé $\varrho_1^{(n-h+1)}$.

Důkaz. Budiž $z_{r+1} \neq 0$, pak je jako v důkazu předchozí věty násobnost s bodu (z) rovna i stupni n. s. dělitele forem (14). Poněvadž je opět hodnost matice (15) rovna h nebo $h - 1$, $s \geqq 1$, lze pro $m = 2n - h + 2$ užít věty 1:

$$s = \operatorname{def} \begin{pmatrix} z_{r+1}A^{(n)}_{n-h+2} - z_1L^{(n)}_{n-h+2} \\ z_{r+1}B^{(n)}_{n-h+2} - z_2L^{(n)}_{n-h+2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{r+1}K^{(n)}_{n-h+2} - z_rL^{(n)}_{n-h+2} \end{pmatrix} = \operatorname{def} \begin{pmatrix} A^{(n)}_{n-h+2}, & z_1I_{n-h+2} \\ B^{(n)}_{n-h+2}, & z_2I_{n-h+2} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ L^{(n)}_{n-h+2}, & z_{r+1}I_{n-h+2} \end{pmatrix}$$

přidáním řádku $(0, \varrho_1^{(n-h+1)})$ se defekt buď nezmění nebo sníží o jedničku, tedy $\operatorname{def}\bar{M}_{n-h+2}(z) \geqq s - 1$.

Věta 8. *Budiž opět racionální křivka C v S_r definována rovnicemi (11) a dimense minimálního lin. prostoru, který obsahuje křivku C, rovna $h - 1$, $h \geqq 2$. Budiž dále Lürothovo číslo k pro vyjádření (11) rovno $k = 1$. Pak pro nenulovou $\varrho_1^{(n-h+1)}$ existuje nenulový největší společný dělitel determinantů nejvyššího stupně (totiž $3n - 2(h-2)$- tého) matice*

$$\mu(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} A^{(n)}_{n-h+2}, & a_{(n)}(t)I_{n-h+2} \\ B^{(n)}_{n-h+2}, & b_{(n)}(t)I_{n-h+2} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ L^{(n)}_{n-h+2}, & l_{(n)}(t)I_{n-h+2} \\ 0, & \varrho_1^{(n-h+1)} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

rovný $D(t_1, t_2) = v(t_1, t_2) \cdot \varrho_{(n-h+1)}(t_1, t_2)$, kde $\varrho_{(n-h+1)}(t)$ je forma s maticí $\varrho_1^{(n-h+1)}$ a $v(t_1, t_2)$ forma, jež má tyto vlastnosti:

1. *Je-li bod (z) s-násobným bodem C, $s \geqq 2$, s příslušnou formou (ze (13)) $c_{(s)}(t)$, pak $v(t)$ je dělitelno $c^{s-1}_{(s)}(t)$.*

2. *Je-li $v(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, α_1, α_2 z nějakého nadtělesa $K_1 \supset K$, pak v K_1 je bod*

$$\omega = (a_{(n)}(\alpha), b_{(n)}(\alpha), \dots, l_{(n)}(\alpha)),$$

alespoň dvojnásobným bodem C.

Důkaz. Především musíme dokázat, že matice (16) má pro neurčité t_1, t_2 defekt 0.

Z definice čísla k plyne, že pro neurčité y_1, y_2, t_1, t_2 největší společný dělitel dvouřádkových determinantů matice

$$\begin{pmatrix} a_{(n)}(t), & a_{(n)}(y) \\ b_{(n)}(t), & b_{(n)}(y) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ l_{(n)}(t), & l_{(n)}(y) \end{pmatrix}$$

je prvého stupně, jako v důkazu věty 6 odtud vyplývá, že $\operatorname{def}\bar{\mu} = 1$, kde matice

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} A^{(n)}_{n-h+2}, & a_{(n)}(t)\, I_{n-h+2} \\ B^{(n)}_{n-h+2}, & b_{(n)}(t)\, I_{n-h+2} \\ \dots & \dots \\ L^{(n)}_{n-h+2}, & l_{(n)}(t)\, I_{n-h+2} \end{pmatrix}.$$

Nazveme-li τ čtvercovou regulární matici

$$\tau = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, & -t_1^{2n-h+1} \\ 0, 1, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, & -t_1^{2n-h} t_2 \\ \dots & \dots \\ 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, & -t_2^{2n-h+1} \\ 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, & t_1^{n-h+1} \\ 0, 0, \dots, 0, 0, 1, \dots, 0, 0, & t_1^{n-h} t_2 \\ \dots & \dots \\ 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, & t_1 t_2^{n-h} \\ 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, & t_2^{n-h+1} \end{pmatrix}$$

je $\operatorname{def}\tau = \operatorname{def}\tau' = 0$; matice $\bar{\bar{\mu}} = \bar{\mu}\tau$ má tvar $(\nu, 0)$ kde 0 je nulový poslední sloupec a ν matice, která vznikne, škrtneme-li v $\bar{\mu}$ poslední sloupec. Podle pravidla P 4 je $\operatorname{def}\bar{\bar{\mu}} = \operatorname{def}\bar{\mu} = 1$, tedy $\operatorname{def}\nu = 0$. Utvoříme-li však pro matici v (16) součin $\mu\tau$, je

$$\mu\tau = \begin{pmatrix} \nu, & 0 \\ \sigma, & \varrho_{(n-h+1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \text{takže}$$

1. pro každou nenulovou formu $\varrho_{(n-h+1)}$ je $\operatorname{def}\mu\tau = \operatorname{def}\mu = 0$,

2. každý determinant nejvyššího stupně v μ a tedy i jejich největší společný dělitel $D(t_1, t_2)$, je dělitelný $\varrho_{(n-h+1)}(t)$ a podíl už je na $\varrho_{(n-h+1)}$ nezávislý.

Budiž nyní (z) s-násobný bod C, $s \geqq 2$, příslušná forma budiž $c_{(s)}(t)$; je-li $z_{r+1} \neq 0$, pišme

$$\begin{aligned} z_{r+1} a_{(n)}(t) - z_1 l_{(n)}(t) &= c_{(s)}(t)\, \bar{a}_{(n-s)}(t), \\ z_{r+1} b_{(n)}(t) - z_2 l_{(n)}(t) &= c_{(s)}(t)\, \bar{b}_{(n-s)}(t), \\ &\dots \\ z_{r+1} k_{(n)}(t) - z_r l_{(n)}(t) &= c_{(s)}(t)\, \bar{k}_{(n-s)}(t). \end{aligned}$$

Potom je, označíme-li největšího společného dělitele determinantů maximálního stupně matice M znakem $D(M)$

$$D(\mu) = D \begin{pmatrix} \bar{A}^{(n)}_{n-h+2} \cdot C^{(s)}_{2n-s-h+2}, & c_{(s)}(t)\bar{a}_{(n-s)}(t)\, I_{n-h+2} \\ \dots & \dots \\ \bar{K}^{(n-s)}_{n-h+2} \cdot C^{(s)}_{2n-s-h+2}, & c_{(s)}(t)\bar{k}_{(n-s)}(t)\, I_{n-h+2} \\ L^{(n)}_{n-h+2}, & l_{(n)}(t)\, I_{n-h+2} \\ 0, & \varrho_1^{(n-h+1)} \end{pmatrix} =$$

$$= D \begin{bmatrix} \bar{A}^{(n-s)}_{n-h+2} \cdot C^{(s)}_{2n-s-h+2}, & c_{(s)}\bar{a}_{(n-s)} I_{n-h+2}, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{K}^{(n-s)}_{n-h+2} \cdot C^{(s)}_{2n-s-h+2}, & c_{(s)}\bar{k}_{(n-s)} I_{n-h+2}, & 0 \\ L^{(n)}_{n-h+2}, & l_{(n)} I_{n-h+2}, & 0 \\ C^{(s)}_{2n-s-h+2}, & 0, & -I_{2n-s-h+2} \\ 0, & \varrho_1^{(n-h+1)}, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= D \begin{bmatrix} 0, & c_{(s)}\bar{a}_{(n-s)} I_{n-h+2}, & \bar{A}^{(n-s)}_{n-h+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & c_{(s)}\bar{k}_{(n-s)} I_{n-h+2}, & \bar{K}^{(n-s)}_{n-h+2} \\ L^{(n)}_{n-h+2}, & l_{(n)} I_{n-h+2}, & 0 \\ C^{(s)}_{2n-s-h+2}, & 0, & -I_{2n-s-h+2}, \\ 0, & \varrho_1^{(n-h+1)}, & 0 \end{bmatrix}$$

Budiž Δ některý determinant nejvyššího stupně v poslední matici a nechť Δ obsahuje σ řádek z prvých $r(n - h + 2)$ řádek této matice. Je $\sigma \geqq 2n - h + 1$. Násobíme-li v Δ posledních $2n - s - h + 2$ sloupců vždy formou $c_{(s)}(t)$, lze z prvých σ řádek vytknouti vždy $c_{(s)}(t)$, takže Δ je dělitelný alespoň λ-tou mocninou $c_{(s)}$, kde

$$\lambda = \sigma - 2n + s + h - 2 \geqq 2n - h + 1 - 2n + s + h - 2 = s - 1.$$

Tedy všechny determinanty Δ tohoto druhu jsou dělitelny $c_{(s)}^{s-1}(t)$, proto i jejich největší společný dělitel $D(t_1, t_2)$ a také $v(t_1, t_2)$ (neboť koeficienty v $\varrho_{(n-h+1)}$ lze považovat za neurčité nad T a pak $\varrho_{(n-h+1)}(t)$ a $c_{(s)}(t)$ jsou nesoudělné), jak jsme měli dokázat.

Budiž nyní pro α_1, α_2 z některého nadtělesa $K_1 \supset K$, $v(\alpha_1 . \alpha_2) = 0$. Protože forma $v(t)$ je na $\varrho_{(n-h+1)}$ nezávislá, lze $\varrho_{(n-h+1)}$ zvolit tak, aby $\varrho(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$. Nechť s je násobnost bodu (ω) na C v K_1, $\omega = (a_{(n)}(\alpha), b_{(n)}(\alpha), \ldots, l_{(n)}(\alpha))$, tedy $s \geqq 1$. Kdyby bylo $s = 1$, pak touž úvahou jako na začátku tohoto důkazu (místo neurčitých t_1, t_2 zde máme α_1, α_2) by plynulo, že $\operatorname{def} \mu(\omega) = 0$ ve sporu s $v(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. Tedy $s \geqq 2$.

Uvedeme ještě, jak se transformují matice z vět 6 a 7 při substituci (7):

Věta 9. *Nechť* $p_{(k)}(t), q_{(k)}(t)$ *jsou dané nesoudělné formy jako v* (7), $\bar{a}_{(kn)}(t) = a_{(n)}(p_{(k)}(t), q_{(k)}(t)), \ldots, \bar{l}_{(kn)}(t) = l_{(n)}(p_{(k)}(t), q_{(k)}(t))$.

Pak je

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{(kn)}_{kn}, & x_1 I_{kn} \\ \cdots & \cdots \\ \bar{L}^{(kn)}_{kn}, & x_{r+1} I_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^{-1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & R_1^{-1}, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & R_1^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} A^{(n)}_n, & x_1 I_n \\ B^{(n)}_n, & x_2 I_n \\ \cdots & \cdots \\ L^{(n)}_n, & x_{r+1} I_n \end{pmatrix} \times . I_k \right) . \\ . \begin{pmatrix} R_2, & 0 \\ 0, & R_1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

kde $R_{(s)}$ jsou definovány ve větě 3. Pro $k = 1$ platí

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{(n)}_{n-h+3}, & x_1 I_{n-h+3} \\ \dots & \dots \\ \bar{L}^{(n)}_{n-h+3}, & x_{r+1} I_{n-h+3} \end{pmatrix} = \tag{18}$$

$$= \begin{pmatrix} E^{-1}_{n-h+3}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & E^{-1}_{n-h+3}, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & E^{-1}_{n-h+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(n)}_{n-h+3}, & x_1 I_{n-h+3} \\ \dots & \dots \\ L^{(n)}_{n-h+3}, & x_{r+1} I_{n-h+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2n-h+3}, & 0 \\ 0, & E_{n-h+3} \end{pmatrix}$$

a obdobně

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{(n)}_{n-h+2}, & x_1 I_{n-h+2} \\ \dots & \dots \\ \bar{L}^{(n)}_{n-h+2}, & x_{r+1} I_{n-h+2} \\ 0, & \bar{\varrho}^{(n-h+1)}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E^{-1}_{n-h+2}, & 0, & \dots, 0, & 0 \\ 0, & E^{-1}_{n-h+2}, & \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, E^{-1}_{n-h+2}, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, 0, & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A^{(n)}_{n-h+2}, & x_1 I_{n-h+2} \\ \dots & \dots \\ L^{(n)}_{n-h+2}, & x_{r+1} I_{n-h+2} \\ 0, & \varrho^{(n-h+1)}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2n-h+2}, & 0 \\ 0, & E_{n-h+2} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

kde $\bar{\varrho}^{(n-h+1)}_1$ je matice příslušná k formě $\bar{\varrho}_{(n-h+1)}(t) = \varrho_{(n-h+1)}(p_{(1)}(t), q_{(1)}(t))$ ($E_{(s)}$ definováno ve větě 4).

D ů k a z provedeme jen pro (17), u ostatních dvou probíhá obdobně. Proveďme

$$\begin{pmatrix} R_1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & R_1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}^{(kn)}_{kn}, & x_1 I_{kn} \\ \dots & \dots \\ \bar{L}^{(kn)}_{kn}, & x_{r+1} I_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \bar{A}^{(kn)}_{kn}, & x_1 R_1 \\ \dots & \dots \\ R_1 \bar{L}^{(kn)}_{kn}, & x_{r+1} R_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (A^{(n)}_n \times . I_k) R_2, & x_1 R_1 \\ \dots & \dots \\ (L^{(n)}_n \times . I_k) R_2 & x_{r+1} R_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} A^{(n)}_n, & x_1 I_n \\ \dots & \dots \\ L^{(n)}_n, & x_{r+1} I_n \end{pmatrix} \times . I_k \right] \begin{pmatrix} R_2, & 0 \\ 0, & R_1 \end{pmatrix},$$

kde jsme použili rovnice (9). Odtud plyne již (17).

(Pokračování.)