Časopis pro pěstování matematiky

Ivo Babuška

K problematice teorie pružnosti

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 4, 423--426

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117054

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1952

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 77 (1952)

REFERÁTY O PŘEDNÁŠKÁCH V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ A V BRNĚ

K PROBLEMATICE TEORIE PRUŽNOSTI

(Referát o přednášce Dr Ing. *Ivo Babušky*, proslovené dne 19. května 1952.)

1. Dirichletův problém.

Jak známo, Dirichletovým problémem v rovině, na př. pro kruh, rozumíme nalezení harmonické funkce uvnitř kruhu spojitě prodlužitelné na hranici kde nabývá předepsaných hodnot. Lze dokázat, že existuje právě jediné řešení. Snadno se nahlédne, že z požadavku, aby harmonická funkce byla spojitá na uzavřeném kruhu plyne, že předepsaná funkce na hranici musí býti spojitá. V praxi se však často vyskytují případy, kdy okrajové podmínky jsou nespojité. Musí se proto opustit požadavek spojitosti harmonické funkce na uzavřeném kruhu. Je to možno několikerým způsobem.

a) Prodlužitelnost všude, až na konečný počet výjimečných bodů.
b) Úhlová prodlužitelnost všude nebo skoro všude.
c) Radiální prodlužitelnost všude nebo skoro všude.

Problém unicity a existence není zde již tak jednoduchý jako v případě spojité prodlužitelnosti.

2. Neumanův problém.

Neumanovým problémem v rovině rozumíme, jak známo, nalezení harmonické funkce, která má na hranici předepsané normální derivace. Většinou se žádá, aby obě parciální derivace harmonické funkce byly spojitě prodlužitelné na hranici. Při nespojitých okrajových podmínkách vznikají problémy ještě obtížnější než v prvém případě a jsou zatím skoro neřešeny. Možnosti formulace problému pro nespojité okrajové podmínky jsou zde ještě širší.

3. Biharmonický problém.

Biharmonickým problémem rozumíme nalezení biharmonické funkce W, mající na hranici předepsané hodnoty funkce a hodnoty normální derivace. Je to tedy do určité míry spojení problému Dirichletova a Neumanova. Skutečně obtíže při nespojitostech okrajových podmínek jsou spojením obtíží obou dřívějších případů. Unicita tohoto problému není dodnes ani pro spojité okrajové podmínky dokázána. Mimo důkaz Kirchhofův, který předpokládá že ΔW, $\frac{\partial \Delta W}{\partial x}$, $\frac{\partial \Delta W}{\partial y}$ jsou spojitě prodlužitelné na hranici, ukázal v roce 1932 MUSCHELIŠVILI, že stačí žádat, aby ΔW a konjugovaná funkce k ΔW byla spojitě prodlužitelná na hranici.

V roce 1934 ukázal MICHLIN, že stačí žádat, aby ΔW bylo omezené. Lze však ukázat, že stačí aby holomorfní funkce φ byla totálně spojitá na hranici, když $\mathrm{Re}\varphi' \equiv \Delta W$ tento případ jest zobecněním obou dřívějších důkazů. Je-li hranice dostatečně hladká, lze důkazy ještě zobecnit.

Biharmonický problém jest základním problémem matematické theorie rovinné pružnosti. Je to t. zv. prvý problém. Mimo to vyskytují se ještě problém druhý a smíšený. Problematika druhého problému jest podobná jako u prvého, biharmonického. Problém smíšený jest složitější.

Problematika nespojitých okrajových podmínek vzniká z praxe a jest do velké míry otevřená právě tak, jako problematika nehladkých hranic. Zmíním se ještě o jiné problematice, kterou nám také dala praxe.

Při řešení biharmonického problému zajímají nás hlavně její druhé derivace. Vzniká otázka při řešení pomocí sítí, zda nemohou nastat velké nepřesnosti v druhých derivacích, které nás zajímají i když určíme biharmonickou funkci dosti přesně.

Jiným naléhavým problémem jest integrální rovnice druhého druhu

$$\varphi(t) + \int_a^b K(x, t)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = f(t),$$

když jádro K není integrovatelné, ale je analytické na otevřeném intervalu a, b. I tento problém vznikl při řešení otázek praxe.

Chtěl jsem naznačit některou matematickou problematiku specifickou pro theorii rovinné pružnosti, samozřejmě okruh otázek jest ještě mnohem širší. Naznačil jsem pouze některé z těch, které se nám v poslední době vyskytly a vznikly z praxe.

V celé theorii pružnosti, konečně to není ani pro pružnost specifické, vznikají rozsáhlé problémy, které technika musí řešit. Musí přijít k určitým závěrům. Exaktní matematické řešení není dnes možné. Tyto problémy nakonec, nepomůže-li matematik, což jest dnes ve většině případů, musí řešit technik sám. Řeší je svou cestou, která má však přednosti a nedostatky. Chtěl bych se proto nakonec zmínit o způsobu, jakým řeší technik svou problematiku a jak usuzuje zejména na rozdíl od matematika.

Každé myšlenkové tvoření má dvě části. Je to tvoření ideových kombinací a jejich výběr. Jest možných mnoho kombinací, ale ne všechny jsou úspěšné. Uvažující člověk vybírá intuitivně ty kombinace, které mají naději na úspěch.

S tohoto hlediska jest řešení matematika a technika (dokonce každé myšlenkové tvoření) stejné. Rozdíl jest však v tom, jak matematik a technik postupuje. Matematikova práce jest ryze a přesně deduktivní. Jeho postup pozůstává ve tvoření vhodného řetězu deduktivních úsudků za sebou. Nakonec vychází matematik ze soustavy axiomů a přichází deduktivně k určitým závěrům. Intuitivní výběr ideových kombinací projeví se tedy pouze ve způsobu tvoření řetězu dedukcí od axiomu až do závěru a výběru axiomu (na př. při axiomu výběru se často uvádí byl-li použit neb ne).

Technik postupuje podobně. Na rozdíl od matematika užívá mnohem více axiomů než je třeba, přesněji axiomaticky formulovaných vět, hypothes. Tyto axiomy bere ze zkušenosti a většinou jich užívá, aniž je přesně formuloval a nejen to, ani často si neuvědomí, že jich užívá. Pro matematika jest tedy technická práce z tohoto důvodu plna logických skoků. Axiomaticky postulované hypothesy nejsou ovšem axiomy v matematickém slova smyslu (t. j. nemusí být na př. nezávislé nebo nesporné) a často se liší v různých pracích, takže důkazy průkazné pro jednoho nemusí být přesvědčivé pro druhého. Je to pochopitelné, neboť jestliže matematikové nejsou úplně jednotni v nazírání na př. na axiom výběru, proč by technikové museli býti jednotnější v nazírání na mnohem četnější technické hypothesy.

Technik při tvoření různých svých hypothes jest dosti bezstarostný. Nevidí příčiny, proč by měl zachovávati matematickou přesnost, když ve svých úvahách provádí velké zjednodušování o němž je přesvědčen, že vede k větším chybám, než nějaká ta nepřesnost matematická. Pro technika jsou matematické úvahy obrazem jeho fysikálně technických úvah a proto nečiní také rozdílu mezi matematickou implikací a fysikálním důsledkem. Technik ovšem v zásadě nemůže postupovat jinak, poněvadž ani profesionální matematik nedovede problém exaktně řešit tam, kde technik musí k nějakým závěrům bezpodmínečně dospět. Je tedy zřejmo, že intuitivní výběr ideových kombinací má pro technika význam zásadní.

Tvoření různých pracovních hypothes v technické práci jest však nejen prostředkem k získání závěrů odpovídajících skutečnosti, ale je i příčinou jejich omylů a chyb. Tyto chyby vznikají proto, že technici často si ony pracovní hypothesy ani neuvědomí. Mimo to technik nevidí různá úskalí matematiky, poněvadž vidí ve svých matematických úvahách fysikální „děje“ a proto postupuje často příliš odvážně, což může být další příčinou chyb.

Naznačil jsem stručně některé subjektivní poznámky. Domnívám se, že z nich vyplývají některé závěry.

1. Je třeba vésti techniky k tomu, aby si uvědomovali každé užití

pracovní hypothesy a upozorňovat techniky na úskalí matematiky, na to, že příliš bezstarostné zacházení s matematikou může vésti k omylům. Je třeba ukázat toto nebezpečí na technických problémech, kdy je možno přijíti k nesprávným závěrům. Při tom ovšem tyto případy nesmí být matematickými kuriositami.

2. Bezpodmínečné vnucování nejvyšší matematické přesnosti technikům může vésti k značným obtížím.

3. Měli by být vychováváni matematici s technickou intuicí, kteří by s pochopením četli technické práce a nebáli se řešit technické problémy ne zcela matematicky korektní cestou ve spolupráci s techniky s matematickým pochopením. Tito technikové by měli být rovněž zvlášť vychováváni a tvořili by aktivní spojku mezi technikou a matematikou a aplikovaná matematika by spojovala techniky s ryze theoretickou matematikou.

O REPRESENTACI USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

(Referát o přednášce Dr *Miroslava Novotného*, proslovené 6. března 1952 v Brně.)

V této přednášce se budeme zabývati uspořádanými množinami. Množina M se nazývá *částečně uspořádaná*, jestliže je v ní definována relace $x \leqq y$, která má tyto vlastnosti: 1. $x \leqq x$, 2. $x \leqq y, y \leqq z \Rightarrow x \leqq z$, 3. $x \leqq y$, $y \leqq x \Rightarrow x = y$. Místo relace $x \leqq y$ píšeme také $y \geqq x$. Je-li $x \leqq y$, $x \neq y$, píšeme $x < y$. Když pro nějakou dvojici prvků x, y neplatí ani $x \leqq y$ ani $y \leqq x$, pak říkáme, že prvky x, y jsou *nesrovnatelné*, a píšeme $x \parallel y$ nebo $y \parallel x$.

Příklad: Buď P libovolná množina. Označme $\Phi(P)$ libovolný systém jejích podmnožin. Definujeme relaci $\leqq$ v systému $\Phi(P)$ takto: pro X, $Y \in \Phi(P)$ platí $X \leqq Y$, když a jen když $X \subset Y$. Snadno se dokáže, že množina $\Phi(P)$ je tímto způsobem částečně uspořádána. Když na př. $\Phi(P)$ je systém všech jednobodových množin v P, pak libovolné dvě množiny tohoto systému jsou nesrovnatelné.

Množina M se nazývá *úplně uspořádaná*, když je uspořádána částečně a nad to relace uspořádání $\leqq$ splňuje ještě axiom 4: Pro každé dané $x, y \in M$ platí buďto $x \leqq y$ nebo $y \leqq x$. V úplně uspořádané množině tedy není nesrovnatelných prvků.

Příklad: Interval $\langle 0, 1 \rangle$ je množina úplně uspořádaná, jestliže jeho prvky srovnáme podle velikosti. Jiný příklad: Množina všech celých čísel uspořádaných podle velikosti.

Jednu a touž množinu lze uspořádati různými způsoby, jak ukazuje tento příklad: Buď ϑ libovolně dané ordinální číslo a buď M množina všech (ev. transfinitních) posloupností typu ϑ utvořených z čísel 0, 1, ..., n. Prvky množiny M jsou tedy všechny posloupnosti $x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $(\lambda < \vartheta)$, kde $x_\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$. Volíme-li $\vartheta = \omega_0$, kde ω_0 je první ne-