Ivo Babuška

Řešení napjatosti poloroviny zatížené periodicky osamělými břemeny

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 79 (1954), No. 3, 278--280

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117130`

RŮZNÉ

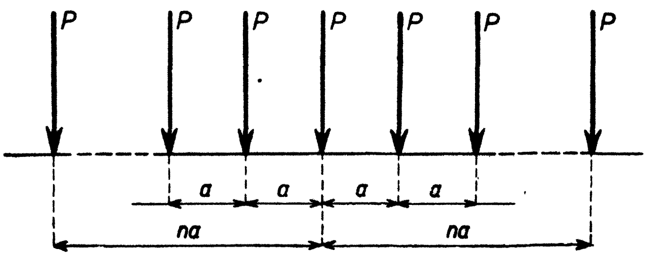
ŘEŠENÍ NAPJATOSTI POLOROVINY ZATÍŽENÉ PERIODICKY OSAMĚLÝMI BŘEMENY

IVO BABUŠKA, Praha.

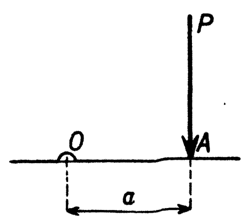
DT: 539.31

Z praxe jsme dostali jistý problém, který vedl na úlohu určiti napjatost v polorovině, periodicky zatížené osamělými břemeny. V této poznámce podáváme explicitní řešení tohoto problému.

Formulujme naši úlohu. *Jest určiti limitní stav* ($n \to \infty$) *napjatosti* (*pokud existuje*) *v homogenní isotropní polorovině zatížené osamělými břemeny* P (podle obrázku 1) *ve stejných vzdálenostech.*



Obr. 1.



Obr. 2.

Tvrdíme, že složky tensoru napětí X_x, X_y, Y_y jsou dány vzorci

$$X_x + Y_y = 4\,\mathrm{Re}\,[\varphi'] , \tag{1}$$

$$Y_y - X_x + 2\mathrm{i}X_y = 2[\bar{z}\varphi'' + \psi'] , \tag{2}$$

kde φ a ψ jsou jisté holomorfní funkce určené výrazy

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \,.\, P \lg \sin \frac{\pi}{a} z , \tag{3}$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \,.\, P \left[-\frac{\pi}{a} z \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} z + \lg \sin \frac{\pi}{a} z \right] . \tag{4}$$

Při tom P bereme kladné, jestliže působí proti kladnému směru osy y (tedy dolů).

Důkaz. Problém napjatosti homogenního isotropního tělesa jest ekvivalentní s biharmonickým problémem aneb s problémem určení jistých holomorfních funkcí φ a ψ (říkejme jim funkce napjatosti), při čemž složky tensoru napětí jsou určeny rovnicemi (1), (2) [srv. [1]].

Lze ukázat, že funkce φ a ψ, odpovídající stejnému napětí, nejsou určeny jednoznačně; ale φ je určena až na výraz $iCz + \alpha$, kde C je reálná a α komplexní konstanta a funkce ψ je určena až na komplexní konstantu β.

Pro jediné osamělé břemeno v bodě A (viz obr. 2) platí (viz [1], str. 354).

$$\varphi_a = -\frac{1}{2\pi i} P \lg (z - a) , \tag{5}$$

$$\psi_a = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \lg (z - a) - \frac{1}{2\pi i} \cdot P \frac{a}{a - z} . \tag{6}$$

Při tom P je kladné, jestliže působí směrem dolů.

Tedy pro $a = 0$ platí

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2\pi i} P \lg z ,$$

$$\psi_0 = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \lg z .$$

Pro $a \neq 0$ můžeme vzorce (5) a (6) ještě upravit podle toho, co jsme řekli o určenosti funkcí napjatosti.

Proto

$$\varphi_a = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \lg \left(1 - \frac{z}{a}\right) ,$$

$$\psi_a = - z\varphi_a' + \varphi_a .$$

Poněvadž problém jest lineární, dostaneme funkce napjatosti pro břemena podle obr. 1 ve tvaru

$$\varphi_n = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \left[\lg z + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{k=n} \lg \left(1 - \frac{z}{ka}\right)\right] = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \left[\lg z + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=n} \lg \left(1 - \frac{z^2}{k^2a^2}\right)\right] = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \lg \left[z \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2a^2}\right)\right] \tag{7}$$

a

$$\psi_n = - z\varphi_n' + \varphi_n . \tag{8}$$

Jestliže existuje $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n$, potom bude tato limita řešením našeho problému.

Existence limity pro $n \to \infty$ funkcí v (7) jest však ekvivalentní s existencí jistého nekonečného součinu. Jest známo (viz na př. [2], str. 299), že

$$z \frac{\pi}{a} \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{z}{k^2a^2}\right] = \sin \frac{\pi}{a} z .$$

Proto

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \lg \sin \frac{\pi}{a} z + \text{konst.}$$

Jestliže $\varphi_n \to \varphi$, potom i $\varphi'_n \to \varphi'$, a tedy

$$\varphi' = \lim \varphi'_n = -\frac{1}{2\pi i} \cdot P \frac{\pi}{a} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} z .$$

Tedy jest

$$\psi = -\frac{1}{2\pi i} \left[-\frac{\pi}{a} z \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} z + \lg \sin \frac{\pi}{a} z \right].$$

LITERATURA

[1] *Н. И. Мусхелишвили:* Некоторые основные задачи математической теории упругости

[2] *S. Saks, A. Zygmund:* Funkcje analiticzne (1948).

UŽITÍ THEORIE POLYEDRŮ V EKONOMII

(Referát z přednášky doc. dr *Fr. Nožičky,* proslovené v matematické obci pražské dne 1. března 1954.)

DT: 513.34
330.6

Theorie n-dimensionálních polyedrů nabývá v současné době velkého významu nejen jako samostatná disciplina geometrie, ale též jako důležitá pomůcka při řešení řady ekonomických problémů.

Při své přednášce vycházel přednášející z konkretního ekonomického problému, který mu byl předložen k řešení v této formulaci: *Máme určitý počet dolů a zcela určitou průměrnou roční produkci uhlí a mimo to určitý počet odbytišť, každé s předem danou roční spotřebou, a to s tím předpokladem, že celková produkce uhlí z uvažovaných dolů rovná se celkové spotřebě uhlí uvažovaných odbytišť. Dále je dána vzdálenost* (v km) *každého dolu od každého odbytiště* (*dopravní železniční síť*). *Úkolem jest najít nejvýhodnější distribuci produkovaného uhlí po dané železniční síti, tedy nejvýhodnější v tom smyslu, aby celková doprava uhlí do daných odbytišť byla co nejlevnější.*

Problém z praxe shora uvedený má jednoduchou matematickou formulaci: Nechť m značí počet dolů, $a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ pak produkci příslušného dolu. Nechť n je počet odbytišť a $b_j (j = 1, \ldots, n)$ nechť představují spotřeby jednotlivých odbytišť. Dále je dáno mn kladných čísel k_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots,$ představujících dopravní vzdálenost (v km) příslušného dolu od příslušného odbytiště. Označíme-li $x_{ij} (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ neznámé množství uhlí, které dodá i-tý důl j-tému odbytišti, potom ryzí matematická formulace jest tato: