Časopis pro pěstování matematiky

Jaroslav Hájek

Některá pořadová rozdělení a jejich použití

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 1, 17--31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117145`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

NĚKTERÁ POŘADOVÁ ROZDĚLENÍ A JEJICH POUŽITÍ

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 24. března 1954.) DT:519.5

S použitím výsledků kombinatorických úvah o množině čísel 1, 2, ..., N jsou zde odvozeny dva pořadové testy, schopné nahradit t — test s asymptotickou vydatností 0,955.

1. Úvod a shrnutí. Tato práce, až na malé změny, je jednou ze tří částí disertace, kterou jsem podal v roce 1949. Jsou z ní odvozeny tři zákony rozdělení, vyplývající z jednoduchých úvah o souboru čísel 1, 2, ..., N, a dále je v ní naznačeno použití těchto rozdělení na testování nulových hypothes. Čísla 1, 2, ..., N v těchto testech hrají roli pořadí, takže běží o tak zvané pořadové testy. Rozdělení a test, označené písmenem α, se zde patrně vyskytují po prvé. Avšak za původce myšlenky, na které je tento test založen, je nutno pokládat R. A. FISHERA, který v III. kapitole svého „The Design of Experiments" uvádí test, založený na stejném principu jen s tím rozdílem, že nebere za základ pořadí hodnot, ale hodnoty samy. Tím se ovšem test stává po počtářské stránce velmi pracným, neboť pro každý konkretní případ si musíme vypočíst zvláštní zákon rozdělení. Při α-testu naopak, jakmile je jednou rozdělení α vypočteno a tabelováno, je provedení testu dílem několika minut. Rozsáhlá tabulka kritických hodnot α pro 5 stupňů významnosti a pro 10 až 50 párů pozorování je uvedena v této práci.

K rozdělení a testu, označenému písmenem β, dospěl již v roce 1945 WILCOXON v článku [1], u nás nepřístupném. Proto se jím budu zabývat jen potud, pokud se má metoda jeho zpracování jeví jako originální. Třetí rozdělení a test, označené písmenem γ, tvořící s předešlými ucelený systém, je dobře ve statistice znám z úloh o pořadovém koeficientu korelace τ.

Pro osud testů, uvedených v této práci, rozhodující jsou jejich přednosti a nedostatky vzhledem k běžnému Studentovu t-testu, kterého se používá k zjištění významnosti

(i) rozdílu mezi průměry dvou spárovaných výběrů,
(ii) rozdílu mezi průměry dvou nespárovaných výběrů,
(iii) regresního koeficientu.

V případě (i) může být t-test nahrazen α-testem, v případě (ii) β-testem (t. j. Wilcoxonovým testem resp. testem pomocí Mann-Whitneyovy U-statistiky), a v případě (iii) γ-testem.[1]) Hlavní výhodou uvedených pořadových testů je jejich jednoduchost a rychlost, a to, že vycházejí z obecnějších, a tím reálnějších předpokladů. Také jejich vydatnost není špatná, neboť jak ukázal VAN DER VAERDEN v práci [3] asymptotická vydatnost β-testu činí $\frac{3}{\pi} = 0{,}955$. Stejný výsledek platí i pro α-test, což bych chtěl ukázat ve zvláštním článku. Nesmíme však při všech kladech pořadových testů zapomínat na tu důležitou okolnost, že případy, kdy je nutno provést jen test významnosti, jsou poměrně řídké. Vždy, jakmile je významnost prokázána, je nutno zároveň stanovit interval spolehlivosti, a tu, zatím co t-test jej poskytuje bezprostředně, pořadové testy jej mohou poskytnout jen s neúměrně velkými počtářskými obtížemi.

2. α-rozdělení. Vyjděme od množiny čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny její podmnožiny, dávajíce každé z nich jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost 2^{-N}. Součet čísel v jednotlivých podmnožinách — označme jej α — bude potom náhodnou veličinou, nabývající celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \alpha \leq \tfrac{1}{2}N(N + 1) .$$

Vytvořující polynom pro rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny α snadno nalezneme, uvědomíme-li si, že α je součtem n nezávislých náhodných veličin

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N ,$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= k \quad \text{(když číslo } k \text{ je v dané podmnožině)}, \\ &= 0 \quad \text{(v opačném případě)}. \end{aligned}$$

Při tom obě možnosti jsou stejně pravděpodobné, neboť počet podmnožin, které číslo k obsahují, je právě takový jako těch, které je neobsahují. Rozklad α na součet $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné podmnožiny můžeme rozdělit na N nezávislých kroků: V prvém zahrneme či nezahrneme do podmnožiny číslo 1, v druhém číslo 2 atd. pro všech N čísel. Vytvořující polynomy náhodných veličin α_k jsou rovny

$$\tfrac{1}{2}(1 + t^k)$$

a tedy vytvořující polynom α je dán vztahem

$$P_N(t)\, 2^N = (1 + t)(1 + t^2) \ldots (1 + t^N) .$$

[1]) Pro stručnost označuji jedním písmenem jednak formu zákona rozdělení, jednak náhodnou veličinu, ovládanou tímto zákonem rozdělení, a také i příslušný test.

Koeficienty polynomů $P^N(t)\,2^N$, které po vydělení 2^N dávají pravděpodobnosti příslušných hodnot α, lze počítat pomocí očividného rekurentního vztahu

$$P_N(t)\,2^N = P_{N-1}(t)\,2^{N-1}(1 + t^N)\,.$$

To jest, napíši-li pod posloupnost koeficientů $P_{N-1}(t)\,2^{N-1}$ tutéž posloupnost, posunutou o N míst, a sečtu, dostanu koeficienty $2^N P_N(t)$. Jelikož rozdělení náhodných veličin α_k jsou symetrická, platí to i o rozdělení α. Střední hodnotu, rozptyl a plochost rozdělení α vypočteme snadno pomocí odpovídajících charakteristik veličin α_k:

$$\begin{aligned} E(\alpha_k) &= \tfrac{1}{2}k \\ D^2(\alpha_k) &= \tfrac{1}{4}k^2 \\ \mu_4(\alpha_k) &= \tfrac{1}{16}k^4 \\ \varkappa_4(\alpha_k) = \mu_4(\alpha_k) - 3D^4(\alpha_k) &= -\tfrac{1}{8}k^4 \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \tfrac{1}{4}N(N+1) \\ D^2(\alpha) &= \tfrac{1}{24}N(N+1)(2N+1) \\ \varkappa_4(\alpha) &= -\tfrac{1}{240}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1) \\ \gamma_2(\alpha) &= \frac{\varkappa_4(\alpha)}{D^4(\alpha)} \sim -\frac{18}{5N}\,. \end{aligned}$$

Konvergence α-rozdělení k normálnímu rozdělení bezprostředně vyplývá z Liapunovovy věty: Třetí absolutní momenty veličin α_k jsou rovny $k^3 2^{-3}$ a jejich součet

$$\sum_{k=1}^{N} k^3 2^{-3} = \tfrac{1}{32}N^2(N+1)^2\,.$$

Podíl třetí odmocniny tohoto součtu a standardní odchylky $D(\alpha)$ pro $N \to \infty$ konverguje k nule.

3. γ-rozdělení. Vyjděme opět od množiny čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny permutace, dávajíce každé z nich jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{N!}$. Potom počet inversí — označme si jej γ — bude náhodnou veličinou. Náhodná veličina γ nabývá celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \gamma \leq \tfrac{1}{2}N(N-1)$$

a opět ji lze rozložit na součet $(N-1)$ nezávislých složek

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{N-1}\,,$$

kde γ_k je počet inversí, způsobených tím, že číslo $(k+1)$ předchází některé z čísel menších, t. j. některé z čísel $1, 2, \ldots, k$. Tento rozklad náhodné veličiny γ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné permutace lze rozložit na $N-1$ nezávislých kroků: V prvním dáme číslo 2 buď za nebo před 1; v druhém dáme 3 buď za obě předcházející čísla nebo mezi ně anebo před ně obě, atd. až v $(N - 1)$-ním kroku dáme číslo N buď za $(N - 1)$ předcházejících čísel nebo do některé z $(N - 2)$ mezer mezi nimi anebo před ně všechny.

Jelikož náhodné veličiny γ_k nabývají hodnot $0, 1, 2, \ldots, k$, a to se stejnými pravděpodobnostmi, neboť každé eventualitě odpovídá stejný počet permutací — elementárních jevů, jsou jejich vytvořující polynomy rovny

$$\frac{1}{k+1}(1 + t + t^2 + \ldots + t^k) = \frac{1}{k+1}(1 - t^{k+1})(1 - t)^{-1}$$

a vytvořující polynom γ je dán vztahem

$$R_N(t)\, N!(1 - t)^N = (1 - t)(1 - t^2)\ldots(1 - t^N)\,. \tag{1}$$

Konvergenci rozdělení γ k normálnímu rozdělení, jeho symetrii, jakož i hlavní momenty, bychom odvodili do písmene stejným způsobem jako tomu bylo u rozdělení α. Uveďme si pouze

$$E(\gamma) = \tfrac{1}{4}N(N - 1)\,,$$
$$D^2(\gamma) = \tfrac{1}{72}N(N - 1)(2N + 5)\,.$$

4. β-rozdělení. I nyní vyjděme od čísel $1, 2, \ldots, N$ a uvažujme všechny možnosti jak je rozdělit na dvě skupiny, jednu o n a druhou komplementární o $(N - n)$ prvcích, dávajíce každé skupině o n prvcích jakožto elementárnímu jevu stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{\binom{N}{n}}$. Potom počet inversí mezi skupinami a jejich komplementy — označme jej β — bude náhodnou veličinou. Inversí mezi skupinami budeme rozumět zjev, že ve skupině o n prvcích se vyskytuje číslo větší než některé číslo z komplementární skupiny a celkový počet inversí zjistíme, když prozkoumáme všech $n(N - n)$ dvojic čísel, z nichž první je ze skupiny o n prvcích a druhé z komplementární skupiny. Náhodná veličina β tedy nabývá celočíselných hodnot v mezích

$$0 \leq \beta \leq n(N - n)\,.$$

Vraťme se nyní k náhodné veličině γ, sledované v předešlém paragrafu. Rozdělíme-li každou permutaci na dvě části — na prvních n a na posledních $(N - n)$ prvků — pak vidíme, že náhodnou veličinu γ lze rozložit na součet tří nezávislých veličin

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta\,,$$

kde γ_1 je počet inversí uvnitř prvé části, γ_2 je počet inversí uvnitř druhé části a β je počet inversí mezi oběma částmi. Tento rozklad náhodné veličiny γ má reálný protějšek v tom, že vytvoření obecné permutace lze rozdělit na tři nezávislé kroky: v prvém určíme čísla, která budou na prvních n místech, a tím i čísla pro posledních $(N - n)$ míst; v druhém kroku zpermutujeme mezi sebou čísla určená pro prvních n míst a ve třetím kroku provedeme totéž se zbývajícími $(N - n)$ čísly.

Vytvořující polynomy γ, γ_1 a γ_2 jsou dány vztahem (1). Označíme-li si vytvořující polynom β písmenem $Q_{N,n}(t)$, pak ze vztahu

$$R_N(t) = R_n(t)\, R_{N-n}(t)\, Q_{N,n}(t)$$

ihned plyne

$$Q_{N,n}(t) \binom{N}{n} = \frac{(1 - t^N)(1 - t^{N-1}) \dots (1 - t^{N-n+1})}{(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^n)} . \qquad (2)$$

Píšeme-li formální obdobu faktoriálů

$$(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^k) = (1 - t^k)!\,,$$

máme

$$Q_{N,n}(t) \binom{N}{n} = \frac{(1 - t^N)!}{(1 - t^n)!\,(1 - t^{N-n})!}\,,$$

takže vytvořující polynom β je jakousi obdobou kombinačních čísel mezi polynomy. Vidíme, že se nemění, dosadíme-li $(N - n)$ místo n

$$Q_{N,n}(t) = Q_{N,N-n}(t) .$$

Avšak $Q_{N,N-n}(t)$ je vytvořující polynom pro rozdělení náhodné veličiny $n(N - n) - \beta$, z čehož je ihned vidět, že rozdělení β je symetrické.

Koeficienty $Q_{N,n}(t) \binom{N}{n}$ a pomocí nich i pravděpodobnosti příslušných hodnot β nalezneme snadno z rekurentního vztahu

$$R_{N,n}(t) \binom{N}{n} = R_{N-1,n}(t) \binom{N-1}{n} + t^{N-n} R_{N-1,n-1}(t) \binom{N-1}{n-1}\,,$$

který si čtenář, užívaje (2), snadno ověří. Reálný smysl tohoto vztahu je v tom, že při rozdělení čísel $1, 2, \dots, N$ do dvou skupin lze *rozložit* dva případy, podle toho, zda číslo N přijde do komplementární skupiny či do skupiny o n prvcích. V prvém případě bude inversí právě tolik, jako kdybychom příslušným způsobem rozdělili jen čísla $1, 2, \dots, N - 1$, kdežto v druhém případě jich bude o $(N - n)$ více.

Označíme-li si součet čísel ve skupině o n prvcích S, snadno si lze ověřit, že

$$\beta = S - \tfrac{1}{2}n(n + 1) .$$

S je součtem n čísel vybraných bez vracení a se stejnými pravděpodobnostmi ze základního souboru $1, 2, \dots, N$, v němž základní rozptyl je $\sigma^2 = \frac{1}{12}(N^2 - 1)$. Tudíž

$$D^2(S) = n\sigma^2 \frac{N - n}{N - 1} = \frac{1}{12}\, n(N - n)(N + 1)$$

a tedy i

$$D^2(\beta) = \tfrac{1}{12} n(N - n)(N + 1) .$$

Střední hodnotu β nalezneme vzhledem ke symetrii jako průměr krajních hodnot 0 a $n(N-n)$:

$$E(\beta) = \tfrac{1}{2}n(N-n)\,.$$

Závěrem se ptejme, k jakému rozdělení konverguje rozdělení β při $N \to \infty$. Zde je nutno rozlišit dva případy:

a) n zůstává pevné. V tomto případě budeme sledovat rozdělení veličiny $\frac{\beta}{N}$. Charakteristickou funkci $\varphi(t)$ rozdělení veličiny $\frac{\beta}{N}$ nalezneme, když ve vyhovujícím polynomu (2) nahradíme t výrazem $e^{it/N}$:

$$\varphi(t) = \frac{(1-e^{it\frac{N}{N}})(1-e^{it\frac{N-1}{N}})\dots(1-e^{it\frac{N-n+1}{N}})\,1\,.\,2\dots n}{(1-e^{it\frac{1}{N}})(1-e^{it\frac{2}{N}})\dots(1-e^{it\frac{n}{N}})\,N(N-1)\dots(N-n+1)}\,.$$

Jelikož

$$\lim_{N\to\infty}(1-e^{it\frac{N-k+1}{N}}) = 1-e^{it} \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\lim_{N\to\infty}(1-e^{it\frac{k}{N}})\,\frac{N-k+1}{k} = -\,it\,,$$

dostáváme

$$\lim_{N\to\infty}\varphi(t) = \left\{\frac{e^{it}-1}{it}\right\}^n.$$

To je charakteristická funkce součtu n nezávislých náhodných veličin, majících spojité rovnoměrné rozdělení nad intervalem (0, 1).

b) $n \to \infty$ a $(N-n) \to \infty$. Jelikož rozdělení součtu n nezávislých hodnot vybraných z rovnoměrného rozdělení konverguje při $n \to \infty$ k normálnímu rozdělení, můžeme z toho ihned vyvodit, že při *některém* způsobu společné konvergence n a $(N-n)$ k nekonečnu bude rozdělení β konvergovat k normálnímu rozdělení. Avšak bylo dokázáno, viz na př. [2], že konvergence k normálnímu rozdělení nastává při *jakékoliv* konvergenci $n \to \infty$ a $(N-n) \to \infty$.

5. α-test. Nyní si ukážeme jak lze použít výsledků odvozených v minulých paragrafech k testování nulových hypothes. Mějme N párů pozorování (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ vesměs nezávislých a takových, že pozorování x_i byla získána za podmínek A, kdežto pozorování y_i za podmínek B. Kromě toho nechť tu působily vedlejší podmínky, které sice byly pro každý pár pozorování stejné, ale od páru k páru se měnily (viz dále uvedený příklad). Nyní testujme nulovou hypothesu, že změna podmínek A v podmínky B neměla vliv na velikost pozorovaných hodnot, a že všechny rozdíly uvnitř párů lze považovat za náhodné. Jinými slovy, testujme nulovou hypotesu, že každý pár pozorování představuje dvě hodnoty nezávisle vybrané z téhož spojitého rozdělení, které se ovšem může od páru k páru měniti.

Vytvořme rozdíly

$$d_i = x_i - y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

a seřaďme je podle *absolutní* velikosti. Spojitost rozdělení vylučuje případy $|d_i| = |d_j|$ pro $i \neq j$ a také případy $d_i = 0$. Rozdíly uspořádané podle *absolutní* velikosti si označme $d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots, d^{(n)}$, takže

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \ldots < |d^{(N)}|\,.$$

Potom lze každé řadě párů pozorování (x_i, y_i) přiřadit podmnožinu čísel $1, 2, \ldots, N$ tak, že číslo k bude do ní pojato tehdy a jen tehdy, je-li rozdíl $d^{(k)}$ kladný. Z nulové hypothesy bezprostředně vyplývá, že každá taková podmnožina bude mít stejnou pravděpodobnost a součet pořadí kladných rozdílů v jejich uspořádání podle absolutní velikosti bude mít rozdělení α.

Tabulka 1.

i, k	x_i	y_i	d_i	$d^{(k)}$
1	188	139	49	6
2	96	163	—67	8
3	168	160	8	14
4	176	160	16	16
5	153	147	6	23
6	172	149	23	24
7	177	149	28	28
8	163	122	41	29
9	146	132	14	41
10	173	144	29	—48
11	186	130	56	49
12	168	144	24	56
13	177	102	75	60
14	184	124	60	—67
15	96	144	—48	75

Test provedeme tedy takto: vypočteme rozdíly mezi páry pozorování, seřadíme je podle absolutních hodnot, sečteme pořadové indexy kladných rozdílů a potom srovnáme zjištěné α s tabulovanou kritickou hodnotou pro příslušný stupeň významnosti. Samozřejmě, očekáváme-li porušení nulové hypothesy jen jedním směrem, redukuje se stupeň významnosti na jednu polovinu. Abychom nemuseli tabelovat horní kritické hodnoty pro α, můžeme využít toho, že je na naší vůli, zda budeme sčítat pořadové indexy kladných či záporných rozdílů. Označíme-li si α založené na kladných rozdílech α_+ a α založené na záporných rozdílech α_-, pak platí

$$\alpha_+ + \alpha_- = \tfrac{1}{2}N(N+1)\,,$$

takže horní kritickou hodnotu překročí α_+ právě tehdy, překročí-li α_- kritickou hodnotu dolní. To nám umožňuje tabelovat jen kritické hodnoty dolní, se kterými srovnáváme α založené na rozdílech toho znaménka, které se vyskytuje méně často.

Příklad. Použijme α-test k rozboru klasického Darwinova experimentu, uvedeného v „The Design of Experiments" R. A. Fishera. Zde je zkoumáno, zda potomstvo rostliny, vzniklé křížením, se liší významně co do své výšky od potomstva vzniklého samooplodněním. Bylo vypěstováno 15 párů exemplářů určité rostliny, v nichž každý jedinec byl vystaven pokud možno stejné péči a stejným původním podmínkám, takže příslušníci každého páru se až na náhodné vlivy lišili pouze tím, že jeden vznikl křížením a druhý samooplodněním. V tabulce 1 jsou v druhém sloupci udány výsledky dosažené u exemplářů vzniklých křížením a v třetím sloupci souběžné výsledky u jedinců vzniklých samooplodněním, při čemž jednotkou je $\frac{1}{8}$ palce. Ve čtvrtém sloupci jsou dány rozdíly a v pátém jsou tyto rozdíly seřazeny podle absolutní velikosti. Čísla v prvém sloupci určují pořadí, a to jak d_i, tak i $d^{(k)}$. Jelikož záporné rozdíly jsou jen dva, založíme α-test na nich. Jelikož -48 má pořadí 10 a -67 má pořadí 14, dostáváme

$$\alpha = 10 + 14 = 24 .$$

V tabulce 2 nacházíme, že pro $N = 15$ je 5%-ní kritická hodnota 25,3, takže spokojíme-li se s 5%-ním stupněm významnosti, je nalezená hodnota α významně malá a soudíme, že způsob vzniku rostliny na její výšku vliv má. Použijeme-li t-test, dostáváme $t = 2{,}148$, což je také hodnota nepatrně větší než 5%-ní hodnota, takže oba testy dávají v podstatě stejný výsledek.

V tabulce 2 jsou vypočteny dolní kritické hodnoty pro 10%-ní, 5%-ní, 2%-ní, 1%-ní a 0,1%-ní stupně významnosti. Pro malá N bylo použito skutečného α-rozdělení. Pro větší N bylo možno použít aproximace pomocí normálního rozdělení, opraveného v člen Edgeworthovy řady, beroucí zřetel na plochost.

Poznámka 1. Je-li v tabulce 2 na místě 5%-ní kritické hodnoty uvedeno číslo $a_{0,05}$, znamená to, že

$$P(\alpha_+ \leq a_{0,05}) + P(\alpha_- \leq a_{0,05}) = 0{,}05 .$$

Je-li číslo $a_{0,05}$ necelé, na př. $a_{0,05} = 25{,}3$, znamená to, že s pravděpodobností 0,3 můžeme za významnou považovat i hodnotu 26, aniž by pravděpodobnost zamítnutí nulové hypothesy, je-li správná, stoupla nad 0,05.

Poznámka 2. Při skutečných experimentech se bude stávat, že některé rozdíly budou rovny nule, a jiné zase budou stejné co do své absolutní hodnoty. Tento případ lze převést na předešlý tím, že dodatečně jednak každý nulový rozdíl prohlásíme s pravděpodobností 0,5 za kladný a s pravděpodobností 0,5 za záporný, a jednak skupinky co do absolutní velikosti stejně velkých rozdílů náhodně seřadíme podle „velikosti" tak, že každé seřazení bude mít stejnou pravděpodobnost. Po tomto umělém „doplnění" experimentu, bude možno užít α-test přesně tak, jako by se jednalo o výběr ze spojitého rozdělení. Jeho

Tabulka 2.

Dolní kritické hodnoty pro α-test.

Počet párů N	Stupeň významnosti				
	10 %	5 %	2 %	1 %	0,1 %
10	10,8	8,0	4,9	3,0	
11	13,9	10,7	7,1	4,8	
12	17,5	13,8	9,6	7,0	0,8
13	21,4	17,2	12,6	9,6	2,4
14	25,7	21,0	15,8	12,4	4,2
15	30,5	25,3	19,5	15,7	6,3
16	35,6	29,9	23,5	19,3	8,8
17	41,2	34,9	27,9	23,3	11,6
18	47,1	40,3	32,6	27,6	14,7
19	53,6	46,1	37,8	32,3	18,1
20	60,4	52,3	43,3	37,3	21,9
21	67,6	58,9	49,1	42,7	25,9
22	75,2	66,0	55,4	48,6	30,3
23	83,3	73,4	62,2	54,7	35,1
24	91,8	81,2	69,3	61,4	40,3
25	100,8	89,5	76,7	68,3	45,8
26	110,1	98,2	84,6	75,7	51,6
27	119,9	107,3	92,9	83,4	57,7
28	130,2	116,8	101,6	91,6	64,2
29	140,8	126,8	110,7	100,0	71,2
30	151,9	137,1	120,2	108,9	78,6
31	163,4	147,9	130,2	118,2	86,3
32	175,5	159,1	140,5	128,0	94,3
33	187,9	170,7	151,2	138,2	102,7
34	200,7	182,8	162,3	148,8	111,5
35	214,0	195,3	173,9	159,8	120,7
36	227,7	208,2	185,9	171,0	130,2
37	241,9	221,5	198,3	182,7	140,1
38	256,5	235,3	211,1	195,0	150,4
39	271,5	249,6	224,4	207,6	161,1
40	287,0	264,2	238,1	220,6	172,1
41	303,0	279,2	252,1	233,8	183,6
42	319,3	294,7	266,5	247,5	195,4
43	336,2	310,6	281,5	261,8	207,7
44	353,4	327,0	296,9	276,5	220,4
45	371,2	343,8	312,7	291,6	233,5
46	389,3	361,1	328,9	307,1	247,0
47	408,0	378,7	345,5	322,8	260,8
48	427,0	396,8	362,5	339,0	275,0
49	446,5	415,4	380,0	355,8	289,7
50	466,5	434,4	397,9	373,0	304,7

citlivost se tím ovšem zmenší. Pro aplikaci však bude stačit užít místo „doplňování" experimentu následujícího polovinového pravidla:

1° vyskytuje-li se mezi diferencemi k nul, připočteme na vrub α $\frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + k)$.

2° vyskytuje-li se na místech, $r + 1, \dots, r - k + 1$ k co do absolutní hodnoty stejných diferencí, mezi nimiž je k_+ kladných a k_- záporných,

$k_+ + k_- = k$, pak připočteme na vrub α $\left(r + \frac{k-1}{2}\right) k_+$, resp. $\left(r + \frac{k-1}{2}\right) k_-$ podle toho, zda používáme α_+ či α_-.

V těch skupinkách, kde jsou všechny rozdíly stejného znaménka, nebude samozřejmě třeba dělat žádná opatření. Statistika α, získaná z polovinového pravidla nebude již sice mít přesně to rozdělení, které máme tabelováno, ale lze očekávat, že v případě, kdy nul a absolutně rovných rozdílů nebude mnoho, budou tabulky i nadále použitelné.

Tabulka 3.

m \ n	3	4	5	6	7	8	9	10
4	—	0,7		Dolní 5 %-ní kritické hodnoty pro β-test				
5	0,4	1,6	2,8					
6	1,0	2,4	3,9	5,4				
7	1,5	3,3	5,1	6,9	8,8			
8	2,0	4,1	6,2	8,4	10,7	13,0		
9	2,5	5,0	7,4	10,0	12,6	15,3	18,0	
10	3,0	5,7	8,5	11,5	14,5	17,6	20,6	23,7

Tabulka 4.

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	—	0,0			Dolní 10 %-ní kritické hodnoty pro β-test				
4	—	0,7	1,8						
5	0,1	1,4	2,8	4,1					
6	0,4	2,1	3,7	5,4	7,2				
7	0,8	2,7	4,7	6,8	8,9	11,1			
8	1,2	3,3	5,7	8,2	10,7	13,2	15,8		
9	1,6	4,0	6,8	9,6	12,5	15,4	18,3	21,3	
10	1,9	4,6	7,8	11,0	14,2	17,5	21,0	24,3	27,6

Poznámka 3. Je-li nulová hypothesa vyvrácena, vyvstává úloha najít interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ. Lze při tom postupovat následujícím způsobem: Vezmeme libovolné μ a na chvíli budeme předpokládat, že střední hodnota je skutečně rovna tomuto μ. Pak ovšem s příslušnou pravděpodobností, řekněme 0,95, nesmí α vypočtené z hodnot $(d_1 - \mu)$, $(d_2 - \mu), \ldots, (d_N - \mu)$ padnout do kritického oboru. Čili ta μ, pro které se to stane, budou tvořit interval spolehlivosti. Výpočet krajních bodů tohoto intervalu by se však muselo dělat patrně zkusmo, což by bylo velmi obtížné.

Poznámka 4. Použití α-testu se neomezuje jen na spárované výběry. Lze jím testovat i poněkud obecnější hypothesu, že střední hodnota n pozorování majících symetrické rozdělení, je rovna určité konstantě. (U spárovaných výběrů testujeme hypothesu, že střední hodnota rozdílů je rovna nule.) Jiným zobecněním by byl necentrální α test, při kterém by však bylo nutno specifikovat formu distribuční funkce.

6. β**-test.** Máme-li dva nespárované nezávislé výběry $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $y_1, y_2, \ldots, y_m$, lze nulovou hypothesu, pravící, že všech $n + m$ hodnot bylo vybráno z téhož rozdělení, otestovat pomocí β-testu. Stačí zjistit počet inversí mezi oběma výběry, t. j. počet případů, že $y_i < y_j$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$. Za předpokladu, že nulová hypothesa platí, bude mít tento počet inversí β-rozdělení, kde $N - n = m$. Dolní 5%-ní a 10%-ní kritické hodnoty pro n, $m \leq 10$ jsou pro β-test uvedeny v tabulkách 3. a 4. S tabelovanými kritickými hodnotami opět srovnáváme β vypočtené na základě těch inversí, kterých je méně.

7. γ**-test.** Mějme N nezávislých párů pozorování $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ z dvojrozměrného rozdělení. Nulovou hypotesu, že x a y jsou nezávislé, lze pak otestovat pomocí γ-testu. Stačí zjistit počet inversí v posloupnosti $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}$ vytvořené tak, že odpovídající hodnoty x_i tvoří rostoucí posloupnost $x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(N)}$. Za předpokladu, že nulová hypothesa platí, bude mít tento počet inversí γ-rozdělení.

LITERATURA

[1] *Wilcoxon F.*, Individual comparisons by ranking methods, Biometrics Bull. 1, 80—83 (1945).

[2] *H. B. Mann* and *D. R. Whitney,* On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Ann. Math. Stat. vol. *18*, 50—61, (1947).

[3] *Van der Vaerden,* Order tests for the two sample problem and their power. Proceedings A, 55, 453—458 (1952);
Order tests for the two sample problem (second communication), Proceedings A, 56, 303—310; (1953).
Order tests for two sample problem (third communication), Proceedings A, 56, 311—316 (1953).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ПОРЯДКОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ЯРОСЛАВ ХАЕК (Jaroslav Hájek), Прага.

(Поступило в редакцию 24/III 1954 г.)

В предлагаемой работе выводятся три типа распределений и три соответствующих теста α, β, и γ; при выводе используются элементарные рассуждения о множестве $\{1, 2, \ldots, N\}$ натуральных чисел $1, 2, \ldots, N$. Асимптотическая эффективность α-теста и β-теста равна 0,955.

α-распределение. Мы будем считать все подмножества множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ элементарным событиямии. Пусть вероятность каждого элементарного события равна 2^{-N}. Сумма α всех чисел в каждом элементарном событии есть случайная величина, производящий полином которой $P_N(t)$ дан соотношением

$$P_N(t)\, 2^N = \prod_{n=1}^{N} (1 + t^n)\,.$$

Средняя величипа $E(\alpha)$, дисперсия $D^2(\alpha)$ и остальные характеристики даны формулами на стр. 19. α-распределение стремится к нормальному распределению, как непосредственно вытекает из теоремы Ляпунова.

γ-распределение. Рассмотрим все перестановки множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, считая каждую из них элементарным событием. Пусть $(N!)^{-1}$ есть вероятность каждого такого события. Число γ всех инверсий в каждой перестановке является случайной величиной. Производящий полином $R_N(t)$ можно составить по уравнению (1).

β-распределение. Рассмотрим систему всех подмножеств, содержащих n элементов ($n \leqq N$) множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, причем условимся считать каждое подмножество элементарным событием. Число β всех инверсий между подмножеством и дополнительным к нему множеством в множестве $\{1, 2, \ldots, N\}$ является случайной величиной. Под инверсией между двумя множествами мы подразумеваем каждую пару чисел (p, q), где $p > q$ и p принадлежит первому, а q — второму множеству.

Элементы каждой перестановки можно разделить на две группы; первая группа содержит первые n элементов перестановки, а вторая содержит остальные $N - n$ элементов. Итак, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta$, где через $\gamma_1(\gamma_2)$ обозначено число всех инверсий в первой (второй) группе, а β означает число всех инверсий между обеими группами. Производящие полиномы γ, γ_1 и γ_2 даны уравеннием (1). Отсюда следует, что производящий полином $Q_{N,n}(t)$ β-распределения удовлетворяет следующему соотношению:

$$R_N(t) = R_n(t)\, R_{N-n}(t)\, Q_{N,n}(t)\,.$$

Полином $Q_{N,n}(t)$ можно вычислить по формуле (2). Очевидно,

$$Q_{N,n}(t) = Q_{N,N-n}(t)\,,$$

значит, β-распределение симметрично. Формулы для средней $E(\beta)$ и дисперсии $D^2(\beta)$ приведены на стр. 21 и 22.

Пусть теперь $N \to \infty$. Предположим, что n постоянно. Если в (2) заменить t выражением $e^{itN^{-1}}$, то получится характеристическая функция $\varphi(t)$ распределения βN^{-1}, откуда следует, что β-распределение стремится к распределению суммы n независимых ортогональных случайных величин. В том случае, когда как $n \to \infty$, так и $N \to \infty$, получим нормальное распределение.

α**-тест.** Пусть дано N пар независимых наблюдений (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, при которых условия A влияли на наблюдения x_i, а условия B влияли на наблюдения y_i. Пусть, кроме того, дальнейшие условия C влияли на обе величины x_i и y_i одинаковым образом, но изменялись от пары к паре. Нашей задачей будет проверить нулевую гипотезу: каждая пара наблюдений представляет две величины, выбранные независимо друг от друга из одного и того же непрерывного распределения, которое, конечно, может меняться от пары к паре. Расположим абсолютные величины разностей $d_i = x_i - y_i$ в виде возрастающей последовательности

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \ldots < |d^{(N)}|$$

и поставим в соответствие неблюдениям (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, N$, подмножество множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, содержащее все числа k, для которых $d^{(k)} > 0$. Из нулевой гипотезы следует, что вероятности всех таких подмножеств одинаковы. Кроме того, сумма порядковых индексов положительных разностей, расположенных по абсолютной величине, имеет α-распределение. Следовательно, можно ставнить вычисленное α с табулированным критическим значением для соответствующей степени значительности. α-тест использован для анализа классического опыта Дарвина, опубликованного в „*The Design of Experiments*“ и касающегося растений, возникших скрещиванием и самооплодотворением. В этом случае мы получим $\alpha = 24$. В таблице 2 для $N = 15$ и 5% мы находим значение 25,3. t-тест Стьюдента дает $t = 2{,}148$. Итак, оба теста дают практически одинаковые результаты.

α-тестом можно пользоваться даже в том случае, когда данные распределения не являются непрерывными.

β**-тест.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — две независимые непарные выборки. Предположим, что справедлива нулевая гипотеза, что все $n + m$ значений были выбраны из одного и того же распределения. В таком случае можно воспользоваться β-тестом. Достаточно определить число инверсий между выборками. Это число обладает β-распределением, где $N - n = m$. Нижние 5%-ные и 10%-ные критические значения затабулированы.

γ**-тест.** Пусть $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ — N друг от друга независимых пар наблюдений из двухмерного распределения. Если x и y независимы (нулевая гипотеза), то можно применить γ-тест. Расположим значения x_i в виде возрастающей последовательности $x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(N)}$ и предположим, что соответствующие значения y_i будут $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}$. Если справедлива нулевая гипотеза, то число инверсий в упомянутой последовательности обладает γ-распределением.

Summary.

SOME RANK DISTRIBUTIONS AND THEIR APPLICATIONS

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Received March 24, 1954.)

In this paper three laws of distribution and three corresponding tests α, β and γ are derived by means of elementary considerations of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ of natural numbers $1, 2, \ldots, N$. The asymptotical efficiencies of α-test and β-test are 0,955.

α-distribution. Let us consider all subsets of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ as elementary events. Let 2^{-N} be the probability of every elementary event, The sum α of all numbers in each elementary event is a random variable whose generating polynomial $P_N(t)$ is give by the relation

$$P_N(t) \,.\, 2^N = \prod_{n=1}^{N} (1 + t^n) \,.$$

The mean value $E(\alpha)$, the variance $D^2(\alpha)$ and other characteristics of the α-distribution are given by the formulae on page 19. The convergence to the normal distribution follows immediately from Liapunov's theorem.

γ-distribution. Let us consider all permutations of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$, regarding every permutation as an elementary event. Let $(N!)^{-1}$ be the probability of every such event. The number γ of all inversions in any permutation is a random variable. The generating polynomial $R_N(t)$ can be computed from equation (1).

β-distribution. Let us consider the system of all consisting of n elements ($n \leqq N$) of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$, every subset being an elementary event. Let $\binom{N}{n}^{-1}$ be the probability of every elementary event. The number β of all inversions between the subset and its complementary set in the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ is a random variable. By the inversion between two subsets of natural numbers we understand each pair of numbers (p, q), where $p > q$ and p belongs to the first and q to the second subset.

We can divide the elements of every permutation into two groups; one group consists of the first n elements of the permutation and the second consists of the remaining $N - n$ elements. Therefore $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta$ where γ_1 (γ_2) denotes the number of all inversions in the first (second) group and β denotes the number of all inversions between both groups. Generating polynomials γ, γ_1 and γ_2 are given by (1). From this it follows that the generating polynomial $Q_{N,n}(t)$ of the β-distribution satisfies the following relation

$$R_N(t) = R_n(t) \,.\, R_{N-n}(t) \,.\, Q_{N,n}(t) \,.$$

The polynomial $Q_{N,n}(t)$ can be computed from (2). Evidently

$$Q_{N,n}(t) = Q_{N,N-n}(t)$$

Now, let $N \to \infty$. Suppose that n is constant. If we replace t by $e^{it \cdot N^{-1}}$ in (2) we get the characteristic function $\varphi(t)$ of the distribution $\beta \cdot N^{-1}$ from which it follows that the β-distribution converges to the distribution of the sum of n independent rectangular random variables. In the case when both $n \to \infty$ and $N - n \to \infty$ we get normal distribution.

α-test. Let N pairs of independent observations (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$ be given whereby a condition A influence the values x_i and a condition B influences the values y_i. Moreover, let a third condition C influence both values x_i and y_i equally but let C vary from pair to pair. Our task now is to test the null hypothesis, viz. that each pair of observation represents two values independently sampled from the same continuous distribution which, of course, can vary from one pair to another. Let us arrange the absolute values of the differences $d_i = x_i - y_i$ in the ascending sequence

$$|d^{(1)}| < |d^{(2)}| < \ldots < |d^{(N)}|$$

and let us assign to the observations (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$ a subset of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ consisting of all numbers k for which $d^{(k)} > 0$. From the null hypothesis it follows that the probability of every such subset is the same. Moreover the sum of ranks of positive differences in their arrangement is distributed according to the α-distribution. Consequently we can compare the computed α with the tabulated critical value for corresponding level of significance. The α-test is used for the analysis of the classical Darwin's experiment, published in "The Design of Experiments" concerning the off-spring of a plant reproduced by crossing and by self-fertilisation. In this case we get $\alpha = 24$. In table 2 we find the value 25,3 for $N = 15$ and for 5%. Student's t-test gives $t = 2{,}148$. In this case both tests give practically the same result.

The α-test can be used even in the case, where the given distributions fail to be continuous.

β-test. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and $y_1, y_2, \ldots, y_m$ be two independent nonpaired samples. Let us suppose that the zero hypothesis holds true, viz. that all $n + m$ values are sampled from the same distribution. In this case the β-test can be used. It is sufficient to determine the number of inversions between the two samples. The number of inversions will be β-distributed, where $N - n = m$. Lower 5% and 10% critical values are tabulated.

γ-test. Let $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ be N independent pairs of observations of a two-dimensional distribution. If x and y are independent (the zero-hypothesis) then it is possible to use the γ-test. Let us arrange the values x_i in an ascending sequence $x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(N)}$ and let the corresponding values y_i are $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots, y^{(N)}$. If the zero hypothesis is true, the number of inversion in the last sequence has γ-distribution.