Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955)

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST FUNKCÍ JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

(Došlo dne 3. května 1954.)

DT:517.41

Hodnost Wronského matice n funkcí udává za jistých podmínek počet lineárně nezávislých funkcí mezi těmito n funkcemi. Zde je dokázáno ve větě 2 kriterium obecnější a současně jednodušší než to, které se obyčejně uvádí.

Je známa důležitá úloha, kterou hraje t. zv. determinant Wronského při vyšetřování lineární závislosti a nezávislosti funkcí. Obyčejně se udává kriterium, obsažené v tomto článku jako 3. pomocná věta. Vlastním cílem tohoto článku je obecnější a jednodušší kriterium, obsažené ve větě 2. Tato věta je jednoduchým důsledkem věty 1, která se týká jisté limitní vlastnosti Wronského determinantu. Podnět k tomuto článku dal rozhovor jeho autora s E. ČECHEM v r. 1943. Je dosti těžko zjistit, není-li věta 2 již známa; její důkaz vyžaduje jen klasických pomůcek. Ale sotva je věta 2 známa naší širší matematické obci.

V celém článku slovo „číslo" znamená komplexní číslo; slovo „funkce" znamená komplexní funkci jedné reálné proměnné; „derivace" znamená konečnou („vlastní") derivaci.[1]) Připomeňme: Existuje-li $f^{(k)}(\alpha)$ ($k > 0$), je

$$\lim_{\xi\to 0} \xi^{-k}\left(f(\alpha+\xi) - f(\alpha) - \frac{\xi}{1!}f'(\alpha) - \ldots - \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(\alpha) - \frac{\xi^k}{k!}f^{(k)}(\alpha)\right) = 0\,; \tag{1}$$

pro reálné f viz na př. můj *Úvod do počtu diferenciálního*, konec kap. XI; také se dostane (1) ihned z věty 150. Je-li f komplexní, užijeme právě zmíněného výsledku na reálnou a imaginární část. Užijeme-li rovnice (1) na funkci $f^{(v)}(x)$, obdržíme rovnici

$$f^{(v)}(\alpha+\xi) = \sum_{l=v}^{k} f^{(l)}(\alpha)\,\frac{\xi^{l-v}}{(l-v)!} + o(\xi^{k-v})\,; \tag{2}$$

přitom $o(\xi^p)$ značí takovou funkci $g(\xi)$, že je $\lim_{\xi\to 0} \xi^{-p}\,g(\xi) = 0$; speciálně $o(1)$

[1]) Je-li $f = g + ih$ (g, h reálné funkce), definujeme ovšem $f^{(k)} = g^{(k)} + ih^{(k)}$. Někdy píšeme $f^{(0)}$ místo f.

značí takovou funkci $g(\xi)$, že je $\lim_{\xi\to 0} g(\xi) = 0$. Rovnice (2) platí tehdy, je-li $0 \leqq v < k$ a existuje-li $f^{(k)}(\alpha)$; je-li $f^{(k)}(x)$ spojitá v bodě α, platí (2) zřejmě i pro $0 \leqq v = k$.

§ 1. Věta 1 a její důkaz.

Je-li předložena matice komplexních čísel

$$\begin{matrix} a_{0,0}\, a_{0,1}\, \ldots,\, a_{0,\nu-1} \\ a_{1,0}\, a_{1,1}\, \ldots,\, a_{1,\nu-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,0}\, a_{n-1,1}\, \ldots,\, a_{n-1,\nu-1} \end{matrix} \qquad (n > 0, \nu > 0)\,, \tag{3}$$

budeme její l-tý řádek $a_{l,0}, a_{l,1}, \ldots, a_{l,\nu-1}$ označovati znakem $\{l\}$. Je-li dán nějaký systém řádků

$$\{l_0\}, \{l_1\}, \ldots, \{l_{\varrho-1}\}\,, \tag{4}$$

nazýváme číslo $l_0 + l_1 + \ldots + l_{\varrho-1}$ jeho výškou; hodností systému (4) nazveme hodnost matice

$$\begin{matrix} a_{l_0,0}, \ldots, a_{l_0,\nu-1} \\ a_{l_1,0}, \ldots, a_{l_1,\nu-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l_{\varrho-1},0}, \ldots, a_{l_{\varrho-1},\nu-1}\,. \end{matrix} \tag{5}$$

Systém (4) je „nezávislý", jsou-li řádky matice (5) lineárně nezávislé, t. j. je-li její hodnost rovna ϱ; jinak je systém (4) „závislý". Pro $\varrho = 1$ znamená závislost systému $\{l\}$ totéž jako rovnice $a_{l,0} = a_{l,1} = \ldots = a_{l,\nu-1} = 0$.

Čísla

$$l_0, l_1, \ldots, l_{\varrho-1} \tag{6}$$

nemusí být různá; jsou-li dvě z nich stejná, je ovšem systém (4) závislý.[2] Dva systémy považujeme za stejné tehdy a jen tehdy, liší-li se příslušné soustavy čísel (6) pouze permutací; tedy systémy $\{1\}, \{3\}, \{5\}$ a $\{3\}, \{1\}, \{5\}$ jsou stejné; rovněž $\{1\}, \{3\}, \{3\}, \{5\}$ a $\{3\}, \{1\}, \{5\}, \{3\}$; ale systém $\{1\}, \{3\}, \{5\}$ a systém $\{1\}, \{3\}, \{3\}, \{5\}$ jsou různé.

1. pomocná věta. *Budiž dána matice* (3), *mající hodnost* ν (*tedy* $n \geqq \nu$). *Mezi všemi nezávislými systémy* ν *řádků existuje aspoň jeden, který má nejmenší výšku; tuto nejmenší výšku označme* H.

Označme jeden z těchto nezávislých systémů výšky H *znakem*

$$\{I_1\}, \ldots, \{I_\nu\} \quad (I_1 < I_2 < \ldots < I_\nu)\,. \tag{7}$$

[2]) Místo „(4) je nezávislý systém" budeme také říkati, že (4) se skládá z nezávislých řádků.

Tvrdím:

I. Existuje pouze jeden systém ν nezávislých řádků o výšce H.

II. Je-li

$$\{h_1\}, \{h_2\}, \ldots, \{h_\lambda\} \tag{8}$$

systém takový, že

$$0 < \lambda < \nu, \; h_1 + h_2 + \ldots + h_\lambda < I_1 + I_2 + \ldots + I_\lambda \,, \tag{9}$$

je systém (8) *závislý.*

III. Je-li

$$\{h_1\}, \{h_2\}, \ldots, \{h_\lambda\} \tag{10}$$

systém takový, že

$$h_1 \leqq h_2 \leqq \ldots \leqq h_\lambda, \; 0 < \lambda \leqq \nu \tag{11}$$

a je-li

$$h_\mu < I_\mu \tag{12}$$

aspoň pro jedno μ $(1 \leqq \mu \leqq \lambda)$, *je systém* (10) *závislý.*

Důkaz. Zřejmě II plyne z III — stačí srovnat $h_1, \ldots, h_\lambda$ v II podle velikosti. Ale také I plyne z III. Je-li totiž $\{h_1\}, \ldots, \{h_\nu\}$ nezávislý systém, $h_1 \leqq h_2 \leqq \leqq \ldots \leqq h_\nu$,

$$h_1 + \ldots + h_\nu = H = I_1 + \ldots + I_\nu \,,$$

musí podle III býti $h_\mu \geqq I_\mu$ pro každé μ, tedy $h_\mu = I_\mu$.

Dokažme tvrzení III. Pro každé τ $(1 \leqq \tau \leqq \mu)$ sestrojme systém

$$\{I_1\}, \ldots, \{I_{\mu-1}\}, \{h_\tau\}, \{I_{\mu+1}\}, \ldots, \{I_\nu\} \,; \tag{13}$$

ten má výšku menší než H (neboť $h_\tau \leqq h_\mu < I_\mu$) a tedy platí mezi řádky (13) netriviální lineární relace. Kdyby se z této relace dal vypočísti některý řádek $\{I_\varrho\}$ $(\varrho > \mu)$, daly by se řádky (7) vyjádřit jako lineární kombinace ν řádků

$$\{I_1\}, \ldots, \{I_{\varrho-1}\}, \{h_\tau\}, \{I_{\varrho+1}\}, \ldots, \{I_\nu\} \,;$$

tento systém by tedy musil býti rovněž nezávislý, což není možné, ježto má výšku menší než H. Relace (13) je tedy prostě relací mezi $\{I_1\}, \ldots, \{I_{\mu-1}\}, \{h_\tau\}$, z níž lze ovšem $\{h_\tau\}$ vypočísti. Tedy řádky $\{h_1\}, \ldots, \{h_\mu\}$ jsou lineárními kombinacemi $\mu - 1$ řádek $\{I_1\}, \ldots, \{I_{\mu-1}\}$[3]) a tedy tvoří závislý systém. Tím spíše je závislý celý systém (10).

V dalším budeme potřebovati pouze tvrzení I, II.

Věta 1. *Budiž* $0 < \nu < n$. *Funkce* $f_0(x), \ldots, f_{\nu-1}(x)$ *nechť mají derivaci řádu* $n - 1$ *v bodě* α *(a tedy derivaci řádu* $\nu - 1$ *v jistém okolí bodu* α*). Nechť matice*

[3]) Pro $\mu = 1$ to znamená, že $\{h_1\}$ se skládá ze samých nul.

$$\begin{matrix} f_0^{(0)}(\alpha), & \dots, f_{\nu-1}^{(0)}(\alpha) \\ f_0'(\alpha), & \dots, f_{\nu-1}'(\alpha) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ f_0^{(n-1)}(\alpha), & \dots, f_{\nu-1}^{(n-1)}(\alpha) \end{matrix} \tag{14}$$

má hodnost ν. Položme

$$\Delta_\nu(x) = \begin{vmatrix} f_0(x), & \dots, f_{\nu-1}(x) \\ f_0'(x), & \dots; f_{\nu-1}'(x) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ f_0^{(\nu-1)}(x), & \dots, f_{\nu-1}^{(\nu-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{15}$$

I. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - \alpha| < \delta$ je $\Delta_\nu(x) \neq 0$.

II. Podrobněji: Položme $f_l^{(k)}(\alpha) = a_{kl}$, takže matice (14) *nabude tvaru* (3). *Definujme $H, I_1, \dots, I_\nu$ jako v první pomocné větě a klaďme*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{I_1,0}, & \dots, a_{I_1,\nu-1} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{I_\nu,0}, & \dots, a_{I_\nu,\nu-1} \end{vmatrix}, \text{ takže } \Delta \neq 0. \tag{16}$$

Potom jest

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\Delta_\nu(\alpha + \xi)}{\xi^{I_1+\dots+I_\nu-\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}} = \frac{\Delta}{I_1! \dots I_\nu!} \prod_{1\leq i<k\leq\nu} (I_k - I_i) \,. \tag{17}$$

Poznámka. Tvrzení I plyne ovšem z tvrzení II. Srovnáme-li (17) s (1), vidíme, že se funkce $\Delta_\nu(x)$ chová v blízkosti bodu α tak, jakoby měla v bodě α derivaci řádu $I_1 + \dots + I_\nu - \frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ různou od nuly a všechny derivace nižších řádů rovny nule; je však zajímavo, že (17) platí i v mnohých případech, kdy jmenovaná derivace neexistuje. Budiž na př. $\nu = 2$, $n = 6$ a v matici (14) buďte první čtyři řádky složeny ze samých nul, předposlední řádek budiž 1, 0 a poslední 0, 1. Potom podle (17) je limita $\lim\limits_{\xi\to 0} \dfrac{\Delta_2(\alpha + \xi)}{\xi^8}$ konečná a různá od nuly; ale osmá derivace funkce $\Delta_2(x)$ obsahuje devátou derivaci funkcí $f_0(x)$, $f_1(x)$, kdežto k platnosti rovnice (17) stačí v tomto případě existence derivací pátého řádu.

Důkaz věty 1. Pro zkrácení pišme $I_\nu = m$, takže $\nu - 1 \leq m \leq n - 1$. Na funkce $f_0, \dots, f_{\nu-1}$ užijme vzorce (2), a to pro $k = m$ a pro $v = 0, 1, \dots, \nu - 1$. Obdržíme pro $0 \leq q \leq \nu - 1$[4])

$$\begin{aligned} (m + 1)!\, \xi^v f_q^{(v)}(\alpha + \xi) &= \sum_{l=0}^{m} f_q^{(l)}(\alpha)\, \xi^l (m + 1) \,.\, m \dots (l - v + 1) + \eta_{v,q}(\xi) \,.\, \xi^m \,, \\ &= A_{v,q,0} + A_{v,q,1} + \dots + A_{v,q,m+1} \,, \end{aligned} \tag{18}$$

[4]) V následujícím součtu členové s $l < v$ sami sebou vypadnou, ježto pro $l < v$ je $(m + 1) \,.\, m \dots (l - v + 1) = 0$.

kde
$$\left.\begin{array}{l} A_{v,q,l} = a_{lq}\xi^l(m+1)\,.\,m\ldots(l-v+1) \text{ pro } l \leqq m\,, \\ A_{v,q,m+1} = \eta_{v,q}(\xi)\,.\,\xi^m\,,\ \lim\limits_{\xi\to 0}\eta_{v,q}(\xi) = 0\,. \end{array}\right\} \tag{19}$$
Tedy jest
$$((m+1)!)^\nu\,\xi^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}\,\Delta_\nu(\alpha+\xi) = \sum_{l_0,l_1,\ldots,l_{\nu-1}=0}^{m+1} \begin{vmatrix} A_{0,0,l_0}, & \ldots, A_{0,\nu-1,l_0} \\ A_{1,0,l_1}, & \ldots, A_{1,\nu-1,l_1} \\ \ldots & \ldots \\ A_{\nu-1,0,l_{\nu-1}}, & \ldots, A_{\nu-1,\nu-1,l_{\nu-1}} \end{vmatrix}. \tag{20}$$
Vyšetřujme jednotlivé determinanty vpravo.

I. Vezměme onen determinant, kde všechna čísla
$$l_0, l_1, \ldots, l_{\nu-1} \tag{21}$$
jsou rovna $m+1$. Podle (19) je tento determinant roven $o(\xi^{\nu m})$ a tedy $o(\xi^{I_1+\ldots+I_\nu}) = o(\xi^H)$, neboť $I_\varrho \leqq I_\nu = m$.

II. Vezměme za druhé nějaký determinant, v němž právě k $(1 \leqq k < \nu)$ z čísel (21) je rovno $m+1$, ostatních $\nu - k$ pak je menších než $m+1$. Rozviňme tento determinant podle oněch k řádků, k nimž příslušná l_ϱ jsou rovna $m+1$. Tím se rozpadne determinant na součet několika sčítanců tvaru (K je konstanta)
$$K\xi^{s_1+\ldots+s_{\nu-k}} \begin{vmatrix} a_{s_1,w_1} & \ldots, a_{s_1,w_{\nu-k}} \\ \ldots & \ldots \\ a_{s_{\nu-k},w_1}, & \ldots, a_{s_{\nu-k},w_{\nu-k}} \end{vmatrix} .\ \xi^{km} . \begin{vmatrix} \eta_{t_1,v_1}(\xi), & \ldots, \eta_{t_1,v_k}(\xi) \\ \ldots & \ldots \\ \eta_{t_k,v_1}(\xi), & \ldots, \eta_{t_k,v_k}(\xi) \end{vmatrix}, \tag{22}$$
kde $s_1, \ldots, s_{\nu-k}$ jsou právě ona čísla z posloupnosti (21), jež jsou menší než $m+1$. Druhý determinant v (22) konverguje k nule pro $\xi \to 0$. Je-li $s_1 + \ldots + s_{\nu-k} \geqq I_1 + \ldots + I_{\nu-k}$, je $s_1 + \ldots + s_{\nu-k} + mk \geqq I_1 + \ldots + I_\nu = H$, a výraz (22) jest roven $o(\xi^H)$. Je-li však $s_1 + \ldots + s_{\nu-k} < I_1 + \ldots + I_{\nu-k}$, jsou řádky $s_1, \ldots, s_{\nu-k}$ v matici (3) podle druhého tvrzení 1. pomocné věty závislé a první determinant v (22) se dokonce přímo rovná nule.

III. Zbývá vyšetřiti ony determinanty z (20), v nichž všechna l_ϱ jsou menší než $m+1$. Podle (19) máme tedy vyšetřiti součet všech výrazů
$$\begin{vmatrix} a_{l_0,0}, & \ldots, a_{l_0,\nu-1} \\ a_{l_1,0}, & \ldots, a_{l_1,\nu-1} \\ \ldots & \ldots \\ a_{l_{\nu-1},0}, & \ldots, a_{l_{\nu-1},\nu-1} \end{vmatrix} .\ \xi^{l_0+l_1+\ldots+l_{\nu-1}} \prod_{w=0}^{\nu-1} (m+1)\,.\,m\ldots(l_w - w + 1)\,, \tag{23}$$
kde čísla $l_0, l_1, \ldots, l_{\nu-1}$ probíhají hodnoty $0, 1, \ldots, m$. Je-li $l_0 + l_1 + \ldots + l_{\nu-1} > H$, je výraz (23) roven $o(\xi^H)$; je-li $l_0 + l_1 + \ldots + l_{\nu-1} < H$, je determinant v (23) roven nule. Je-li $l_0 + l_1 + \ldots + l_{\nu-1} = H$, a nevzniká-li posloupnost $l_0, l_1, \ldots, l_{\nu-1}$ z posloupnosti $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ permutací, je determinant v (23) rov-

něž roven nule podle prvního tvrzení 1. pomocné věty. Podle výsledků dosažených v I, II, III a podle (20) je tedy

$$((m+1)!)^\nu \, \xi^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)} \, \Delta_\nu(\alpha+\xi) =$$

$$= \xi^H \sum_{l_0,\ldots,l_{\nu-1}} \begin{vmatrix} a_{l_0,0}, & \ldots, & a_{l_0,\nu-1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l_{\nu-1},0} & \ldots, & a_{l_{\nu-1},\nu-1} \end{vmatrix} \prod_{w=0}^{\nu-1} (m+1)\,m \ldots (l_w - w + 1) + o(\xi^H)\,, \quad (24)$$

kde se sčítá přes oněch $\nu!$ posloupností $l_0, \ldots, l_{\nu-1}$, jež vznikají permutací z posloupnosti $I_1, \ldots, I_\nu$. Součet v (24) vpravo je zřejmě roven (viz (16))

$$\Delta \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu} \left(\pm \prod_{\varrho=1}^{\nu} (m+1)\,m \ldots (I_\varrho - \alpha_\varrho + 1) \right), \quad (25)$$

kde se sčítá přes všechny systémy $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$, vznikající ze systému $0, 1, \ldots, \nu-1$ permutací; znamení je $+$ nebo $-$ podle toho, zda permutace je sudá či lichá. Podle definice determinantu je výraz (25) roven

$$\Delta \frac{((m+1)!)^\nu}{I_1!\,I_2! \ldots I_\nu!} \begin{vmatrix} 1, & I_1, & I_1(I_1-1), & \ldots, & I_1(I_1-1)\ldots(I_1-\nu+2) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1, & I_\nu, & I_\nu(I_\nu-1), & \ldots, & I_\nu(I_\nu-1)\ldots(I_\nu-\nu+2) \end{vmatrix} \quad (26)$$

a poslední determinant je roven Vandermondovu determinantu

$$\begin{vmatrix} 1, & I_1, & \ldots, & I_1^{\nu-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1, & I_\nu, & \ldots, & I_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < k \leq \nu} (I_k - I_i)\,, \quad (27)$$

takže pravá strana v (24) je

$$\xi^H((m+1)!)^\nu \frac{\Delta}{I_1! \ldots I_\nu!} \prod_{1 \leq i < k \leq \nu} (I_k - I_i) + o(\xi^H)\,, \quad (28)$$

odkudž vzhledem k $H = I_1 + \ldots + I_\nu$ plyne (17).

Poznámka. Z věty 1 plyne ihned tento důsledek: Budiž $0 < \nu < n$. Funkce $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)$ nechť mají v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) derivaci řádu $n - 1$. Nechť matice

$$\begin{Vmatrix} f_0(x), & \ldots, & f_{m-1}(x) \\ f_0'(x), & \ldots, & f_{m-1}'(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ f_0^{(n-1)}(x), & \ldots, & f_{m-1}^{(n-1)}(x) \end{Vmatrix} \quad (M_1)$$

má v každém bodě intervalu (a, b) hodnost aspoň ν. Budiž $\mathfrak{M}$ množina oněch $x \in (a, b)$, pro něž matice

$$\begin{matrix} f_0(x), & \ldots, & f_{m-1}(x) \\ f_0'(x), & \ldots, & f_{m-1}'(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ f_0^{(\nu-1)}(x), & \ldots, & f_{m-1}^{(\nu-1)}(x) \end{matrix} \quad (M_2)$$

má hodnost menší než ν. Potom $\mathfrak{M}$ nemá hromadných bodů v (a, b).

Důkaz. Je-li dán libovolný bod α intervalu (a, b), existuje v matici (M_1) pro $x = \alpha$ jistě ν nezávislých sloupců. Podle věty 1 existuje pak $\delta > 0$ tak, že v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ neleží žádný bod množiny $\mathfrak{M}$, různý od α. Tedy není α — libovolný to bod intervalu (a, b) — hromadným bodem množiny $\mathfrak{M}$.

§ 2. Věta 2 a její důkaz.

V celém tomto paragrafu buďte splněny tyto předpoklady: Jest dán otevřený interval (a, b) a mimo to n funkcí $f_l(x)$ $(0 \leqq l \leqq n-1,\ n > 0)$, jež mají v (a, b) derivace až do řádu $n - 1$. Pro každé $x \in (a, b)$ existuje tedy matice

$$\begin{matrix} f_0(x), & \dots, & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x), & \dots, & f_{n-1}'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_0^{(n-1)}(x), & \dots, & f_{n-1}^{(n-1)}(x)\,. \end{matrix} \tag{29}$$

Existuje-li q nezávislých řádků komplexních čísel[5])

$$\begin{matrix} A_{1,0}, & \dots, & A_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{q,0}, & \dots, & A_{q,n-1} \end{matrix} \tag{30}$$

tak, že pro $1 \leqq l \leqq q$ a pro každé $x \in (a, b)$ jest

$$A_{l,0}\, f_0(x) + \dots + A_{l,n-1}\, f_{n-1}(x) = 0\,, \tag{31}$$

ale neexistuje-li $q + 1$ takových nezávislých řádků, budeme říkati, že funkce

$$f_0, f_1, \dots, f_{n-1} \tag{32}$$

mají v (a, b) stupeň závislosti q. Jest ovšem $0 \leqq q \leqq n$. Jest $q = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže platí: jsou-li $A_0, \dots, A_{n-1}$ čísla taková, že pro všechna $x \in (a, b)$ jest

$$A_0\, f_0(x) + \dots + A_{n-1}\, f_{n-1}(x) = 0\,, \tag{33}$$

jest $A_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = 0$. V tomto případě $q = 0$ se proto také říká, že funkce (32) jsou lineárně nezávislé v (a, b). Triviální a velmi známé jsou tyto dvě věty:

2. pomocná věta. *Mají-li funkce (32) v (a, b) stupeň závislosti aspoň q, má matice (29) v každém bodě intervalu (a, b) hodnost nejvýše $n - q$.*

Důkaz. Z rovnice (33) plyne derivováním soustava rovnic

$$A_0\, f_0^{(\sigma)}(x) + \dots + A_{n-1}\, f_{n-1}^{(\sigma)}(x) = 0 \quad (\sigma = 0, 1, \dots, n-1)\,, \tag{34}$$

mající matici (29). Má-li (34) q nezávislých řešení (30), má (29) hodnost nejvýše $n - q$.

---

[5]) To značí, že matice (30) má hodnost q.

3. pomocná věta. *Budiž $0 < \nu < n$. Nechť matice (29) má v každém bodě intervalu (a, b) hodnost ν. Nechť pro každé $x \in (a, b)$ jest*

$$\begin{vmatrix} f_0(x), & \dots, & f_{\nu-1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_0^{(\nu-1)}(x), & \dots, & f_{\nu-1}^{(\nu-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{35}$$

Potom mají funkcė (32) v (a, b) stupeň závislosti $n - \nu$.

Důkaz. Pro každé $x \in (a, b)$ najdu $n - \nu$ nezávislých řešení rovnic (34) takto: pro každé celé l ($\nu \leqq l \leqq n - 1$) zvolím $A_{l,l} = 1$, $A_{l,h} = 0$ pro $\nu \leqq h \leqq \leqq n - 1$, $h \neq l$ a určím $A_{l,0}, \dots, A_{l,\nu-1}$ ze soustavy ν rovnic

$$A_{l,0} f_0^{(\sigma)}(x) + \dots + A_{l,\nu-1} f_{\nu-1}^{(\sigma)}(x) + A_{l,\nu} f_\nu^{(\sigma)}(x) + \dots + A_{l,n-1} f_{n-1}^{(\sigma)}(x) = 0 \tag{36}$$

pro $\sigma = 0, 1, \dots, \nu - 1$; potom budou rovnice (36) ovšem splněny i pro $\sigma = \nu, \nu + 1, \dots, n - 1$, ježto levé strany všech rovnic (34) jsou lineárními kombinacemi prvních ν z nich. Zřejmě jsou $A_{l,h} = A_{l,h}(x)$ pro $0 \leqq h \leqq \nu - 1$ funkce proměnné x, jež jsou racionálně složeny z funkcí $f_\varrho^{(\sigma)}(x)$ ($0 \leqq \sigma \leqq \nu - 1 < n - 1$, $0 \leqq \varrho \leqq n - 1$);[6]) existují tedy derivace $A'_{l,h}(x)$. Pro $h \geqq \nu$ jsou $A_{l,h}$ dokonce konstanty. Je-li nyní $0 \leqq \sigma \leqq \nu - 1$, plyne derivováním příslušné rovnice (36)

$$A_{l,0} f_0^{(\sigma+1)} + \dots + A_{l,n-1} f_{n-1}^{(\sigma+1)} + A'_{l,0} f_0^{(\sigma)} + \dots + A'_{l,\nu-1} f_{\nu-1}^{(\sigma)} = 0 ; \tag{37}$$

užiji-li následující rovnice (36) (s hodnotou $\sigma + 1$; to lze, ježto $\sigma + 1 \leqq n - 1$), dostanu

$$A'_{l,0} f_0^{(\sigma)} + \dots + A'_{l,\nu-1} f_{\nu-1}^{(\sigma)} = 0 \text{ pro } \sigma = 0, 1, \dots, \nu - 1 . \tag{38}$$

Vzhledem k (35) plyne odtud $A'_{l,h} = 0$ pro $h = 0, 1, \dots, \nu - 1$, takže všechny funkce $A_{l,h}$ jsou konstantní. Rovnice (36) pro $\sigma = 0$ a pro $l = \nu, \nu + 1, \dots, n - 1$ nám pak ukazují, že stupeň závislosti funkcí (32) v (a, b) je aspoň $n - \nu$; že pak nemůže býti větší, plyne z 2. pomocné věty.

Poznámka. V 3. pomocné větě by ovšem místo determinantu (35) mohl býti kterýkoliv determinant, složený z prvních ν řádek a z kterýchkoliv ν sloupců matice (29). 3. pomocná věta udává vzájemně jednoznačný vztah mezi hodností matice (29) a stupněm závislosti funkcí (32) v (a, b), ovšem za těchto předpokladů:

A. Hodnost matice (29) má ve všech bodech intervalu (a, b) touž hodnotu ν.

B. Determinant (35) je v (a, b) stále různý od nuly.

Ukážeme nyní, že předpoklad B lze vynechati:

Věta 2. *Budiž $0 \leqq \nu \leqq n$. Pro každé $x \in (a, b)$ nechť má matice (29) hodnost ν. Potom mají funkce (32) v (a, b) stupeň závislosti $n - \nu$.*

---

[6]) Jmenovatelem je determinant (35).

Poznámka. Jestliže má matice (29) ve všech bodech intervalu (a, b) hodnost nejvýše ν, v některých bodech hodnost právě ν a v jiných bodech hodnost menší než ν, nemusí býti stupeň závislosti roven $n - \nu$. Příklad pro $n = 2$: budiž $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = x^2$ pro $x < 0$; $f_0(x) = x^2$, $f_1(x) = 0$ pro $x \geqq 0$. Hodnost matice (29) je zřejmě 1 pro každé $x \neq 0$, ale 0 pro $x = 0$. Funkce f_0, f_1 jsou lineárně nezávislé, t. j. mají stupeň závislosti 0 (a nikoliv 1) v každém otevřeném intervalu, obsahujícím počátek. Vskutku, platí-li rovnice $A_0 f_0(x) + A_1 f_1(x) = 0$ pro nějakou hodnotu $x_1 < 0$ a současně pro nějakou hodnotu $x_2 > 0$, je $A_0 \,.\, 0 + A_1 x_1^2 = 0$, $A_0 x_2^2 + A_1 \,.\, 0 = 0$, t. j. $A_1 = A_2 = 0$.

Důkaz věty 2. Případ $\nu = n$ je samozřejmý podle 2. pomocné věty: stupeň závislosti nemůže být kladný, tedy je roven nule. Také případ $\nu = 0$ je triviální, neboť potom pro všechna $x \in (a, b)$ je $f_0(x) = 0, \ldots, f_{n-1}(x) = 0$, což je n nezávislých lineárních relací mezi funkcemi $f_0, \ldots, f_{n-1}$, takže stupeň závislosti je n.

Předpokládejme proto v dalším $0 < \nu < n$. Napřed dokážeme toto:

Tvrzení A. Ke každému bodu $\alpha \in (a, b)$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že $a < \alpha - \delta < \alpha + \delta < b$ a že stupeň závislosti funkcí (32) v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ je roven $n - \nu$.

Budiž tedy dán bod $\alpha \in (a, b)$. Jistě existuje ν sloupců matice (29) tak, že matice sestrojená z těchto ν sloupců má v bodě α hodnost ν. Budiž to bez újmy obecnosti matice, složená z prvních ν sloupců, t. j. matice

$$\begin{matrix} f_0(x), & \ldots, & f_{\nu-1}(x) \\ f_0'(x), & \ldots, & f_{\nu-1}'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0^{(n-1)}(x), & \ldots, & f_{\nu-1}^{(n-1)}(x) \end{matrix} \tag{39}$$

Podle věty 1 existuje $\delta > 0$ tak, že v intervalu $j_1 = (\alpha - \delta, \alpha)$ a rovněž v intervalu $j_2 = (\alpha, \alpha + \delta)$ platí nerovnost (35). Podle 3. pomocné věty mají funkce (32) v j_1 i v j_2 stupeň závislosti právě $n - \nu$; položme $n - \nu = q$. Existuje tedy q nezávislých řádků komplexních čísel

$$A_{l,0}, \ldots, A_{l,n-1} \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1) \tag{40}$$

a q nezávislých řádků komplexních čísel

$$B_{l,0}, \ldots, B_{l,n-1} \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1) \tag{41}$$

tak, že pro $x \in j_1$ jest

$$A_{l,0} f_0(x) + \ldots + A_{l,n-1} f_{n-1}(x) = 0 \tag{42}$$

a pro $x \in j_2$ jest

$$B_{l,0} f_0(x) + \ldots + B_{l,n-1} f_{n-1}(x) = 0\,. \tag{43}$$

Ježto $f_\varrho(x)$ jsou spojité v (a, b), platí (42), (43) i pro $x = \alpha$. Derivováním rovnic (42) (v bodě α derivujeme zleva) a rovnic (43) (v bodě α derivujeme zprava) obdržíme rovnice

$$A_{l,0} f_0^{(\sigma)}(x) + \ldots + A_{l,n-1} f_{n-1}^{(\sigma)}(x) = 0\,, \tag{44}$$

platné pro $\alpha - \delta < x \leqq \alpha$, $0 \leqq \sigma \leqq n - 1$, a rovnice

$$B_{l,0} f_0^{(\sigma)}(x) + \ldots + B_{l,n-1} f_{n-1}^{(\sigma)}(x) = 0\,, \tag{45}$$

platné pro $\alpha \leqq x < \alpha + \delta$, $0 \leqq \sigma \leqq n - 1$. Pro $x = \alpha$ platí tedy rovnice (44) i (45); t. j. rovnice

$$C_0 f_0^{(\sigma)}(\alpha) + \ldots + C_{n-1} f_{n-1}^{(\sigma)}(\alpha) = 0 \quad (\sigma = 0, 1, \ldots, n - 1) \tag{46}$$

mají řešení (40) i (41). Ježto však matice (29) má v bodě α hodnost ν, má soustava (46) pouze $q = n - \nu$ řešení, takže každý řádek (40) je lineární kombinací řádků (41); z rovnice (43) tedy plyne, že rovnice (42) platí i pro $\alpha \leqq x < \alpha + \delta$. Rovnice (42) platí tedy pro $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$, takže funkce (32) mají v $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ stupeň závislosti aspoň $q = n - \nu$ a tedy podle 2. pomocné věty právě $n - \nu$. Tím je tvrzení A dokázáno.

Zvolme nyní pevně bod $c \in (a, b)$. Podle tvrzení A existuje $q = n - \nu$ nezávislých řádků komplexních čísel

$$C_{l,0}, \ldots, C_{l,n-1} \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1) \tag{46}$$

tak, že v jistém intervalu $(c - d, c + d)$ platí rovnice

$$C_{l,0} f_0(x) + \ldots + C_{l,n-1} f_{n-1}(x) = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1)\,. \tag{47}$$

Budiž $\mathfrak{M}$ množina oněch bodů $x \in (a, b)$, pro něž platí (47); budiž $\mathfrak{M}_0$ množina všech vnitřních bodů množiny $\mathfrak{M}$, takže $c \in \mathfrak{M}_0$. Dokážeme-li, že $\mathfrak{M}_0 = (a, b)$, bude tím zřejmě věta 2. dokázána (podle rovnic (47), platných pak v celém intervalu (a, b), bude totiž stupeň závislosti funkcí (32) v (a, b) nejméně roven $q = n - \nu$ a podle 2. pomocné věty je nejvýše roven $n - \nu$). Předpokládejme tedy, že $\mathfrak{M}_0 \neq (a, b)$. Potom existuje bod $\alpha \in (a, b)$, patřící k hranici množiny $\mathfrak{M}_0$. Podle tvrzení A existuje $\delta > 0$ tak, že $a < \alpha - \delta < \alpha + \delta < b$ a že v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ mají funkce (32) stupeň závislosti q. Existuje tedy q nezávislých řádků

$$A_{l,0}, \ldots, A_{l,n-1} \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1) \tag{48}$$

tak, že v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ jest

$$A_{l,0} f_0(x) + \ldots + A_{l,n-1} f_{n-1}(x) = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, q - 1)\,. \tag{49}$$

V intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ existuje bod γ, patřící k $\mathfrak{M}_0$; lze tedy zvoliti $\varepsilon > 0$ tak malé, že $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon) \subset \mathfrak{M}_0$, $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon) \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. V intervalu $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$ platí (47) i (49); ježto podle 2. pomocné věty mají funkce (32) v $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$ stupeň závislosti nejvýše $n - \nu = q$, je nutně každý řádek (46) lineární kombinací řádků (48), takže podle (49) platí rovnice (47) v celém intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Tedy je $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset \mathfrak{M}_0$, takže bod α nemůže patřiti k hranici množiny $\mathfrak{M}_0$, což je hledaný spor.

Резюме

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ОТ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ВОЙТЕХ ЯРНИК (Vojtěch Jarník), Прага.

(Поступило в редакцию 3/V 1954 г.)

Пусть $f_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu - 1; \nu > 0)$ — комплексная функция одной вещественной переменной, имеющая в точке α производную порядка $n - 1$ $(n > \nu)$. Предположим, что матрица (14) имеет ранг ν, такчто существуют целые числа $I_1, \ldots, I_\nu$ $(0 \leqq I_1 < I_2 < \ldots < I_\nu \leqq n - 1)$, для которых определитель $\varDelta$ [см. (16), где $a_{kl} = f_l^{(k)}(\alpha)$] отличен от нуля. Выберем $I_1, \ldots, I_\nu$ так, чтобы значение $I_1 + \ldots + I_\nu$ было минимумом*) (при соблюдении условия $\varDelta \neq 0$). Тогда имеет место (17), где $\varDelta_\nu(x)$ определен формулой (15). Существует, следовательно, такое $\delta > 0$, что $\varDelta_\nu(x) \neq 0$ для $0 < |x - \alpha| < \delta$. Отсюда легко вывести следующий результат: Если функции $f_0, \ldots, f_{n-1}$ такие, что матрица (29) имеет во всех точках промежутка (a, b) тот же самый ранг ν, то в (a, b) имеет место в точности $n - \nu$ независимых соотношений вида $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_{n-1} f_{n-1} = 0$. (Нет надобности требовать, чтобы ранг матрицы, состоящей из ν первых строк матрицы (29), был равен ν во всех точках промежутка (a, b).)

Résumé.

SUR LES FONCTIONS LINÉAIREMENT DÉPENDANTES

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

(Reçu le 3 mai 1954.)

Pour $k = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ $(\nu > 0)$ soit $f_k(x)$ une fonction complexe d'une variable réelle qui possède, au point α, une dérivée finie d'ordre $n - 1$ $(n > \nu)$. Supposons que la matrice (14) possède le rang ν; il existe donc des nombres entiers $I_1, I_2, \ldots, I_\nu$ $(0 \leqq I_1 < I_2 < \ldots < I_\nu \leqq n - 1)$ tels que la déterminante $\varDelta$ (voir (16), où $a_{kl} = f_l^{(k)}(\alpha)$) soit différente de zéro. Nous supposons $I_1, \ldots, I_\nu$ choisis de manière de rendre la somme $I_1 + \ldots + I_\nu$ minimum*) (sous la condition $\varDelta \neq 0$). Alors on a (17), où $\varDelta_\nu(x)$ est le Wronskien (15). Il existe donc un $\delta > 0$ tel que l'on ait $\varDelta_\nu(x) \neq 0$ pour $0 < |x - \alpha| < \delta$. On en déduit comme un corollaire facile le résultat suivant:

*) Это условие определяет числа $I_1, \ldots, I_\nu$ однозначно.

*) Cette condition détermine les nombres $I_1, \ldots, I_\nu$ d'une manière univoque.

Si les fonctions $f_0, \ldots, f_{n-1}$ sont telles que la matrice (29) ait, dans tous les points de l'intervalle (a, b), le même rang ν, alors il existe précisément $n - \nu$ relations linéaires indépendantes (de la forme $c_0 f_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_{n-1} f_{n-1} = 0$) valables dans toute l'étendue de l'intervalle (a, b). (Il n'est pas nécessaire d'exiger que la matrice, formée de ν premières lignes de la matrice (29), possède le rang ν dans chaque point de (a, b).)