Věra Kopecká

Pojem a existence geodetiky v metrických prostorech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 2, 162--171

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117187

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POJEM A EXISTENCE GEODETIKY V METRICKÝCH PROSTORECH

VĚRA KOPECKÁ, Praha.

(Došlo dne 15. března 1955.) DT: 519.54

Hlavním cílem tohoto článku je důkaz existence geodetiky mezi dvěma body v metrickém prostoru, jehož každá uzavřená omezená část je kompaktní (věta 4). Přitom všechny základní pomocné pojmy jsou zde definovány. Důkaz existence geodetiky spočívá na zavedení pomocné metriky, která v podstatě vyjadřuje délku hledané geodetiky.

Článek je myšlen jako úvodní k dalšímu článku, který bude pojednávat o geodetikách v jistých speciálních prostorech.

Naším prvým úkolem bude zavést jisté pojmy, se kterými budeme dále pracovat, a dokázat pro ně jisté vztahy.

Úmluva 1. Vzdálenost dvou bodů a, b v metrickém prostoru P budeme značit $|a, b|$.

Definice 1. *Křivkou φ v intervalu J* budeme nazývat spojité zobrazení intervalu J do metrického prostoru P takové, že v žádném intervalu $J_1 \subset J$ není φ konstantní.

Je-li J uzavřený interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, pak bodu $\varphi(\alpha)$ (resp. $\varphi(\beta)$) budeme říkat *počáteční* (resp. *koncový*) *bod* křivky φ.

Definice 2. Budiž φ křivka v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ $(-\infty < \alpha < \beta < +\infty)$. *Dělením D intervalu* $\langle \alpha, \beta \rangle$ nazveme každou konečnou posloupnost čísel $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$, pro kterou $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$.

Znakem $S(D) = S_\varphi(D)$ budeme značit součet

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i)\,,\ \varphi(t_{i-1})|\,.$$

Supremum všech čísel $S(D)$ pro všechna možná dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nazveme *délkou křivky* φ a tuto délku budeme značit $L(\alpha, \beta) = L_\varphi(\alpha, \beta)$.

Tedy $L_\varphi(\alpha, \beta) = \sup\limits_D S(D) > 0$.

Poznámka 1. Může ovšem být $L(\alpha, \beta) = +\infty$. Je-li $L(\alpha, \beta) < +\infty$, budeme říkat, že křivka φ má konečnou délku (v $\langle \alpha, \beta \rangle$).

Poznámka 2. Je zřejmé, že pro každou křivku φ v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ platí $L(\alpha, \beta) \geqq |\varphi(\alpha), \varphi(\beta)|$.

Věta 1. *Budiž $\alpha < \beta < \gamma$ a budiž φ křivka v intervalu $\langle\alpha, \gamma\rangle$. Potom platí $L(\alpha, \gamma) = L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma)$.*

Důkaz: Budiž D libovolné dělení intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a D' libovolné dělení intervalu $\langle\beta, \gamma\rangle$. Je tedy $S(D) + S(D') \leqq L(\alpha, \gamma)$, neboli $S(D) \leqq L(\alpha, \gamma) - S(D')$. Tato nerovnost platí při pevném D' pro všechna D, je tedy $L(\alpha, \beta) \leqq (L(\alpha, \gamma) - S(D')$ neboli $S(D') \leqq L(\alpha, \gamma) - L(\alpha, \beta)$. To platí pro všechna D', tedy je $L(\beta, \gamma) \leqq L(\alpha, \gamma) - L(\alpha, \beta)$, t. j.

$$L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma) \leqq L(\alpha, \gamma) \tag{1}$$

(přesně vzato odvození je správné jen pro $L(\alpha, \gamma) < +\infty$, ale výsledek je evidentní i pro $L(\alpha, \gamma) = +\infty$).

Naopak budiž D libovolné dělení intervalu $\langle\alpha, \gamma\rangle$ a D' dělení, které vznikne z D tím, že k němu přidáme dělicí bod β. Je pak $S(D) \leqq S(D') \leqq L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma)$ pro každé D, tedy platí

$$L(\alpha, \gamma) \leqq L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma)\,. \tag{2}$$

Z nerovností (1) a (2) plyne tvrzení naší věty.

Věta 2. *Budiž φ křivka konečné délky v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Definujme $L(\alpha, \alpha) = 0$. Pak $L(\alpha, \sigma)$ je spojitá rostoucí funkce proměnné σ pro $\sigma \in \langle\alpha, \beta\rangle$.*

Důkaz: Napřed dokážeme, že $L(\alpha, \sigma)$ je funkce rostoucí. Za tím účelem zvolme γ a δ tak, aby platilo $\alpha \leqq \gamma < \delta \leqq \beta$ a dokažme, že je $L(\gamma, \delta) > 0$. Je-li $\varphi(\gamma) \neq \varphi(\delta)$, plyne tato nerovnost ihned z poznámky 2. Je-li však $\varphi(\gamma) = \varphi(\delta)$, existuje číslo τ tak, že platí $\gamma < \tau < \delta$ a $\varphi(\gamma) \neq \varphi(\tau)$ (podle naší definice křivky není totiž zobrazení φ konstantní v žádném intervalu). Protože $\{\gamma, \tau, \delta\}$ je dělení intervalu $\{\gamma, \delta\}$, je $L(\gamma, \delta) \geqq |\varphi(\gamma), \varphi(\tau)| + |\varphi(\tau), \varphi(\delta)|$, tedy opět $L(\gamma, \delta) > 0$. Podle věty 1 je ovšem $L(\alpha, \sigma) < +\infty$ pro každé $\sigma \in \langle\alpha, \beta\rangle$, neboť křivka φ má, podle předpokladu, konečnou délku. Z věty 1 a nerovnosti $L(\gamma, \delta) > 0$ plyne dále $L(\alpha, \delta) = L(\alpha, \gamma) + L(\gamma, \delta) > L(\alpha, \gamma)$. Tím je tvrzení dokázáno.

Abychom dokázali, že funkce $L(\alpha, \sigma)$ je spojitá, zvolme číslo σ_0 tak, aby platilo $\alpha \leqq \sigma_0 < \beta$. Protože funkce $L(\sigma_0, \sigma)$, definovaná pro σ z intervalu $\langle\sigma_0, \beta\rangle$, je rostoucí, existuje $\lim\limits_{\sigma \to \sigma_0} L(\sigma_0, \sigma) = B$. Dokážeme, že je $B = 0$. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ a dále $\sigma_1 > \sigma_0$ tak, aby bylo $L(\sigma_0, \sigma_1) - B \leqq \varepsilon$ (což zřejmě je možno). Dále zvolme $\tau \in (\sigma_0, \sigma_1)$ tak, aby pro každé σ z intervalu $\langle\sigma_0, \tau\rangle$ platilo $|\varphi(\sigma), \varphi(\sigma_0)| \leqq \varepsilon$ (existence takového τ plyne ze spojitosti φ). Budiž nyní D libovolné dělení intervalu $\langle\sigma_0, \sigma_1\rangle$. Přidáním bodu τ k dělení D vznikne dělení $D' = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, kde $\tau_0 = \sigma_0$, $\tau_n = \sigma_1$ a $\tau_1 \leqq \tau$. Protože $L(\sigma_0, \tau_1) \geqq B$, platí podle věty 1 $L(\tau_1, \sigma_1) = L(\sigma_0, \sigma_1) - B - (L(\sigma_0, \tau_1) - B) \leqq \varepsilon$. Je tedy

$S(D) \leqq S(D') = |\varphi(\tau_1),\ \varphi(\tau_0)| + \sum_{i=2}^{n} |\varphi(\tau_i),\ \varphi(\tau_{i-1})| \leqq \varepsilon + L(\tau_1, \sigma_1) \leqq 2\varepsilon$ pro každé dělení D, tedy je $L(\sigma_0, \sigma_1) \leqq 2\varepsilon$. Odtud plyne snadno $\lim_{\sigma \to \sigma_0+} L(\sigma_0, \sigma) = 0$ a podle věty 1 dostaneme ihned $\lim_{\sigma \to \sigma_0+} L(\alpha, \sigma) = L(\alpha, \sigma_0)$.

Obdobně provedeme důkaz pro spojitost zleva.

Definice 3. Budiž φ křivka v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Budeme říkat, že φ *má za parametr oblouk,* platí-li $L_\varphi(\gamma, \delta) = \delta - \gamma$, kdykoli $\alpha \leqq \gamma < \delta \leqq \beta$.

Snadno nahlédneme, že na každé rektifikace schopné křivce lze zavésti parametr s tak, že tento parametr je oblouk. Přesně to vyjadřuje

Věta 3. *Budiž φ rektifikace schopná křivka v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Budiž f inversní funkce k funkci $L_\varphi(\alpha, \sigma)$ proměnné σ a položme $\psi(x) = \varphi(f(x))$ pro x z intervalu $\langle 0, L_\varphi(\alpha, \beta) \rangle$. Potom je ψ křivka v intervalu $\langle 0, L_\varphi(\alpha, \beta) \rangle$, která má za parametr oblouk.*

Důkaz: Funkce f (jejíž existenci zaručuje věta 2) zřejmě udává vzájemně jednoznačné zobrazení všech dělení intervalu $\langle 0, L_\varphi(\alpha, \beta) \rangle$ na všechna dělení intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Odtud plyne snadno, že platí $L_\psi(0, L_\varphi(\alpha, \beta)) = L_\varphi(\alpha, \beta)$. Stejně se dokáže, že platí $L_\psi(x, y) = L_\varphi(f(x), f(y)) = L_\varphi(\gamma, \delta)$, kde $L_\varphi(\alpha, \gamma) = x$, $L_\varphi(\alpha, \delta) = y$, tedy dle věty 1 $L_\psi(x, y) = L_\varphi(\alpha, \delta) - L_\varphi(\alpha, \gamma) = y - x$ (pokud $0 \leqq x < y \leqq L_\varphi(\alpha, \beta)$).

Definice 4. Nechť a, b jsou dva body z metrického prostoru P. O křivce φ v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ budeme říkat, že je *geodetickou křivkou (geodetikou) mezi body a, b,* když a (resp. b) je počátečním (resp. koncovým) bodem této křivky, a když tato křivka má ze všech křivek této vlastnosti nejmenší délku.

Naším prvým úkolem bude zaručit existenci geodetiky mezi dvěma body alespoň v některých důležitých případech. Hlavním cílem tohoto článku je důkaz této věty:

Věta 4. *Budiž U metrický prostor, jehož každá uzavřená omezená část je kompaktní (na př. uzavřená část n-dimensionálního kartézského prostoru). Lze-li dva různé body a, $b \in U$ spojit křivkou konečné délky, pak existuje v U geodetika mezi body a, b.*

Důkaz této věty vyžaduje zavedení řady pojmů a odvození několika pomocných vět.

Definice 5. Mějme metrický prostor P a kladné číslo ε. Potom *ε-řetězcem* spojujícím body a, $b \in P$ nazýváme každou konečnou posloupnost bodů $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, splňující tyto podmínky:

a) $x_i \in P$ pro $i = 0, 1, 2, \ldots, n$,

b) $|x_{i-1}, x_i| \leqq \varepsilon$ pro $i = 0, 1, 2, \ldots, n$,

c) $x_0 = a$, $x_n = b$.

Věta 5. *Budiž P souvislý metrický prostor a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak každé dva body $a, b \in P$ lze spojit jistým ε-řetězcem.*

Důkaz: Budiž R souhrn bodů z P, které lze s bodem a spojit ε-řetězcem. Pak platí:

a) R je množina otevřená v P, neboť je-li $x \in P$, je $O(x, \varepsilon) \subset R$ ($O(x, \varepsilon)$ je kulové okolí bodu x o poloměru ε),

b) R je množina uzavřená v P, neboť je-li $\{x_n\}$ posloupnost bodů z R, konvergující k bodu x, potom existuje přirozené číslo n_0 tak, že je $|x_{n_0}, x| \leqq \varepsilon$, tedy je $x \in R$.

Množina R je neprázdná (je $a \in R$), otevřená i uzavřená v P, tedy nutně $R = P$, neboť P je prostor souvislý.

Definice 6. Je-li $N = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ libovolná konečná posloupnost bodů ze souvislého metrického prostoru P, položme $|N| = \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}, x_i|$. Infimum všech čísel $|N|$, kde N probíhá všechny ε-řetězce spojující body $a, b \in P$ nazveme *ε-vzdáleností bodů a, b* a budeme ji značit $\varrho_\varepsilon(a, b)$.

Tedy $\varrho_\varepsilon(a, b) = \inf_N |N|$.

Poznámka 3. Je ovšem

$$\varrho_\varepsilon(a, b) \geqq |a, b|. \tag{3}$$

Věta 6. *ϱ_ε představuje v P jistou metriku.*

Důkaz: a) Vždy je $\varrho_\varepsilon(a, b) \geqq 0$ a $\varrho_\varepsilon(a, b) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$. (Plyne z (3) a z definice $\varrho_\varepsilon(a, b)$.)

b) Platí $\varrho_\varepsilon(a, b) = \varrho_\varepsilon(b, a)$. (Zřejmé.)

c) Pro každou trojici bodů $a, b, c \in P$ platí nerovnost $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \varrho_\varepsilon(c, b)$. (Budiž $\eta > 0$ a $N_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (resp. $N_2 = \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$) ε-řetězec spojující body a, c (resp. c, b) tak, že $|N_1| \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \frac{\eta}{2}$ (resp. $|N_2| \leqq \varrho_\varepsilon(c, b) + \frac{\eta}{2}$). Potom $N = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ je ε-řetězec spojující body a, b a platí $|N| = |N_1| + |N_2|$. Je tedy $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq |N| \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \varrho_\varepsilon(c, b) + \eta$. Tato nerovnost platí pro všechna η, tedy skutečně je $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \varrho_\varepsilon(c, b)$.)

Je tedy ϱ_ε metrikou v P.

Poznámka 4. Je zřejmé, že pro $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ platí $\varrho_{\varepsilon_1}(a, b) \geqq \varrho_{\varepsilon_2}(a, b)$. Při libovolných $a, b \in P$ existuje tedy vlastní nebo nevlastní $\lim_{\varepsilon \to 0+} \varrho_\varepsilon(a, b)$; tuto limitu označíme $\varrho(a, b)$. Je tedy $0 \leqq \lim_{\varepsilon \to 0+} \varrho_\varepsilon(a, b) = \varrho(a, b) \leqq +\infty$.

Úmluva 2. Předpokládejme až do konce tohoto pojednání, že prostor P má tyto vlastnosti:

a) P je souvislý metrický prostor, který je kompaktní (tedy P je kontinuum);

b) pro pevná $a, b \in P$ je $\varrho_\varepsilon(a, b)$ omezenou funkcí proměnné ε neboli $\varrho(a, b) < < + \infty$ pro $a, b \in P$.

Můžeme tedy vyslovit tuto definici:

Definice 7. Nechť jsou dány dva body $a, b \in P$. Potom limitu $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varrho_\varepsilon(a, b) = = \varrho(a, b)$ nazveme *vlastní vzdáleností bodů a, b*.

Poznámka 5. Je $\varrho(a, b) \geqq |a, b|$ (viz poznámku 3).

Věta 7. *Vlastní vzdálenost ϱ představuje v P metriku.*

Důkaz: a) Vždy je $\varrho(a, b) \geqq 0$ a $\varrho(a, b) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$. (Je $\varrho_\varepsilon(a, b) \geqq 0$, tedy podle poznámky 4 a definice $\varrho(a, b)$ je také $\varrho(a, b) \geqq \geqq 0$ a je-li $a \neq b$, potom je $\varrho(a, b) \geqq \varrho_\varepsilon(a, b) > 0$.)

b) Platí $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Zřejmé.)

c) Pro každou trojici bodů $a, b, c \in P$ platí nerovnost $\varrho(a, b) \leqq \varrho(a, c) + + \varrho(c, b)$. (Tuto nerovnost dostaneme okamžitě přechodem k limitě pro $\varepsilon \to 0+$ v nerovnosti $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \varrho_\varepsilon(c, b)$ (viz větu 6).)

Je tedy ϱ metrikou v P.

Poznámka 6. Metrika $\varrho(a, b)$ nemusí být ekvivalentní s metrikou $|a, b|$. Na příkladě lze ukázat, že funkce $\varrho(a, b)$ na prostoru P nemusí být omezená; též se může stát, že prostor P s metrikou ϱ je sice omezený, ale přes to není kompaktní.

Věta 8. *Budiž $\varrho(a, b) = s > 0$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, $s_1 + s_2 = s$. Pak existuje $c \in P$ tak, že platí $\varrho(a, c) = s_1$, $\varrho(c, b) = s_2$.*

Důkaz: Existenci bodu c dokážeme tak, že tento bod sestrojíme.

Budiž tedy n přirozené číslo vyhovující vztahu $\frac{1}{n} < s_2$. Položme $\eta = \frac{1}{n}$ a zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $\varepsilon < \eta$ a $s - \eta < \varrho_\varepsilon(a, b)$. Je $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq \varrho(a, b) < < s + \eta$, tedy existuje ε-řetězec $N = \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ spojující body a, b tak, že platí $s - \eta < |N| < s + \eta$. Je tedy $|N| > s - \frac{1}{n} > s - s_2 = s_1$. Rozdělme nyní N na dva řetězce $N_1^{(k)} = \{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$, $N_2^{(k)} = \{y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m\}$. Platí tedy rovnice $|N| = |N_1^{(k)}| + |N_2^{(k)}|$. S rostoucím indexem k neklesá $|N_1^{(k)}|$ a je $|N_1^{(k)}| = 0 < s_1$ pro $k = 0$, $|N_1^{(k)}| = |N| > s_1$ pro $k = m$. Existuje tedy první index k tak, že je $|N_1^{(k)}| \geqq s_1$. Je tedy $|N_1^{(k-1)}| < s_1$, a protože je $|y_{k-1}, y_k| \leqq \varepsilon$, je $|N_1^{(k)}| \leqq |N_1^{(k-1)}| + \varepsilon < s_1 + \varepsilon < s_1 + \eta$, tedy je $s_1 \leqq |N_1^{(k)}| < < s_1 + \eta$. Dále je $|N_2^{(k)}| = |N| - |N_1^{(k)}| \leqq s + \eta - s_1 = s_2 + \eta$. Označme bod y_k znakem x_n (konstrukce bodu y_k závisí na původně zvoleném n). Je pak $\varrho_\eta(a, x_n) \leqq \varrho_\varepsilon(a, x_n) \leqq |N_1^{(k)}| \leqq s_1 + \eta$, $\varrho_\eta(x_n, b) \leqq \varrho_\varepsilon(x_n, b) \leqq |N_2^{(k)}| \leqq s_2 + \eta$,

t. j. $\varrho_{\frac{1}{n}}(a, x_n) \leqq s_1 + \frac{1}{n}$, $\varrho_{\frac{1}{n}}(x_n, b) \leqq s_2 + \frac{1}{n}$. Vyberme nyní z posloupnosti $\{x_n\}$ posloupnost $\{x_{n_i}\}$ (tedy je $n_i \geqq i$), která má tyto vlastnosti:

a) existuje $c \in P$ tak, že je $\lim\limits_{i \to \infty} x_{n_i} = c$ (tomuto požadavku lze vyhovět, neboť předpokládáme, že prostor P je kompaktní),

b) platí $|x_{n_i}, c| < \frac{1}{i}$.

Potom je $\varrho_{\frac{1}{i}}(a, c) \leqq \varrho_{\frac{1}{i}}(a, x_{n_i}) + \varrho_{\frac{1}{i}}(x_{n_i}, c) \leqq \varrho_{\frac{1}{n_i}}(a, x_{n_i}) + \frac{1}{i} \leqq s_1 + \frac{1}{n_i} + \frac{1}{i} \leqq s_1 + \frac{2}{i}$. Podobně dostaneme nerovnost $\varrho_{\frac{1}{i}}(c, b) \leqq s_2 + \frac{2}{i}$. Přechodem k limitě pro $i \to \infty$ obdržíme pak nerovnosti $\varrho(a, c) \leqq s_1$, $\varrho(c, b) \leqq s_2$.

Kdyby však na příklad platilo $\varrho(a, c) < s_1$, bylo by $s = \varrho(a, b) \leqq \varrho(a, c) + \varrho(c, b) < s_1 + s_2 = s$, což je spor. Je tedy $\varrho(a, c) = s_1$, $\varrho(c, b) = s_2$.

Poznámka 7. Věta 8 platí zřejmě i pro $s_1 = 0$ nebo $s_2 = 0$.

Věta 9. *Nechť jsou dány dva různé body $a, b \in P$; jejich vlastní vzdálenost $\varrho(a, b)$ označme písmenem s. Budiž dále M spočetná část intervalu $\langle 0, s \rangle$, obsahující body 0, s. Pak existuje zobrazení φ množiny M do P takové, že platí:*

a) $\varphi(0) = a$, $\varphi(s) = b$,

b) *je-li $x, y \in M$, potom je* $\varrho(\varphi(x), \varphi(y)) = |x - y|$.

Důkaz: Srovnejme M v posloupnost $M = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, kde $a_0 = 0$, $a_1 = s$, a předpokládejme, že již máme definováno zobrazení φ množiny $M_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ ($n \geqq 1$) do P tak, že platí:

a) $\varphi(0) = \varphi(a_0) = a$, $\varphi(s) = \varphi(a_1) = b$,

b) $\varrho(\varphi(a_i), \varphi(a_k)) = |a_i - a_k|$ pro $0 \leqq i < k \leqq n$.

(Pro $n = 1$ stačí zřejmě volit $\varphi(a_0) = a$, $\varphi(a_1) = b$.)

Nyní je třeba definovat $\varphi(a_{n+1})$. To provedeme takto:

Budiž α ten z bodů x množiny M_n, pro který je rozdíl $a_{n+1} - x \geqq 0$ nejmenší (body x, pro které je $a_{n+1} - x \leqq 0$ v M existují, na př. $x = a_0$). Podobně budiž β ten z bodů x množiny M_n, pro který je rozdíl $x - a_{n+1} \geqq 0$ nejmenší ($x - a_{n+1} \geqq 0$ na př. pro $x = a_1$). Položme nyní ve větě 8 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $s_1 = a_{n+1} - \alpha \geqq 0$, $s_2 = \beta - a_{n+1} \geqq 0$, tedy $s = \beta - \alpha$. Položme dále $\varphi(a_{n+1}) = c$, kde c je bod prostoru P, o jehož existenci hovoří věta 8.

Nyní zbývá dokázat, že platí $\varrho(\varphi(a_{n+1}), \varphi(a_k)) = |a_{n+1} - a_k|$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ (pro $k = n + 1$ tato rovnice zřejmě platí).

Z věty 8 plyne, že platí $\varrho(\varphi(\alpha), \varphi(a_{n+1})) = a_{n+1} - \alpha$, $\varrho(\varphi(a_{n+1}), \varphi(\beta)) = \beta - a_{n+1}$.

Předpokládejme nejprve, že je $a_k \leqq a_{n+1}$. Je tedy $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(\beta)) = \beta - a_k$ (je $\beta \in M_n$) a $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(\alpha)) = \alpha - a_k$ (je $\alpha \in M_n$). Dále je $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(a_{n+1})) \leqq$

$\leqq \varrho(\varphi(a_k), \varphi(\alpha)) + \varrho(\varphi(\alpha), \varphi(a_{n+1})) = (\alpha - a_k) + (a_{n+1} - \alpha) = a_{n+1} - a_k$. Kdyby bylo $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(a_{n+1})) < a_{n+1} - a_k$, bylo by $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(\beta)) \leqq \varrho(\varphi(a_k), \varphi(a_{n+1})) + \varrho(\varphi(a_{n+1}), \varphi(\beta)) < (a_{n+1} - a_k) + (\beta - a_{n+1}) = \beta - a_k$, což je spor, tedy je $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(a_{n+1})) = a_{n+1} - a_k$.

Podobně provedeme důkaz pro $a_k \geqq a_{n+1}$.

Věta 10. *Nechť jsou dány dva body $a, b \in P$ a nechť je $\varrho(a, b) = s > 0$. Pak existuje zobrazení φ intervalu $\langle 0, s\rangle$ do P takové, že platí $\varrho(\varphi(x), \varphi(y)) = |x - y|$ pro $x, y \in \langle 0, s\rangle$.*

Toto zobrazení určuje křivku, která má za parametr oblouk (tedy její délka je s) a tato křivka je geodetikou mezi body a, b.

Důkaz: Budiž M hustá spočetná množina v intervalu $\langle 0, s\rangle$, která obsahuje body $0, s$. Podle věty 9 existuje zobrazení ψ množiny M do prostoru P takové, že platí:

a) $\psi(0) = a, \quad \psi(s) = b$,

b) je-li $x, y \in M$, potom je $\varrho(\psi(x); \psi(y)) = |x - y|$.

Budiž $z \in \langle 0, s\rangle$. Zvolme libovolnou posloupnost $\{x_i\}$ bodů z M takovou, že platí $x_i \to z$ (taková posloupnost existuje, neboť množina M je podle předpokladu hustá). Pak posloupnost $\{\psi(x_i)\}$ je konvergentní (je totiž $|\psi(x_i), \psi(x_k)| \leqq \varrho(\psi(x_i), \psi(x_k)) = |x_i - x_k|$, tedy je posloupnost $\{\psi(x_i)\}$ cauchyovská; prostor P je však kompaktní, a tedy úplný). Je-li $\{y_i\}$ jiná posloupnost bodů množiny M, která rovněž konverguje k bodu z, platí pro ni $\lim\limits_{i\to\infty} \psi(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \psi(y_i)$ (ze vztahu $\lim\limits_{i\to\infty} |x_i - y_i| = 0$ plyne totiž — viz poznámku 5 — $\lim\limits_{i\to\infty} |\psi(x_i), \psi(y_i)| = 0$). Položme $\varphi(z) = \lim\limits_{i\to\infty} \psi(x_i)$, kde $\{x_i\}$ je libovolná posloupnost bodů množiny M, která má limitu z. Zřejmě pro $z \in M$ je $\varphi(z) = \psi(z)$ (jednou z posloupností $\{x_i\}$ žádaných vlastností je posloupnost, pro kterou stále $x_i = z$). Vezměme nyní kladné číslo ε a dva body $u, v \in \langle 0, s\rangle$. Zvolme dále $x, y \in M$ tak, aby platilo $|u - x| \leqq \varepsilon$, $|v - y| \leqq \varepsilon$ a $|\varphi(u), \psi(x)| \leqq \varepsilon$, $|\varphi(v), \psi(y)| \leqq \varepsilon$ (lze volit x žádaných vlastností, neboť když $x_i \to u$, potom $\psi(x_i) \to \varphi(u)$ a podobně pro y). Potom platí $\varrho_\varepsilon(\varphi(u), \varphi(v)) \leqq \varrho_\varepsilon(\varphi(u), \psi(x)) + \varrho_\varepsilon(\psi(x), \psi(y)) + \varrho_\varepsilon(\psi(y), \varphi(v)) \leqq \varepsilon + \varrho(\psi(x), \psi(y)) + \varepsilon = 2\varepsilon + |x - y| \leqq 2\varepsilon + |x - u| + |u - v| + |v - y| \leqq 2\varepsilon + \varepsilon + |u - v| + \varepsilon = |u - v| + 4\varepsilon$. Pro $\varepsilon \to 0+$ dostáváme tedy $\varrho(\varphi(u), \varphi(v)) \leqq |u - v|$. Kdyby v tomto vztahu platilo znaménko nerovnosti, bylo by (předpokládejme $0 \leqq u \leqq v \leqq s$) $s = \varrho(\psi(0), \psi(s)) = \varrho(\varphi(0), \varphi(s)) \leqq \varrho(\varphi(0), \varphi(u)) + \varrho(\varphi(u), \varphi(v)) + \varrho(\varphi(v), \varphi(s)) < u + (v - u) + (s - v) = s$, což je spor. Je tedy $\varrho(\varphi(u), \varphi(v)) = |u - v|$ pro každou dvojici bodů x, y z intervalu $\langle 0, s\rangle$ a tím je zobrazení, které má požadovanou vlastnost, sestrojeno.

Protože je $|\varphi(x), \varphi(y)| \leqq \varrho(\varphi(x), \varphi(y))$ (viz (3) a definici $\varrho(a, b)$), je tím spíše $|\varphi(x), \varphi(y)| \leqq |x - y|$ (pro $x, y \in \langle 0, s\rangle$); odtud plyne ihned, že zobrazení φ je spojité (je dokonce stejnoměrně spojité). Protože, podle věty 7, je ϱ metrika, je pro $x \neq y$ také $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ (kdyby totiž bylo $\varphi(x) = \varphi(y)$, bylo by $\varrho(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$, tedy $x - y = 0$, a tedy $x = y$), tedy zobrazení φ je prosté. Z toho vyplývá, že zobrazení φ není v žádném intervalu konstantní. Podle definice 1 určuje tedy vskutku zobrazení φ křivku.

Nyní máme dokázat, že křivka φ má za parametr oblouk. Budiž tedy $u = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = v$ nějaké dělení intervalu $\langle u, v\rangle$, kde $0 \leqq u < v \leqq s$. Je $S(D) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(z_{i-1}), \varphi(z_i)| \leqq \sum_{i=1}^{n} \varrho(\varphi(z_{i-1}), \varphi(z_i)) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_{i-1}) = v - u$. Délka $L(u, v)$ křivky φ v intervalu $\langle u, v\rangle$ je supremem čísel $S(D)$ pro všechna možná dělení D. Je tedy $L(u, v) \leqq v - u$.

Naproti tomu budiž $\varepsilon > 0$ a zvolme dělení D intervalu $\langle u, v\rangle$ tak, aby bylo $|\varphi(z_{i-1}), \varphi(z_i)| \leqq \varepsilon$ (to lze vzhledem k stejnoměrné spojitosti zobrazení φ). Potom je $N = \{\varphi(z_0), \varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_n)\}$ ε-řetězec, a je $S(D) = |N| \leqq \varrho_\varepsilon(\varphi(u), \varphi(v))$. Je tedy $L(u, v) \geqq \varrho_\varepsilon(\varphi(u), \varphi(v))$. Limitním přechodem pro $\varepsilon \to 0+$ dostáváme $L(u, v) \geqq \varrho(\varphi(u), \varphi(v)) = v - u$.

Je tedy $L(u, v) = v - u$.

Zbývá dokázat, že φ je geodetikou mezi body a, b. Buď tedy ψ spojité zobrazení intervalu $\langle 0, s\rangle$ do prostoru P, které v žádném intervalu není konstantní a které splňuje vztahy $\psi(0) = a$, $\psi(s) = b$. Budiž $\varepsilon > 0$ a zvolme dělení $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ intervalu $\langle 0, s\rangle$ tak jemné, že je $|\psi(t_{i-1}), \psi(t_i)| \leqq \varepsilon$ (to lze vzhledem k stejnoměrné spojitosti zobrazení ψ). Pro délku L_ψ křivky ψ platí potom $L_\psi \geqq S(D) \geqq \varrho_\varepsilon(a, b)$ pro každé $\varepsilon > 0$, tedy je $L_\psi \geqq \varrho(a, b)$.

Pro křivku φ máme však $L_\varphi = s = \varrho(a, b)$.

Nyní již můžeme provést **důkaz věty 4**: Spojme body a, b prostoru U křivkou konečné délky, která je definovaná v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, a nechť je $L_\varphi(\alpha, \beta) = K$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Budiž Q souhrn těch bodů prostoru U, které lze spojit s bodem a křivkou, jejíž délka je nejvýše rovna číslu K. Leží tedy obraz křivky φ v množině Q. Protože obraz křivky, jakožto spojitý obraz intervalu, je množina souvislá, je množina Q souvislá. Je to také množina omezená, protože pro každé $x \in Q$ platí podle poznámky 2 nerovnost $|a, x| \leqq K$. Uzávěr $\overline{Q}$ množiny Q je tedy množina uzavřená a omezená, tedy podle předpokladu věty 4 je $\overline{Q}$ množina kompaktní a jakožto uzávěr souvislé množiny je to opět množina souvislá.

Položme $P = \overline{Q}$. Dokážeme, že prostor P splňuje předpoklady, vyslovené v úmluvě 2. Dokázali jsme již, že prostor P je kompaktní a souvislý a že je tedy splněn bod a) této úmluvy. Zvolme nyní $u \in P$ a číslo $\varepsilon > 0$. V prostoru Q existuje bod x tak, že je $|x, u| < \varepsilon$, a dále existuje v něm křivka o koncových bodech a, x a délce nejvýše rovné K. Jako v důkaze předešlé věty zjistíme, že platí $\varrho_\varepsilon(a, x) \leqq K$ a tedy $\varrho_\varepsilon(a, u) \leqq K + \varepsilon$. Odtud plyne ihned, že pro libovolné dva body u, v prostoru P platí $\varrho_\varepsilon(u, v) \leqq \varrho_\varepsilon(u, a) + \varrho_\varepsilon(a, v) \leqq 2K + 2\varepsilon$

a tedy $\varrho(u, v) \leqq 2K < +\infty$. Tím je dokázáno, že platí též bod b) úmluvy 2. Podle věty 10 existuje tedy v prostoru P geodetika mezi body a, b. Tato křivka je ovšem geodetikou mezi body a, b i v prostoru U; její délka je totiž nejvýše rovna K a každá kratší křivka, spojující body a, b v prostrou U, ležela by tedy celá v prostoru Q.

(Zároveň je vidět, že $P = Q$; pro libovolné $t \in P$ je totiž $\varrho(a, t) \leqq K$, takže podle věty 10 existuje křivka o délce nejvýše rovné K, spojující bod a s bodem t. To však znamená, že $t \in Q$.)

Резюме

ПОНЯТИЕ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Вера Копецкая (Věra Kopecká), Прага.

(Поступило в редакцю 15/III 1955 г.)

Содержанием статьи является доказательство следующей теоремы: *Пусть U — метрическое пространство, каждая замкнутая ограниченная часть которого компактна. Тогда при условии, что две различные точки a, $b \in U$ можно соединить кривой конечной длины, в U существует геодезическая между точками a, b.*

Доказательство этой теоремы опирается на лемму, которая обеспечивает существование геодезической в связном компактном метрическом пространстве P, для любых двух точек a, b которого функция $\varrho_\varepsilon(a, b) = \inf \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}, x_i|$ (где $x_i \in P$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $|x_{i-1}, x_i| \leqq \varepsilon$) является ограниченной функцией переменного $\varepsilon > 0$.

Résumé

LA NOTION ET L'EXISTENCE DE LIGNE GÉODÉSIQUE DANS LES ESPACES METRIQUES

VĚRA KOPECKÁ, Praha.

(Reçu le 15 mars 1955.)

Le contenu de l'article précédent est la démonstration du théorème suivant:

Soit U l'espace métrique dont chaque sous-espace fermé, borné, est compact: alors, si l'on peut joindre deux points distincts $a, b \in U$ par une ligne d'une longueur finie, il existe dans U une ligne géodésique entre les points a, b.

La démonstration de ce théorème est fondée sur le lemme qui garantie l'existence d'une ligne géodésique dans un espace métrique, connexe et compact P, dans lequel pour chaques deux de ses points a, b est $\varrho_\varepsilon(a, b) = \inf \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}, x_i|$ (où $x_i \in P$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $|x_{i-1}, x_i| \leqq \varepsilon$) une fonction bornée d'une variable $\varepsilon > 0$.