Otakar Leminger

O pravidelném $257$-úhelníku

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 84 (1959), No. 3, 371--373

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117315`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

RŮZNÉ

# O PRAVIDELNÉM 257-ÚHELNÍKU

OTAKAR LEMINGER, Ústí nad Labem

(Došlo dne 8. ledna 1959)

DT: 513.19

V této práci je stručně naznačena metoda, kterou lze vyjádřit velikost strany pravidelného 257-úhelníka výrazem eukleidovsky sestrojitelným.

Úloha sestrojit stranu pravidelného 257-úhelníka vepsaného do dané kružnice kružítkem a pravítkem znamená vyjádřit $\frac{2\pi}{257}$ pomocí racionálních operací a druhých odmocnin z celých čísel. Zvolíme-li $\varphi = \frac{2\pi}{257}$, pak platí $\cos k\varphi = \cos (257 - k)\varphi$ a pomocí vzorce $\cos A\varphi \cos B\varphi = \frac{1}{2} [\cos (A + B) \varphi + \cos (A - B) \varphi]$ dostáváme osm skupin identit po osmi identitách tvaru

$$\begin{aligned}
\cos p\varphi \cos 16p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 17p\varphi + \cos 15p\varphi]\,, \\
\cos 17p\varphi \cos 15p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 2p\varphi + \cos 32p\varphi]\,, \\
\cos 2p\varphi \cos 32p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 34p\varphi + \cos 30p\varphi]\,, \\
\cos 34p\varphi \cos 30p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 4p\varphi + \cos 64p\varphi]\,, \\
\cos 4p\varphi \cos 64p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 68p\varphi + \cos 60p\varphi]\,, \\
\cos 68p\varphi \cos 60p\varphi &= \tfrac{1}{2} [(\cos 8p\varphi + \cos 128p\varphi]\,, \\
\cos 8p\varphi \cos 128p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos 121p\varphi + \cos 120p\varphi]\,, \\
\cos 121p\varphi \cos 120p\varphi &= \tfrac{1}{2} [\cos p\varphi + \cos 16p\varphi]\,,
\end{aligned}$$

kde za $p$ postupně dosazujeme čísla 1, 3, 5, 7, 11, 13, 29, 37, při čemž argument se pohybuje od $\varphi$ do $128\varphi$. Šestnáctičlenné skupiny kosinů argumentů $p\varphi$, $16p\varphi$, $17p\varphi$, $15p\varphi$, $2p\varphi$, $32p\varphi$, $34p\varphi$, $30p\varphi$, $4p\varphi$, $64p\varphi$, $68p\varphi$, $60p\varphi$, $8p\varphi$, $128p\varphi$, $121p\varphi$, $120p\varphi$ mají tu vlastnost, že jakýkoliv argument od $\varphi$ do $128\varphi$ se vyskytuje v právě jedné šestnáctičlenné skupině. Každou takovouto šestnáctičlennou skupinu kosinů rozdělíme na dvě osmičlenné, každou osmičlennou na dvě čtyřčlenné a každou čtyřčlennou na dvě dvojčlenné, jak je patrno z následujícího schematu (ve schematu píšeme pouze argumenty):

$$\begin{gathered}
p\varphi,\ 16p\varphi,\ \ 2p\varphi,\ 32p\varphi,\ \ 4p\varphi,\ 64p\varphi,\ \ 8p\varphi,\ 128p\varphi\,; \\
17p\varphi,\ 15p\varphi,\ 34p\varphi,\ 30p\varphi,\ 68p\varphi,\ 60p\varphi,\ 121p\varphi,\ 120\,p\varphi\,;
\end{gathered}$$

$$\begin{array}{ll} p\varphi,\ 16p\varphi,\ 4p\varphi,\ \ 64p\varphi\ ; & 17p\varphi,\ 15p\varphi,\ \ 68p\varphi,\ \ 60p\varphi\ ; \\ 2p\varphi,\ 32p\varphi,\ 8p\varphi,\ 128p\varphi\ ; & 34p\varphi,\ 30p\varphi,\ 121p\varphi,\ 120p\varphi\ ; \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} p\varphi,\ 16p\varphi\ ; & 2p\varphi,\ \ 32p\varphi\ ; & 17p\varphi,\ 15p\varphi\ ; & 34p\varphi,\ \ 30p\varphi\ ; \\ 4p\varphi,\ 64p\varphi\ ; & 8p\varphi,\ 128p\varphi\ ; & 68p\varphi,\ 60p\varphi\ ; & 121p\varphi,\ 120p\varphi\ . \end{array}$$

Jak je ze schematu patrno, sdružují se jednotlivé skupiny kosinů do dvojic, které mají tuto vlastnost: Součet i součin součtů kosinů jednotlivých sdružených skupin je roven opět součtu součtů kosinů větších skupin (např.

$$\begin{aligned} &(\cos\varphi + \cos 16\varphi)(\cos 4\varphi + \cos 64\varphi) = \\ &= \tfrac{1}{2}[(\cos 3\varphi + \cos 48\varphi + \cos 12\varphi + \cos 65\varphi) + \\ &+ (\cos 5\varphi + \cos 80\varphi + \cos 20\varphi + \cos 63\varphi)]\,, \end{aligned}$$

takže vzniknou součty dvou čtveřic apod.).

Označíme-li nyní součet kosinů šestnáctičlenné skupiny pro $p = 1, 11, 13, 29, 7, 3, 5, 37$ postupně $A, B, C, D, E, F, G, H$, platí

$$(A + B + C + D) + (E + F + G + H) = -\tfrac{1}{2}$$

a

$$(A + B + C + D)\,.\,(E + F + G + H) = -16\,,$$ [1]

neboť vynásobením závorek vznikne, jak lze ukázat, součet všech kosinů argumentů od $\varphi$ do $128\varphi$, při čemž každý argument se vyskytne právě 32krát. To však znamená, že $Y_1 = A + B + C + D$, $Y_2 = E + F + G + H$ jsou kořeny kvadratické rovnice $Y^2 + \tfrac{1}{2}Y - 16 = 0$, takže

$$Y_1 = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{257})\,, \quad Y_2 = \tfrac{1}{4}(-1 - \sqrt{257})$$

(o znaménku odmocniny lze rozhodnouti např. přibližným numerickým výpočtem hodnot $Y_1$ a $Y_2$).

Označíme-li dále $Z_1 = A + B$, $Z_2 = C + D$, $Z_1' = E + F$, $Z_2' = G + H$, je, jak se dá zjistit, $Z_1Z_2 = Z_1'Z_2'$, při čemž v součinu se vyskytnou kosiny všech argumentů od $\varphi$ do $128\varphi$; protože je tam každý právě osmkrát, je $Z_1Z_2 = Z_1'Z_2' = -4$. Jelikož $Z_1 + Z_2 = Y_1$, $Z_1' + Z_2' = Y_2$, je $Z_1$, $Z_2$ kořenem kvadratické rovnice $Z^2 - Y_1 Z - 4 = 0$ a $Z_1'$, $Z_2'$ kořenem kvadratické rovnice $Z'^2 - Y_2 Z' - 4 = 0$, takže lze vypočíst, že

$$\begin{aligned} Z_1 &= \tfrac{1}{2}Y_1 + \sqrt{\tfrac{1}{4}Y_1^2 + 4} = \tfrac{1}{8}(-1 + \sqrt{257}) + \sqrt{[\tfrac{1}{8}(-1 + \sqrt{257})]^2 + 4}\,, \\ Z_2 &= \tfrac{1}{2}Y_1 - \sqrt{\tfrac{1}{4}Y_1^2 + 4} = \tfrac{1}{8}(-1 + \sqrt{257}) - \sqrt{[\tfrac{1}{8}(-1 + \sqrt{257})]^2 + 4}\,, \\ Z_1' &= \tfrac{1}{2}Y_2 + \sqrt{\tfrac{1}{4}Y_2^2 + 4} = \tfrac{1}{8}(-1 - \sqrt{257}) + \sqrt{[\tfrac{1}{8}(-1 - \sqrt{257})]^2 + 4}\,, \\ Z_2' &= \tfrac{1}{2}Y_2 - \sqrt{\tfrac{1}{4}Y_2^2 + 4} = \tfrac{1}{8}(-1 - \sqrt{257}) - \sqrt{[\tfrac{1}{8}(-1 - \sqrt{257})]^2 + 4}\,. \end{aligned}$$

[1]) Platí totiž obecně, že $\sum_{s=1}^{r} \cos s\,\dfrac{2\pi}{2r+1} = -\dfrac{1}{2}$.

Nyní je možno stanovit hodnoty $A, B, C, D, E, F, G, H$. Protože

$$AB = 2{,}5Y_2 + 2Z_2 + Z_1\,, \quad CD = 2{,}5Y_2 + 2Z_1 + Z_2\,,$$
$$EF = 2{,}5Y_1 + 2Z_2' + Z_1'\,, \quad GH = 2{,}5Y_1 + 2Z_1' + Z_2'\,,$$

jsou $A, B,$ $C, D,$ $E, F,$ $G, H$ postupně kořeny kvadratických rovnic

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{I}}^2 &- Z_1U_{\mathrm{I}} + (2{,}5Y_2 + 2Z_2 + Z_1) = 0\,,\\ U_{\mathrm{II}}^2 &- Z_2U_{\mathrm{II}} + (2{,}5Y_2 + 2Z_1 + Z_2) = 0\,,\\ U_{\mathrm{III}}^2 &- Z_1'U_{\mathrm{III}} + (2{,}5Y_1 + 2Z_2' + Z_1') = 0\,,\\ U_{\mathrm{IV}}^2 &- Z_2'U_{\mathrm{IV}} + (2{,}5Y_1 + 2Z_1' + Z_2') = 0\,. \end{aligned}$$

Stejnou metodou lze postupovat dále a počítat postupně součty kosinů jednotlivých osmičlenných, čtyřčlenných a dvojčlenných skupin, jakožto kořeny kvadratických rovnic s koeficienty vypočtenými pomocí racionálních operací a druhých odmocnin z kořenů předcházejících kvadratických rovnic. Potom již lze snadno vyjádřit $\cos\varphi$, neboť

$$\cos\varphi \cos 16\varphi = \tfrac{1}{2}(\cos 17\varphi + \cos 15\varphi)\,,$$

takže $\cos\varphi$ a $\cos 16\varphi$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$V^2 - (\cos\varphi + \cos 16\varphi)\,V + \tfrac{1}{2}(\cos 17\varphi + \cos 15\varphi) = 0\,.$$

Výsledný výraz pro $\cos\varphi$, který umožňuje eukleidovskou konstrukci, není možno v této krátké stati pro jeho velkou komplikovanost a délku uvést.

## LITERATURA


[1] *A. Richelot:* „De resolutione algebraica aequationis $X^{257} = 1$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata“, Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik *9* (1832), 1—26, 146—161, 209—230, 337—358.

[2] *Fr. G. Affolter:* „Zur Staudt-Schröter'schen Construktion des regulären Vielecks“, Mathematische Annalen *6* (1873), 582—591.

[3] *A. Strnad:* „O sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníka“, Časopis pro pěstován matematiky a fysiky *36* (1907), 81—86.

[4] *A. G. Školník:* „Dělení kruhu“, překlad z ruského originálu „Зазача деленнь круга“, Praha 1953.