Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

RECENSE

Richard Rychnovský: ÚVOD DO VYŠŠÍ MATEMATIKY. Celostátní učebnice matematiky pro agronomické a zootechnické fakulty vysokých škol zemědělských. Vydala Čs. akademie zemědělských věd ve Státním zemědělském nakladatelství, stran 366, cena Kčs 39,50.

V recensované knize se probírají základní poznatky z tzv. vyšší matematiky zhruba v rozsahu, v jakém se vyšší matematika přednáší na vysokých školách zemědělských. Kniha však může být vhodnou pomůckou i pro posluchače jiných vysokých škol a vůbec pro každého, kdo se chce poučit o analytické geometrii, diferenciálním a integrálním počtu a o obyčejných diferenciálních rovnicích, aniž se příliš zajímá o soustavné vybudování těchto disciplin. Pro posluchače vysokých škol, na kterých jest širší program matematiky (např. na fakultě strojní, stavební, elektrotechnické), bude sice kniha užitečná, ale nestačí svým rozsahem, jak bude patrno z dále uvedeného obsahu. Kniha má celkem 10 částí.

V první části si čtenář oživí dříve získané poznatky o reálných a komplexních číslech a o počítání s mnohočleny. Pojmu reálného čísla je však věnováno příliš málo místa. Při výkladu o mnohočlenech vychází autor z funkční definice mnohočlenů, aniž by dříve vyložil obecný pojem funkce. Kapitola o mnohočlenech činí dojem, že si autor připravuje všecko potřebné pro rozklad racionální funkce na částečné zlomky. Přesto se však integrace racionální funkce a s ní spojený rozklad racionální funkce na částečné zlomky v knize v plné obecnosti neprovádí.

V druhé a třetí části pojednává autor o analytické geometrii roviny a prostoru v klasickém pojetí. Celkem v obvyklém rozsahu je podána geometrie lineárních útvarů; postrádal jsem však zmínku o vzorci pro vzdálenost bodu od přímky (od roviny) a v části věnované analytické geometrii prostorových útvarů diskusi vzájemné polohy dvou přímek (osa mimoběžek atd.). Snad o tom mohlo být pojednáno, i když osnovy pro školy, jimž je kniha určena, tuto látku nepředpisují. U kuželoseček jsou uvedeny jejich rovnice, je-li kuželosečka v základní poloze. Z kvadratických ploch zmiňuje se autor o kuželi, válci, kulové ploše a elipsoidu.

Šestá část je věnována výkladu principu logaritmického pravítka a jeho použití.

Část čtvrtá, pátá a sedmá až devátá pojednává o diferenciálním a integrálním počtu. Od pojmu posloupnosti a funkce přechází autor k spojitosti a limitě, k derivaci a diferenciálu a diskusi grafu funkce (funkce rostoucí a klesající v intervalu, funkce konvexní a konkávní v intervalu, rozbor extrémních hodnot, inflexní body). Diferenciální počet končí větou Taylorovou. O nekonečných řadách, tím méně o řadě Taylorově kniha nepojednává. Integrální počet začíná autor teorií neurčitého integrálu, větami o integraci per partes a substitucí. Při integraci racionální funkce je probrána integrace parciálních zlomků. Je též vyložena racinalisace některých iracionálních diferenciálů. Určitý integrál zavádí autor jako společnou hodnotu horního a dolního integrálu, dokazuje větu o derivaci integrálu podle horní meze a uvádí Newton-Leibnizův vzorec. Po větách o substituci a integraci per partes pro určité integrály přechází autor k aplikacím integrálního počtu ve fyzice a chemii, k výpočtu délky rovinné křivky, obsahu rovinných obrazců, objemu rotačních těles a povrchu rotačních ploch. Z numerických metod výpočtu integrálu je vyložena metoda obdélníková, lichoběžníková a Simpsonova. O funkcích dvou proměnných pojednává autor stručněji. Po vyšetřování spojitosti a limity funkce přechází k parciálním derivacím, totálnímu diferenciálu a jeho geometrickému významu. Část devátá obsahuje také výklad pojmu implicitní funkce a výpočet jejich derivací.

Desátá část pojednává o diferenciálních rovnicích a to o rovnicích prvního řádu (rovnice se separovanými proměnnými, homogenní, lineární) a z rovnic druhého řádu jen o rovnici lineární, zejména pak o rovnici lineární s konstantními koeficienty.

Kniha končí historickými poznámkami a je k ní připojen česko-slovenský slovníček odborných termínů a jmenný a věcný rejstřík.

Na knize je patrna snaha vyhovět požadavkům moderního výkladu matematiky, nové pojmy jsou většinou zaváděny přesnými definicemi, výsledky se shrnují do jasně formulovaných vět. Výklad je stručný, ale jasný a autorovi se podařilo do poměrně malého objemu vtěsnat velké množství látky. Přitom se neomezil jen na vyslovení vět, ale na konkrétních příkladech učí čtenáře získaných poznatků používat. Předností je rovněž to, že kniha obsahuje dostatek příkladů k procvičení látky.

Kniha vychází v pěkné grafické úpravě. Má však i své nedostatky. V dalším je dosti zevrubně rozebírám, ne proto, abych knihu odsoudil, ale abych čtenáře lépe orientoval a autorovi pomohl knihu podstatně při eventuálním dalším vydání zlepšit. Autor ve snaze nepodávat neúplné, nepřesné nebo pro čtenáře příliš obtížné důkazy, celou řadu jich vynechal. Takový postup by byl jistě správný, kdyby těch vynechaných důkazů nebylo přece jenom mnoho. Nedokazuje se např. věta o přírůstku funkce, ačkoliv důkaz této základní věty není tak obtížný. Nesmí se zapomínat, že cílem výuky matematiky na vysokých školách není jen naučení některým matematickým poznatkům a jejich použití, ale i výchova k přesnému matematickému myšlení. Kniha dále trpí jistou nevyvážeností. Např. autor podrobně seznamuje čtenáře se sinusoidou, ale o tangentoidě předpokládá, že ji čtenář zná. Kniha nevyžaduje velkých předběžných znalostí, je proto překvapující, že nikde není vyložena úplná indukce, ačkoliv se jí dále užívá. Nevyvážeností je rovněž to, že bez důkazu a jakýchkoliv vysvětlivek jsou např. uvedeny: věta 2 na straně 60, věta 2 na straně 270 (které si čtenář sám lehko dokáže) právě tak, jako třeba (obtížná) fundamentální věta algebry. Není vždy vysvětleno, v čem spočívá význam věty, není objasněna role jednotlivých předpokladů, proč se věta nedokazuje atd. Také se domnívám, že nemá velkou cenu dokazovat vzorec pro derivaci funkce e^x z $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, není-li tento vzorec dříve dokázán; podobných věcí je více. Někde by bylo látku poněkud přemístit, např. větu o stejnoměrné spojitosti uvést při větách o spojitých funkcích a nikoliv až v integrálním počtu. U některých vět činí autor zbytečné předpoklady, což je málo pochopitelné, když věty nedokazuje. Tak např. ve větě 1 na straně 36 se zbytečně předpokládá $a_n \neq 0$, $n \geqq m$, ve větě 10 na straně 41 $b \neq 0$; na straně 258 ve větě 1 stačilo předpokládat $ad - bc \neq 0$ a nebylo třeba zvlášť vypichovat případ $c = 0$. Definice periodické funkce je nevhodná. Rovněž definice limity funkce na straně 152 je nešťastně zvolena; to že autor musí mít funkci definovánu v bodě, aby v tomto bodě mohl mluvit o limitě, je rozhodně nevhodné. Pravděpodobně jde dále o omyl při definici lineární diferenciální rovnice; pod autorem definovaný pojem spadají totiž velmi výrazně nelineární rovnice. V několika místech užil autor nedefinovaných pojmů nebo jich užil dříve, než je definoval; to se týká např. pojmu povrchu rotační plochy a funkce několika proměnných. V partii o diferenciálních rovnicích není podle mého soudu dostatečně přesně zaveden pojem obecného integrálu.

Historické poznámky byly pravděpodobně rozsahem omezeny na tři tiskové strany.

Potom pochopitelně nemohou být zevrubné. Přesto bych jim vytkl, že při české matematice se autor omezuje na pouhý výčet jmen. Text není všude zcela výstižný. A. J. Chinčina, který je především znám svými pracemi z teorie integrálu, počtu pravděpodobnosti, diofantických aproximací a teorie čísel, uvádí v jedné řadě s I. I. Privalovem a V. I. Smirnovem jako badatele v teorii funkcí (zřejmě v teorii funkcí komplexní proměnné) a přitom je zcela opominut M. A. Lavrentev. Zapomnělo se na matematickou francouzskou školu (N. Bourbaki) a o polské, americké a italské matematice je jen zmínka, že existuje.

V závěru bych chtěl ještě připojit tiskové chyby, které jsem při čtení zjistil (uvádím stranu a řádek shora horním indexem, řádek zdola dolním indexem):

33_7 má být φ^0 a je φ,
56_{17} má být a_1 a je a,
79_7 chybí rovnítko v rovnici $y = r \sin \varphi$,
108_5 má být $|b_n| \leqq K$ a je $|b_n| < K$,
119^{15} chybí: se užívá,
177_5 není řečeno, čemu se $\begin{Bmatrix}\varphi(x)\\ \psi(h)\end{Bmatrix}$ rovná,
186^6 má být $f'(\varphi(x))\, \varphi'(x)$ a je $f'(\varphi(x)) = \varphi'(x)$,
241^{12} má být $\int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt$ a je $\int [\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt$

a ve výkladu o numerických metodách integrace chybí absolutní hodnoty ve vzorcích pro chybu.

Rudolf Výborný, Praha

František Balada: Z DĚJIN ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKY. Vydalo SPN Praha 1959; 238 stran, cena Kčs 12,50.

Baladova kniha určená hlavně školám 1. a 2. cyklu se nikterak nesnaží o vyčerpávající přehled vývoje elementární matematiky. Jejím hlavním cílem je objasnění některých otázek, které před učitelem i žákem vyvstanou při důkladnějším probírání matematiky na jedenáctiletce. V tomto směru se kniha snaží pomoci učitelům a vyplnit mezeru v systému výchovy pedagogů matematiky, kteří mohou poslouchat přednášky z historie matematiky jen na některých z našich vysokých škol.

Autor se proto zcela správně obrátil k těm problémům, s nimiž se bude tento okruh čtenářů nejčastěji setkávat a věnoval převážnou část knihy historii jednotlivých pojmů, symbolů a teorií aritmetiky, algebry a geometrie, aniž by rozsahem přesáhl osnovu našich všeobecně vzdělávacích škol. Tyto otázky také tvoří jádro celé knihy. Aby však pomohl čtenáři při zařazení jednotlivých odstavců z historie elementární matematiky do celkového vývojového proudu, uvádí autor knihu přehlednou kapitolou, objasňující jednotlivé periody vývoje matematiky. V závěru pak připojuje ke knize stručný přehled historie matematické činnosti v českých zemích a na Slovensku (str. 205—222) současně s přehledem vývoje matematiky v Rusku a SSSR od počátku 18. století (str. 223—229).

Do oddílu *Aritmetika* zahrnul autor vedle výkladů o prvých znázorněních kvantitativní stránky vnějšího světa, o vývoji číselných soustav, o ciferných zápisech a jejich vlivu na číselné soustavy hlavně historii početních operací s přirozenými čísly. Jeho pestrý výklad vývoje jednotlivých algoritmů doplňovaný a objasňovaný četnými příklady přesvědčí čtenáře, že představa apriornosti početních operací daná mnohdy školní výukou zdaleka není oprávněná. Tento oddíl je doplněn objasněním jednotlivých etap v chápání lomených a desetinných čísel, vylíčením historického významu úměr a trojčlenek a končí krátkými odstavci o vývoji číselně teoretických úvah a axiomatisaci aritmetiky.

Několik drobných chyb v příkladech (str. 56: násobení „gelosia" má být násobenec 2783 místo uvedeného 4783; str. 51: v příkladu odčítání 824 — 735 ve 3. sloupci číslice 9 částečného výsledku je posunuta o jedno místo vlevo) si pozorný čtenář opraví sám.

V části věnované *algebře* (str. 82—127) se autor snaží ukázat, jak vznikala symbolika algebry. Autor zde mimoto dokumentuje historií vzniku záporných čísel, mocnin, odmocnin a racionálních čísel vliv algebraické problematiky na ostatní odvětví matematiky. Nejobsažnější odstavec tohoto oddílu je věnován historii rovnic. Výklad ilustrovaný velkým počtem neotřelých příkladů slovních rovnic skýtá učiteli řadu podnětů pro vyučování. Odstavcem věnovaným historii logaritmů ukončuje autor tento oddíl.

Kapitolu věnovanou *geometrii* uvádí Balada stručným objasněním vývoje geometrie od Eukleida až po Hilberta, při čemž klade zvláště důraz na vývoj axiomatické soustavy geometrie a na otázky s tím souvisící. V dalším se obrací k měřickým a konstruktivním problémům vyvěrajícím z praktických potřeb a obsaženým v řadě učebnic 17. a 18. století. Sem patří zejména odstavce věnované měření úhlů a délek a mnohoúhelníkům. Mnohonásobné zpracovávání odkazu řeckých matematiků nacházející se v různých učebnicích až do 18. století poskytuje historikům matematiky bohatý materiál různých řešení hlavních idejí řecké vědy. Odtud čerpá i Balada výklad různých důkazů Pytagorovy věty, konstruktivních aproximací délky kružnice, obsahu kruhu aj. Tato část knihy končí odstavci, v nichž autor vyzdvihuje hlavní přínosy řeckých matematiků vykonané při řešení problémů stereometrických, při měření objemů těles a v trigonometrii.

Vcelku možno říci, že Baladova kniha s úspěchem splnila svůj hlavní cíl, aby se stala pomůckou učiteli všeobecně vzdělávací školy. V tomto směru je jejím hlavním kladem, že podává vývoj jednotlivých odvětví elementární matematiky na příkladech, i když je někdy vidět, že příliš omezený rozsah práce nutil autora ke stručnosti a nedovolil mu využít všech možností. Rovněž zařazení alespoň stručných kapitol věnovaných celkovému světovému vývoji matematiky i jejímu vývoji v jedné zemi (u nás a v SSSR) dává čtenáři možnost alespoň hrubého srovnání a nutí ho k zamyšlení nad příčinami odchylného vývoje matematické činnosti v jedné zemi od hlavních celosvětových proudů. Upozorňuje tak širší okruh čtenářů, kteří se zajímají o matematiku, na souvislosti mezi vývojem společenským a vědním. Škoda, že omezený rozsah nedovolil autoru věnovat těmto ideologickým otázkám větší pozornost.

Jaroslav Folta, Praha

G. H. Hardy (†), *E. M. Wright*: EINFÜHRUNG IN DIE ZAHLENTHEORIE (Úvod do číselné teorie). Přeložil z 3. angl. vyd. *H. Ruoff*. R. Oldenbourg, München 1958; XVI, 480 str.

Dílo se těší v anglickém originálu neobyčejné oblibě, o čemž svědčí již ta okolnost, že vyšlo v třetím vydání. To vyšlo po smrti G. H. Hardyho, který byl profesorem ryzí matematiky na universitě v Cambridgi, takže úpravu a rozšíření provedl druhý ze spolupracovníků, E. M. Wright, profesor university v Aberdeenu. Dílo je úvodem do téměř všech oborů číselné teorie, která je zde pojata v tak rozsáhlém smyslu, že se do ní počítají např. i geometrie čísel a diofantické aproximace. Kniha je psána pro matematiky. V prvních 18 kapitolách není užito ničeho, čemu by neporozuměl posluchač matematiky již v prvních semestrech studia. Posledních 6 kapitol je ovšem obtížnějších, neobsahují však nic, co by přesahovalo vědomosti pokročilejšího posluchače.

Jak sami autoři v předmluvě k 1. vyd. přiznávají, jsou v knize některé mezery. Tak v ní není probírána soustavně teorie kvadratických forem, dokonce ani binárních. Autoři přitom poukazují na to, že touto látkou se s velikou obšírností zabývá řada jiných učebnic. Na tomtéž místě je také uvedeno, čím se řídil výběr látky v knize. Autoři se dali vésti svým vlastním zájmem, a co podávají, nebylo snad vybráno pro svou důležitost (ačkoli jsou to většinou věci skutečně důležité), nýbrž proto, že se jim to zamlouvalo a jiní autoři o oné látce ještě příliš mnoho nepsali. Bylo tedy předním cílem autorů napsat knihu zajímavou, knihu, která se liší od jiných knih toho druhu.

Autoři se snaží všemožně, aby čtenář získal co možná dokonalý přehled o problematice číselné teorie. Uvádějí tudíž některé věty bez důkazu v případě, že by jejich důkaz byl příliš obtížný, a rovněž uvádějí problémy dosud nerozřešené. Mimoto je každá kapitola zakončena poznámkami, v nichž je stručně podána historie probírané látky a uvedena i další literatura, pokud ji autoři považují za dostatečně podnětnou.

Uvedu nyní obsah spisu, přičemž vytýkám jen věci nejzajímavější.

Kapitola 1 a 2. *Posloupnost prvočísel*:

(1) Pojednáno o dělitelnosti (celých) čísel a o prvočíslech. Dokázána fundamentální věta číselné teorie (o jednoznačnosti rozkladu čísel v prvočinitele).

(2) Podány tři důkazy Euklidovy věty, že počet prvočísel je nekonečný. Podány nejjednodušší věty o číslech Fermatových $F_n = 2^{2^n} + 1$ a Mersenneových $M_p = 2^p - 1$ (p prvočíslo). Mezi nerozřešenými problémy týkajícími se prvočísel jsou uvedeny věty Goldbachovy: A) Sudé číslo > 4 je součtem dvou lichých prvočísel. B) Liché číslo $\geqq 9$ je součtem tří lichých prvočísel. Obecný důkaz těchto vět není dosud znám. V poznámkách uvedeno, že I. M. VINOGRADOV (1937) dokázal: B′) Každé dostatečně velké liché číslo je součtem tří lichých prvočísel. Dále uvedeno, že VAN DER CORPUT a T. ESTERMAN dokázali: A′) „Skoro všechna" sudá čísla jsou součtem dvou prvočísel. Není však vysvětleno, v jakém významu užito slov „skoro všechna" sudá čísla, ačkoli jejich užití zde není zcela běžné. Podám k tomu vysvětlení.[1]) Označme $B(x)$ počet sudých čísel $\leqq x$, která *nejsou* součtem dvou prvočísel. Pak lze dokázat pomocí metod pocházejících od Vinogradova, Linnika a Čudakova, že platí

$$\lim_{n \to \infty} B(x)/x = 0 . \tag{1}$$

Tak je vysvětlen přesný význam slov „skoro všechna" sudá čísla ve větě A′. Vzorec (1) může platit i v případě, že by existovalo nekonečně mnoho sudých čísel, která nejsou součtem dvou prvočísel.

Kapitola 3. *Fareyovy řady a věta Minkowského.* Jde tu o jistou větu Minkowského z geometrie čísel, z níž odvozeny některé důsledky.

Kapitola 4. *Iracionální čísla.* Dokázáno, že $\sqrt{2}$ a některá další algebraická čísla jsou iracionální. Dále dokázáno, že jsou iracionální čísla $\log_{10} 2$, e, π, π^2.

Kapitola 5. *Kongruence a zbytky.* Pojednáno tu také o konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku.

Kapitola 6. *Fermatova věta a její důsledky.* Uvedena tu také věta Wilsonova a pojednáno o kvadratických zbytcích (Gaussovo lema, zákon reciprocity). Podány věty ke zkoumání, zda číslo je prvočíslem, což použito pro čísla Mersenneova.

Kapitola 7. *Obecné vlastnosti kongruencí.* Pojednáno o dělitelnosti celočíselných mnohočlenů a o kongruencích pro ně s různým použitím: uveden Lagrangeův důkaz věty Fermatovy a Wilsonovy. Konečně podán důkaz von Staudtovy-Clausenovy věty (z teorie Bernoulliho čísel).

Kapitola 8. *Kongruence se složenými moduly* (lineární a vyššího stupně).

Kapitola 9. *Desetinné zlomky.*

Kapitola 10. *Řetězové zlomky* (míněny tu řetězce pravidelné).

Kapitola 11. *Aproximace iracionálních čísel čísly racionálními.* Uvedena věta Liouvilleova o aproximaci reálných algebraických čísel čísly racionálními, jíž užito k důkazu existence čísel transcendentních. Dokázáno, že čísla e a π jsou transcendentní.

Kapitola 12. *Fundamentální věta aritmetiky v $k(1)$, $k(i)$ a $k(\varrho)$.* ($\varrho = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ je třetí kořen z jednotky, $k(\vartheta)$ je těleso čísel vzniklé adjunkcí algebraického čísla ϑ k tělesu čísel racionálních). Pro celá čísla z kvadratických těles $k(i)$ a $k(\varrho)$ dokázána fundamentální věta tím, že pro ně dokázána platnost analoga Euklidova algoritmu.

Kapitola 13. *Některé diofantické rovnice.* Nejprve řešena rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ celými kladnými čísly (Pythagorovy trojúhelníky) a pak dokázána „velká věta Fermatova", že totiž rovnice $x^n + y^n = z^n$, v níž je $n > 2$, nemá „netriviální" řešení ve zvláštním případu, kdy $n = 4$ a $n = 3$. Také dokázáno, že rovnice $x^3 + y^3 = 2z^3$ má jen triviální řešení. Dokázáno dále, že existují kladná racionální čísla, která nejsou součtem dvou třetích mocnin nezáporných racionálních čísel, naproti tomu, že každé racionální kladné číslo je součtem tří třetích mocnin kladných racionálních čísel.

[1]) Viz R. D. JAMES: Bull. AMS 55, 1949, 246—266, kde také uvedena další literatura o větách A′) a B′).

Pojednáno o řešení rovnic $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$, $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$, $x^4 + y^4 = u^4 + v^4$ racionálními kladnými čísly.

Kapitola 14, 15. *Kvadratická tělesa*

(1) Po úvodních paragrafech jednajících o algebraických číslech stanoveno, kdy číslo z kvadratického tělesa $k(\sqrt{m})$ je celé, kdy je jednotkou a kdy prvočíslem takového tělesa. Stanoveny jednotky z tělesa $k(\sqrt{2})$. Na příkladu tělesa $k(\sqrt{-5})$ dokázáno, že v kvadratickém tělese neplatí nutně fundamentální věta. Platí-li v kvadratickém tělese fundamentální věta, nazývá se jednoduché, existuje-li v něm Euklidův algoritmus, nazývá se euklidovské. Každé euklidovské těleso je jednoduché. Jsou uvedena všechna m, pro něž je těleso euklidovské při záporném m, a také pro část kladných m je proveden příslušný důkaz.

(2) Stanovena prvočísla těles $k(i)$, $k(\varrho)$, $k(\sqrt{2})$, $k(\sqrt{5})$. Uvedeno Lucasovo kriterium ke zkoumání prvočíselného charakteru čísel Mersenneových M_{4n+3}. Zcela stručně pojednáno o ideálech z kvadratických těles a dokázáno, že každý ideál z jednoduchého tělesa je ideálem hlavním.

Kapitola 16. *Číselněteoretické funkce.*

Kapitola 17. *Vytvořující funkce číselněteoretických funkcí.* Jde hlavně o vytvořující funkce vyjádřené Dirichletovými řadami.

Kapitola 18. *Řád velikosti číselněteoretických funkcí.*

Kapitola 19. *Rozklady.* Jsou to znázornění čísla $n > 0$ součtem libovolného počtu celých sčítanců. Jako vytvořující funkce pro počet $p(n)$ rozkladů čísla n se osvědčuje potenční řada. Tuto funkci stanovil již L. EULER. Stanoveny různé vztahy pro $p(n)$, mezi jiným kongruence Ramanujanovy.

Kapitola 20. *Vyjádření čísla součtem dvou nebo čtyř čtverců.* Nejprve podány tři důkazy věty, kdy je možno číslo vyjádřit součtem dvou čtverců. Dále dokázána věta Lagrangeova, že každé kladné číslo n je součtem čtyř čtverců (čísel $\geqq 0$). Pak uvažováno o kvaterniónech tvaru $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ s racionálními a_0, a_1, a_2, a_3, definovány pro tento případ celé kvaternióny, zaveden pojem dělitelnosti (zleva i zprava) a uvedeny některé věty pro tento pojem. Těchto úvah užito k druhému důkazu věty Lagrangeovy. Konečně podán třetí důkaz této věty spočívající na zcela jiných základech, které vlastně patří do teorie eliptických funkcí, a určen pro celé kladné číslo počet jeho vyjádření součtem čtyř čtverců.

Kapitola 21. *Vyjádření součtem třetích a vyšších mocnin.* Snažíme-li se vyjádřit kladné číslo součtem k-tých mocnin nezáporných čísel ($k \geqq 2$), naskytá se otázka, existuje-li pro dané k nejmenší číslo $s = g(k)$, pro něž je diofantická rovnice $n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k$ při každém n řešitelná nezápornými čísly. E. WARING (1770) vyslovil bez důkazu tvrzení, že každé číslo je součtem 4 čtverců, 9 třetích mocnin, 19 čtvrtých mocnin atd. Domníval se tedy, že otázku svrchu položenou možno zodpověděti kladně. Důkaz podal více než sto let později D. HILBERT (1909). Větší význam než $g(k)$ má číslo $G(k)$. To se definuje jako nejmenší číslo S, pro něž všecka dostatečně velká čísla se dají vyjádřit součtem S nezáporných k-tých mocnin. Patrně je $G(k) \leqq g(k)$, čímž je zaručena existence $G(k)$. Platí $G(2) = g(2) = 4$, $g(3) = 9$, je však $G(3) \leqq 8$ a $G(3) \geqq 4$. Kterou z hodnot $4, 5, \ldots, 8$ má $G(3)$, není dosud známo. Pak se uvažuje o „součtech se znaménky", tj. o vyjádření v tvaru $n = \pm x_1^k \pm x_2^k \pm \pm \ldots \pm x_s^k$. Nejmenší hodnotu σ označme $v(k)$. $v(k)$ existuje pro každé k. Úloha je v jistém smyslu jednodušší než úloha Waringova, ale její řešení je snad ještě neúplnější. Výsledků použito k úvahám o dalších problémech z diofantické analyzy.

Kapitola 22. *Posloupnost prvočísel* (3). Tato kapitola byla v 3. vyd. zcela přepracována. Již v kapitole 1 je uvedena bez důkazu prvočíselná věta: Počet prvočísel $\leqq x$, $\pi(x)$, je asymptoticky roven $x/\log x$. Slabší je věta Čebyševova (1850): $\pi(x)$ je řádu velikosti $x/\log x$. Podán nejprve důkaz věty Čebyševovy a pak nově objevený „elementární" důkaz věty prvočíselné. Použito této věty na některé funkce z teorie čísel.

Kapitola 23. *Věta Kroneckerova* (z teorie diofantických aproximací). Je podán nejprve důkaz věty jednorozměrné. Pak je přistoupeno k důkazu věty vícerozměrné ve dvojí stilizaci a podán důkaz

Lettenmeyerův, Estermannův a Bohrův. Konečně je dokázána věta, že při iracionálním ϑ jsou body $(n\vartheta)$ $((x) = x - [z])$ na úsečce $(0, 1)$ stejnoměrně rozloženy.

Kapitola 24. *Geometrie čísel.* Je to úvod do této teorie, která byla založena H. MINKOWSKÝM. Vychází se při tom z věty Minkowského uvedené v kapitole 3 a jejího rozšíření na prostor n-rozměrný.

Dodatek: *O dvojicích prvočísel.* Ačkoli není ani známo, existuje-li nekonečně mnoho dvojic prvočísel $p, p + 2$, je provedena úvaha, vedoucí k domněnce, že platí vzorec

$$P_2(x) \sim 2C_2 x/(\log z)^2 ,$$

kde $P_2(x)$ značí počet dvojic, v nichž je $p \leqq x$ a

$$C_2 = \prod_{p \geqq 3} \left(1 - \frac{1}{p - 1)^2}\right).$$

Karel Rychlík, Praha

Erwin Kreyszig: DIFFERENTIALGEOMETRIE. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., Leipzig 1957, stran IX + 421. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Band 25.)

Kniha obsahuje základy diferenciální geometrie v trojrozměrném eukleidovském prostoru vykládané tensorovou metodou. Od většiny podobných knih se Kreyszigova kniha liší svou přesností. Po této stránce se kniha vyrovná moderním učebnicím diferenciálního počtu. Pouze v několika paragrafech, které mají zřejmě jen informativní charakter, autor užívá pojmů, jež zcela přesně nedefinuje, nebo uvádí věty jen s neúplnými důkazy (např. § 16, § 54, § 55). Nejprve uveďme stručný obsah recensované knihy:

Kap. 1. *Předběžné poznámky, pomocné prostředky.* V této kapitole se zavádí symbolika a vykládají se některé věci, které se v knize budou předpokládat, např. vektorový počet.

Kap. 2. *Teorie křivek.* Definuje se křivka, její oblouk, tečna, oskulační rovina apod. Odvozují se Frenetovy vzorce. Definuje se styk křivek, oskulační koule, přirozené rovnice křivek. Kapitola končí studiem evolut a evolvent a Bertrandových dvojic křivek.

Kap. 3. *Pojem plochy. První základní forma. Základy tensorového počtu.* V této kapitole se vyšetřují základní vlastnosti plochy a buduje se tensorový počet. Nakonec se definuje plošný obsah a vyšetřují se některé vlastnosti tohoto pojmu.

Kap. 4. *Druhá základní forma. Gaussova a střední křivost plochy.* Definuje se druhá základní forma. Vyšetřují se křivosti křivek na ploše. Dokazuje se, že všechny křivky na ploše procházející společným bodem A a mající v bodě A touž oskulační rovinu (různou od tečné roviny plochy) mají v bodě A stejnou křivost. Stačí se tedy omezit na rovinné řezy plochy. Dokazuje se, že středy křivosti všech křivek na ploše jdoucích pevným bodem a majících v tomto bodě společnou tečnu leží na kružnici. Definuje se normální křivost, dále asymptotické směry jako směry, ve kterých je normální křivost nulová, a hlavní směry jako směry, ve kterých má normální křivost lokální extrém. Definuje se Gaussova a střední křivost plochy, eliptické, hyperbolické a parabolické body. Vyšetřuje se tvar plochy v okolí těchto bodů. Definují se Christoffelovy symboly tímto způsobem: Nechť plocha má vyjádření $\boldsymbol{x}(u^1, u^2)$. Potom $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2}$ leží v její tečné rovině a $\boldsymbol{f}$ budiž jednotkový normální vektor. Můžeme psát

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u^\mu \partial u^\nu} = \Gamma^\gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^\gamma} + b_{\mu\nu} \boldsymbol{f} .$$

Snadno se zjistí, že $b_{\mu\nu}$ jsou koeficienty druhé základní formy a $\Gamma^\gamma_{\mu\nu}$ jsou veličiny, které jsou nazvány Christoffelovými symboly. Vyšetřují se vlastnosti Christoffelových symbolů, zavádí se Riemannův tensor. Dokazuje se, že Gaussova křivost plochy závisí jen na první, nikoliv na druhé základní formě.

Dále se vyšetřuje tento problém: Jsou dány tensory $g_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$. Jaké vztahy musejí splňovat, aby existovala plocha, která má první základní tensor $g_{\mu\nu}$ a druhý základní tensor $b_{\mu\nu}$?

Kap. 5. *Geodetická křivost. Geodetické čáry.* Definuje se geodetická křivost a geodetické čáry jako křivky mající nulovou geodetickou křivost. Dokazuje se, že nejkratší spojnice dvou bodů na ploše je geodetická čára. Studují se některé speciální souřadnice na ploše, totiž geodetické souřadnice a geodetické polární souřadnice. Nakonec se uvádí několik vět z globální geometrie.

Kap. 6. *Zobrazení.* Studují se zobrazení dvou ploch na sebe, a to hlavně isometrické zobrazení, konformní zobrazení a zobrazení zachovávající plošný obsah. Vyšetřuje se řada speciálních případů, hlavně isometrické zobrazení plochy na rovinu a zobrazení kulové plochy na rovinu.

Kap. 7. *Absolutní derivování a paralelní přenos.* V první polovině této kapitoly se definuje absolutní derivace tensoru, vyšetřují se její vlastnosti a zjišťuje se, kdy je pořadí derivování záměnné. Druhá část kapitoly je věnována paralelnímu přenosu vektorů. Definuje se nejprve, že vektor se paralelně přenáší po geodetické čáře, má-li konstantní velikost a svírá-li s tečnou této geodetické čáry konstantní úhel. Pak se poněkud umělým a negeometrickým způsobem definuje paralelní přenos po libovolné křivce. Ukazuje se, že dotýkají-li se dvě plochy podél křivky, pak paralelní přenos po této křivce nezávisí na tom, na které z obou ploch je prováděn. Dále se ukazuje, že paralelní přenos je invariantní vzhledem k isometrickému zobrazení a že paralelní přenos v rovině je obyčejné rovnoběžné posunutí. Odtud plyne, že paralelní přenos se dá definovat pomocí paralelního přenosu na rozvinutelné ploše, která se dotýká uvažované plochy podél křivky, po které se vektor přenáší.

Kap. 8. *Speciální plochy.* V této kapitole se studují minimální plochy, rozvinutelné plochy, plochy s konstantní Gaussovou křivostí a některé jiné speciální plochy. Minimální plochy se definují jako plochy s nulovou střední křivostí. Dokazuje se, že plocha, která má ze všech ploch ohraničených danou křivkou minimální plošný obsah, je nutně minimální plocha. Rozvinutelné plochy, které byly studovány již v kap. 6, se zde studují jako obálky jednoparametrického systému rovin. Velmi podrobně jsou tu studovány plochy s konstantní Gaussovou křivostí. Je studováno jejich isometrické a geodetické zobrazení, rotační plochy s konstantní Gaussovou křivostí a souvislost těchto ploch s neeuklidovskou geometrií.

Kreyszigova kniha je příkladem toho, že i diferenciální geometrii je možno budovat s přesností obvyklou v jiných oborech matematiky. Autor např. ve znění vět vždy uvádí předpoklady o hladkosti příslušných funkcí; důkazy jsou prováděny přesně bez nejasných infinitesimálních úvah, je vždy přesně rozlišeno, které úvahy se provádějí v reálném a které v komplexním oboru (většina úvah se provádí v reálném oboru).

Nakonec bych upozornil na některá nedopatření a nejasnosti. Na str. 50 dole v důkazu věty 15.1 nemusí být vždy $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = \sin \alpha_0$, nýbrž může být také $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = -\sin \alpha_0$. „Flächenstück" nemusí být vždy topologickým obrazem rovinné oblasti, jak se tvrdí na str. 91, 12. ř. zdola. Úvahy na str. 130 dole platí jen tehdy, je-li jakobián transformace kladný. Na str. 186 není možno při důkazu věty 48.1 použít vzorce (45.1'), neboť při jeho odvozování byly vyloučeny kruhové body. Na str. 216 autor sice upozorňuje na to, že je rozdíl mezi plochami isometrickými a plochami na sebe rozvinutelnými, ale hned na téže stránce při definici vnitřních vlastností plochy tyto pojmy nerozlišuje. V kap. 7 jsou absolutní derivace i paralelní přenos zaváděny značně umělým způsobem. Zavedení absolutní derivace se odůvodňuje tím, že chceme definovat derivování tak, aby derivace vektoru nebo tensoru byl opět vektor nebo tensor a aby v případě roviny vedlo na obyčejné derivování. To by ovšem šlo uskutečnit i jinak než vzorcem (70.3). Jak již bylo řečeno na začátku, několik paragrafů informativního charakteru není psáno s tou přesností, kterou se vyznačuje jinak celá kniha; bylo by snad dobře na to v knize výslovně upozornit.

Kniha je psána velmi srozumitelně a dá se číst bez velké námahy. Výjimku činí několik paragrafů, kde jsou důkazy dělány poněkud stručněji, takže si čtenář musí sám mnoho doplňovat (např. § 52, § 53). Velkou předností knihy je, že obsahuje řadu cvičení s konkretními příklady.

Miloslav Jůza, Praha

Werner Kramer: DARSTELLENDE GEOMETRIE I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959, str. 188, obr. 221 (cena v ČSSR Kčs 27,60 váz.).

V tomto díle je pojednáno výhradně o pravoúhlém promítání na jednu příp. více průměten. Obsahově je kniha rozdělena do tří částí.

V první části je proveden podrobný výklad o pravoúhlém promítání na jednu průmětnu. Přitom autor používá místo u nás obvyklé kóty bodu (vyjádřené zpravidla číselně) úseček, tzv. výšek, které vynáší na zvolené přímce od pevně daného počátku s nulovou výškou. Tento způsob výkladu je použit také v knize G. SCHEFFERS, Darstellende Geometrie I (1. vyd. z roku 1919), která byla asi vzorem pro autorovu knihu. V uvedeném druhu promítání jsou řešeny nejdříve základní úlohy polohy a nejjednodušší úlohy metrické, přičemž se čtenář seznámí s invariantností dělicího poměru bodů na dané přímce a se zvláštním případem osové afinity. Jako technická aplikace je uvedeno teoretické řešení střech (rovinami stejných i různých spádů), určování výkopů a násypů v tzv. školním terénu (tj. v terénu, který je složen z jedné či více rovin) a konstrukce slunečních hodin. Po určení pravoúhlého průmětu kružnice a z něho plynoucích vlastností a konstrukcí elipsy je provedeno zobrazení rotačního válce a kužele, načež je dokázána věta Quetelet-Dandelinova pro eliptický řez na rotačním válci. Po zobrazení kulové plochy a řešení některých úloh o kulové ploše je ukázána aplikace v zeměpise a astronomii.

Druhá část obsahuje pravoúhlé promítání na více průměten, z nichž vždy dvě jsou k sobě kolmé. V něm jsou opět řešeny nejdříve tytéž úlohy jako v první části; aplikací konstrukce průsečíků přímek s rovinami příp. průsečnic rovin je určení průniku dvou jehlanů nebo jehlanu a hranolu příp. dvou hranolů. Po stanovení průmětů kružnice je tohoto výsledku užito při zobrazení kruhového kužele, válce a kulové plochy.

V třetí části se autor zabývá rovinnými řezy rotačního kužele a jejich pravoúhlými průměty; je tu nejprve provedena obvyklým způsobem klasifikace kuželoseček. Potom je vždy dokázána věta Quetelet-Dandelinova pro příslušný řez a v případě parabolického a hyperbolického řezu jsou uvedeny další ohniskové příp. metrické vlastnosti uvažované kuželosečky. Závěrem je provedeno rozvinutí pláště rotačního válce příp. rotačního kužele do roviny.

Kniha je určena hlavně studujícím vysokých i odborných škol, najdou v ní však mnoho užitečného i učitelé, vyučující na nižších stupních. Je napsána tak, že předpokládá pouze znalosti základních vět ze stereometrie a může proto dobře posloužit i u nás při studiu deskriptivní geometrie zejména na stavebních fakultách. Pro jiné fakulty právě vzhledem k uvedeným aplikacím (vyloženě stavebním příp. zeměměřickým) se nezdá být vhodná. Jejím značným kladem je 170 úloh uvedených v textu (z nichž jen malá část není řešena a to jen proto, že celé řešení je obvykle obsaženo buď přímo v předešlém výkladu či některé předcházející úloze nebo je součásti následující úlohy). Velmi účelné je přitom spojení s analytickou geometrií při definicích, vlastnostech a konstrukcích kuželoseček.

Karel Drábek, Praha

DALŠÍ VYDANÉ KNIHY

Fritz Bewert: MATEMATIKA VE STAVEBNICTVÍ. Z německého originálu přeložil a doplnil *Josef Bartůněk*, vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1960; stran 492, obrázků 295, cena váz. výtisku Kčs 38,50.

Kniha obsahuje výklad běžných částí elementární matematiky, analytické geometrie rovinné a základů vyšší matematiky v rozsahu učiva probíraného na stavebních průmyslovkách. V každé části jsou uvedeny řešené příklady týkající se vyložené látky.

Kniha je psána jako příručka pro dělníky a mistry pracující ve stavebnictví, kteří chtějí dále zvyšovat svou kvalifikaci a připravit se na odborné studium, jakož i pro absolventy průmyslových škol k opakování a doplnění matematického učiva probíraného ve škole.

Podrobnou recensi knihy najde čtenář v časopise „Aplikace matematiky“, 1961, č. 1.

Redakce