František Sedlák; Ladislav Kosmák
Studie Fokály. II.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 352--357

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117367`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

STUDIE FOKÁLY, II

FRANTIŠEK SEDLÁK, Praha a LADISLAV KOSMÁK, Brno

(Došlo 28. května 1960)

Práce navazuje na první část studie a jsou v ní podány jednoduché důkazy dalších vět o fokále.

5. Rovnice fokály. Nechť je dána jednoduchá*) skupina čtyř přímek, v níž A_1, A_2 a A_3, A_4 jsou dva páry protějších vrcholů, a nechť úsečky A_1A_2, A_3A_4 jsou základní úsečky dvou libovolně orientovaných podobných svazků kružnic. Zvolme v afinní rovině pravoúhlou souřadnicovou soustavu a označme $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ jednotkové vektory s počátečním bodem v počátku souřadnic a s koncovými body (u_1, v_1) resp. (u_2, v_2), souhlasně rovnoběžné s orientovanými osami daných svazků kružnic. Dále označme $S_1 = (s_1, t_1)$ resp. $S_2 = (s_2, t_2)$ střed úsečky A_1A_2 resp. A_3A_4, a nechť je $c = d_2/d_1$, kde $d_1 = \overline{A_1A_2}$, $d_2 = \overline{A_3A_4}$. Pak středy sobě odpovídajících kružnic daných svazků jsou body

$$P_1(r) = S_1 + \boldsymbol{u}_1 \,.\, r\,, \quad P_2(r) = S_2 + \boldsymbol{u}_2 r \,.\, c\,, \tag{1}$$

kde r nabývá všech reálných hodnot. Označíme-li $X(r) = (x, y)$ průsečík sobě odpovídajících kružnic o středech $P_1(r) = (p_1, q_1)$, $P_2(r) = (p_2, q_2)$, pak platí

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = \frac{d_1^2}{4} + r^2\,, \quad (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 = \frac{d_2^2}{4} + r^2c^2\,,$$

a tedy vzhledem k (1)

$$(x - s_1)^2 + (y - t_1)^2 - 2r[(x - s_1)\,u_1 + (y - t_1)\,v_1] = \frac{d_1^2}{4}\,,$$

$$(x - s_2)^2 + (y - t_2)^2 - 2rc[(x - s_2)\,u_2 + (y - t_2)\,v_2] = \frac{d_2^2}{4}\,.$$

Vyloučením parametru r dojdeme k rovnici tvaru

$$f(x, y) = k_1x^3 + k_2x^2y + k_3xy^2 + k_4y^3 + k_5x^2 + k_6xy + k_7y^2 + k_8x + k_9y + k_{10} = 0\,, \tag{2}$$

*) Tj. taková, že žádné tři z daných čtyř přímek neprocházejí týmž bodem ani nejsou navzájem rovnoběžné; viz [1], odst. 2.

v níž

$$
\begin{aligned}
(3)\quad k_1 &= k_3 = cu_2 - u_1\,,\\
k_2 &= k_4 = cv_2 - v_1\,,\\
k_5 &= u_1s_1 + 2u_1s_2 + v_1t_1 - c(u_2s_2 + 2u_2s_1 + v_2t_2)\,,\\
k_6 &= 2[u_1t_2 + v_1s_2 - c(u_2t_1 + v_2s_1)]\,,\\
k_7 &= u_1s_1 + 2v_1t_2 + v_1t_1 - c(u_2s_2 + 2v_2t_1 + v_2t_2)\,,\\
k_{10} &= c\left(s_1^2 + t_1^2 - \frac{d_1^2}{4}\right)(s_2u_2 + t_2v_2) - \left(s_2^2 + t_2^2 - \frac{d_2^2}{4}\right)(u_1s_1 + v_1t_1)\,.
\end{aligned}
$$

Jestliže tedy není $k_1^2 + k_2^2 = 0$, je křivka $f(x, y) = 0$ třetího stupně. Je-li $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, je $\boldsymbol{u}_1 = c\boldsymbol{u}_2$; protože však $|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = 1$ a $c > 0$, musí být $c = 1$ a $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$. V tomto případě jsou tedy základní úsečky rovnoběžné a stejně dlouhé a svazky kružnic jsou souhlasně orientovány. Vzhledem k tomu, že pak

$$k_5k_7 - \left(\frac{k_6}{2}\right)^2 = -\,[(s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2] < 0\,,$$

je křivka $f(x, y) = 0$ kuželosečka typu hyperboly. Křivka f vždy prochází body $A_1, \ldots, A_4$; je-li f složená kuželosečka, musí tedy být tvořena diagonálami A_1A_3 a A_2A_4. Snadno se však zjistí, že průsečík těchto diagonál leží na křivce f jen tehdy, když jsou diagonály navzájem kolmé. Obráceně, když se diagonály protínají kolmo, je jejich průsečík vždy bodem křivky f (jakožto průsečík kružnic opsaných nad základními úsečkami jako průměry). Každá z diagonál A_1A_3, A_2A_4 pak protíná kuželosečku f ve třech bodech a musí tedy být její komponentou.

Označme F křivku třetího stupně o rovnici $F(x, y, z) = 0$, která odpovídá křivce f v projektivní rovině; je-li f kuželosečka, rozumíme pod F křivku složenou z f a z přímky $z = 0$. Z (3) plyne, že F obsahuje průsečík A_5 přímek A_1A_2 a A_3A_4; stačí zvolit souřadnicovou soustavu tak, aby bod A_5 měl homogenní souřadnice $(0, 0, 1)$. Často bude výhodné studovat místo f křivku F, která je vždy třetího stupně a na niž lze přenést pojmy a věty týkající se křivek třetího stupně (viz např. [3], [4]).

Na základě předchozích úvah můžeme tedy vyslovit větu:

Věta 5.1. *Je-li jednoduchá skupina čtyř přímek regulární, pak fokála f jí určená je křivka třetího stupně; v opačném případě, kdy přímky skupiny omezují rovnoběžník, je fokála kuželosečka typu hyperboly, která degeneruje právě tehdy, když zmíněný rovnoběžník má kolmé úhlopříčky.*

6. Protější body fokály. Z definice fokály jako průseku svazků kružnic plyne, že libovolné dva páry protějších vrcholů skupiny se z každého dalšího bodu fokály promítají osově symetrickou čtveřicí přímek; pomocí vět 2.1 a 3.3 se zjistí, že jedna osa symetrie půlí úhly sevřené páry promítacích přímek procházejících protějšími vrcholy dané skupiny. Lze dokázat, že tato vlastnost je pro body fokály charakteristická. Platí tedy:

Věta 6.1. *Fokála určená jednoduchou skupinou přímek* $\mathbf{P}$ *je vytvořena právě těmi body, z nichž se dvojice protějších vrcholů této skupiny promítají osově symetrickou skupinou přímek, jejíž jedna osa půlí úhly přímek procházejících protějšími vrcholy skupiny* $\mathbf{P}$.

Poznámka. Z vlastností rovnoběžných tečen kuželoseček, tečen paraboly a asymptot hyperboly plyne, že věta zůstává v platnosti i pro nevlastní body fokály, přeneseme-li do projektivní roviny pojem protějších bodů z odst. 2; v tomto případě zároveň objasňuje věta definici křivky F.

Na základě věty 6.1 dokážeme tuto důležitou větu:

Věta 6.2. *Fokálu lze určit kteroukoliv jednoduchou čtveřicí přímek s protějšími vrcholy ve dvou párech ohnisek kuželoseček dotýkajících se všech přímek dané skupiny.*

Důkaz. Nechť P_1, P_2 a Q_1, Q_2 jsou ohniska kuželoseček, které se dotýkají přímek dané jednoduché čtveřice $\mathbf{P}_1$, a nechť tyto body jsou protějšími vrcholy jednoduché skupiny $\mathbf{P}_2$. Nejprve dokážeme:

a) Existuje jednoduchá čtveřice $\mathbf{P}'$, která má s $\mathbf{P}_1$ společný jeden pár protějších vrcholů a má další dva protější vrcholy buďto v P_1, P_2 nebo Q_1, Q_2.

Kdyby tomu tak nebylo, musely by body P_1, P_2 ležet na dvou různých diagonálách skupiny $\mathbf{P}_1$ a spojnice P_1P_2 by musela procházet vrcholem skupiny, který neleží na zmíněných diagonálách; totéž by platilo pro body Q_1, Q_2. Pak by na některé diagonále musely ležet čtyři navzájem různé body fokály F_1 odpovídající skupině $\mathbf{P}_1$, takže by tato diagonála musela být komponentou fokály. Snadno se však ověří, že platí: Diagonála skupiny $\mathbf{P}_1$ je komponentou příslušné fokály F_1 právě tehdy, je-li osou symetrie skupiny $\mathbf{P}_1$.

Je-li nyní některá diagonála skupiny $\mathbf{P}_1$ osou symetrie této skupiny a prochází-li jedním z bodů P_1, P_2 nebo Q_1, Q_2, musí procházet i druhým; to je však spor, neboť tyto body leží na různých diagonálách. Není-li $\mathbf{P}_1$ osově symetrická, neleží na žádné diagonále víc než tři body fokály (jinak by diagonála byla komponentou fokály a tedy osou symetrie skupiny), což je spor.

b) Podle známé věty o kuželosečkách platí: Tečny vedené daným bodem ke kuželosečce a spojnice tohoto bodu s ohnisky tvoří osově souměrnou čtveřici přímek, jejíž jedna osa odděluje ohniska i tečny.

c) Označme F', F_2 fokály odpovídající v projektivní rovině skupinám $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}_2$.

Nechť $\mathbf{P}_1$ obsahuje dva páry rovnoběžek. Pak $\mathbf{P}_1$ je středově souměrná a zřejmě i $\mathbf{P}'$ je tvořena dvěma páry rovnoběžek. Křivky F_1, F' mají společnou nevlastní přímku; označme H_1, resp. H' jejich další komponentu. Dále označme A_1, A_3 a A_2, A_4 protější vrcholy skupiny $\mathbf{P}_1$ a nechť A_1, A_3 a P_1, P_2 jsou protější vrcholy skupiny $\mathbf{P}'$. Kuželosečka H_1 prochází body P_1, P_2; z věty uvedené sub b) a z věty 6.1 plyne, že body A_2, A_4 leží na křivce H'. Kuželosečky H_1, H' tedy splývají, neboť mají šest společných bodů.

Nechť za druhé $\mathbf{P}_1$ je regulární. Pak z rovnice (2) plyne, že na F_1 leží jediný reálný nevlastní bod o souřadnicích $(-k_2, k_1, 0)$. Jestliže tedy skupiny $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}'$ nemají společný nevlastní vrchol, může nejvýš jedna z nich obsahovat jednu dvojici rovnoběžek.

Z věty uvedené v části b) a z věty 6.1 plyne, že křivka F' prochází všemi vrcholy skupiny $\mathbf{P}_1$ (včetně event. nevlastního); přitom dvojice vlastních protějších vrcholů skupiny $\mathbf{P}_1$ jsou ohniska kuželoseček dotýkajících se přímek skupiny $\mathbf{P}'$. Opět podle věty b) spojnice libovolného vrcholu skupiny $\mathbf{P}'$ s dvěma páry protějších vrcholů skupiny $\mathbf{P}_1$ tvoří tedy osově symetrickou skupinu vyhovující podmínkám věty 6.1, takže podle této věty také všechny vrcholy skupiny $\mathbf{P}'$ leží na F_1. Křivky F_1, F' mají tedy 10 společných bodů, takže jsou totožné.

Snadno se nahlédne, že body Q_1, Q_2 jsou ohniska kuželosečky, která se dotýká přímek skupiny $\mathbf{P}'$; stačí spojit tyto body s dvěma protějšími vrcholy společnými skupinám $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}_2$ a použít věty uvedené sub b). Předchozí úvahu lze tedy opakovat pro skupiny $\mathbf{P}'$ a $\mathbf{P}_2$. Tím je věta 6.2 dokázána.

Pojem protějších bodů tedy nezávisí na volbě skupiny přímek, která fokálu určuje. Z vět 6.1 a 6.2 plyne, že dvojice protějších bodů se z libovolného bodu A dané fokály promítají osově symetrickým systémem přímek; osu symetrie, která odděluje páry protějších bodů, nazveme hlavní osa v bodě A a označíme o_A.

Význačnou vlastnost má bod fokály, který je protější k jejímu nevlastnímu bodu. Platí totiž:

Věta 6.3. *Má-li fokála F jediný nevlastní bod a je-li P bod k němu protější, pak součin vzdáleností bodu P od dvojic protějších bodů fokály je konstantní.*

Důkaz. Nechť A, A', B, B' a C, C' jsou dvojice protějších vrcholů jednoduché skupiny $\mathbf{P}$, která určuje danou fokálu, a nechť žádný z těchto bodů nesplývá s P. Skupina $\mathbf{P}$ zřejmě pak neobsahuje rovnoběžky a bod P je ohniskem paraboly určené čtyřstranem $\mathbf{P}$. Podle známé věty je tedy bod P průsečíkem čtyř kružnic opsaných trojúhelníkům, tvořeným vždy třemi přímkami skupiny $\mathbf{P}$. Nechť k_1, k_2 jsou dvě z těchto kružnic a nechť k_1 prochází vrcholy A, A', C, kružnice k_2 vrcholy B, B', C; zvolme označení tak, že ve vrcholu C se protínají přímky AB' a $A'B$. Pak z vlastností obvodových úhlů na kružnici plyne, že $\sphericalangle PAA' = \sphericalangle PB'B$ a $\sphericalangle PBB' = \sphericalangle PA'A$, takže trojúhelníky PAA' a PBB' jsou si podobné a platí

$$\overline{PA} : \overline{PB'} = \overline{PB} : \overline{PA'}\,, \quad \text{takže} \quad \overline{PA} \,.\, \overline{PA'} = \overline{PB} \,.\, \overline{PB'}\,.$$

Vzhledem k libovůli ve volbě skupiny $\mathbf{P}$ je tím věta 6.3 dokázána.

7. Dvojnásobné body. Rozbor speciálních případů.

Věta 7.1. *Vlastní bod fokály určené jednoduchou skupinou* $\mathbf{P}$ *je dvojnásobný právě tehdy, když je středem kružnice, která se dotýká všech přímek skupiny* $\mathbf{P}$.

Důkaz. I. Nechť S je vlastní dvojnásobný bod fokály F a S' bod k němu protější. Bod S neleží na žádné přímce skupiny $\mathbf{P}$, neboť pak by tato přímka byla komponentou fokály, což není možné. Leží-li S na diagonále skupiny $\mathbf{P}$, potom, jak víme z důkazu věty 6.2, je tato diagonála osou symetrie skupiny **P** a s komponentou fokály F. Tedy S je průsečíkem diagonál jen v případě, že přímky skupiny omezují čtverec nebo kosočtverec, a pak $S = S'$ a S je středem vepsané kružnice. Jestliže S leží nejvýš na jedné diagonále, pak ani S' není průsečíkem diagonál a existuje tedy taková dvojice protějších vrcholů P, P', že žádný z bodů S, S' neleží na diagonále P, P'. Připusťme, že $S \neq S'$. Přímka SS' neprochází žádným vrcholem skupiny **P** (jinak by byla komponentou fokály). Přímky SP, SP', $S'P$, $S'P'$ tvoří tedy jednoduchou skupinu, jejíž všechny vrcholy podle vět 6.1 a 6.2 leží na F. Na přímkách SP, SP' leží tedy dvojnásobný bod S a další dva navzájem různé body, což je spor. Je tedy $S = S'$, takže bod S leží na některé z os každého úhlu sevřeného přímkami skupiny **P**.

II. Nechť S je střed kružnice dotýkající se přímek skupiny **P**. Pokud S leží na dvou diagonálách této skupiny, jde o případ čtverce nebo kosočtverce a bod S je podle věty 5.1 dvojnásobný. Leží-li S nejvýš na jedné diagonále, existují dva páry protějších vrcholů A, A' a B, B' takové, že S neleží ani na AA' ani na BB'. Z bodů A, A', B, B' může být nejvýš jeden nevlastní; zvolme označení tak, že body A, A' jsou vlastní. Připusťme, že S není dvojnásobný bod. Pak na spojnici AS leží jediný další průsečík Q s fokálou F; označme Q' bod k němu protější. Ježto S leží na osách úhlů přímek skupiny **P** a $A'Q \nparallel A'S$, je $Q \nparallel Q' \neq S$ a bod Q' leží na přímce AS, která tedy obsahuje čtyři navzájem různé body fokály F, což je spor. Tedy S je dvojnásobný bod a věta 7.1 je dokázána.

První klasifikace případů, kdy se fokála rozpadá, byla podána ve větě 5.1. Zbývá tedy případ, kdy skupina **P**, určující danou fokálu, je regulární. Snadno se zjistí, že vlastní přímka je komponentou fokály právě tehdy, když je diagonálou a osou symetrie skupiny **P**; fokála tedy má nejvýš dvě vlastní přímky za komponenty. Případ, kdy dvě diagonály skupiny **P** jsou jejími osami symetrie, byl vyšetřen ve větě 5.1. Má-li **P** jen jednu takovou diagonálu, je fokála složena z této diagonály a z kružnice opsané čtyřúhelníku omezenému přímkami skupiny **P**. Průsečíky této přímky a kružnice jsou středy dvou kružnic, které se dotýkají přímek skupiny **P**. Správnost tohoto tvrzení se ověří pomocí vlastností obvodových úhlů kružnice.

V ostatních případech je fokála nerozložitelná; má-li taková fokála dvojnásobný bod, nazývá se *strofoida*. Bez důkazu uvádíme, že strofoida je úpatnicí paraboly určené osami vnějších úhlů skupiny **P** (viz [2]).

8. Závěr. Je známo mnoho dalších vlastností a konstrukcí fokály. Vybrali jsme z nich v této studii několik, které jsou zajímavé a dají se dobře zvládnout jednoduchými prostředky. I když vyšetřování speciálních křivek je dnes již zcela uzavřenou kapitolou geometrie, může snad v tomto pojetí oživit tradiční materiál elementární geometrie.

Literatura

[1] *Fr. Sedlák, L. Kosmák*: Studie fokály, I. Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), str. 160—164.
[2] *L. Kosmák*: Charakterisace tětivových a tečnových mnohoúhelníků. Čas. pro pěst. mat. *80* (1955), str. 454—461.
[3] *R. J. Walker*: Algebraic Curves. 1950, Princeton.
[4] *B. Bydžovský*: Úvod do algebraické geometrie. 1948, Praha.

Резюме

ИЗУЧЕНИЕ ФОКАЛЬНОЙ КРИВОЙ, II

Ф. СЕДЛАК (F. Sedlák), Прага, и Л. КОСМАК (L. Kosmák), Брно

Рассматривается уравнение фокальной кривой и приводятся элементарные доказательства некоторых ее свойств.

Zusammenfassung

STUDIE DER FOKALE, II

F. SEDLÁK, Praha und L. KOSMÁK, Brno

Man untersucht die Gleichung der Fokale und gibt elementare Beweise einiger Eigenschaften der Kurve.