Časopis pro pěstování matematiky

Josef Kolomý

K metodě podobné iterace

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 308--313

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117379`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

K METODĚ PODOBNÉ ITERACE

JOSEF KOLOMÝ, Praha

(Došlo 28. března 1960)

V článku se dokazuje konvergence nového iteračního procesu obdobného metodě podobné iterace [1].

Nechť v reálném Hilbertově prostoru H je dána rovnice

$$Ay = f, \tag{1}$$

kde A je lineární ohraničený operátor v H, f je daný a y hledaný prvek z H.

Rovnici (1) řešme iteracemi

$$y_{n+1} = Pf + \alpha_n R y_n, \tag{2}$$

kde $R = I - PA$, operátor P je lineární ohraničený a komutativní s A. Koeficienty α_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ určíme z podmínky

$$\frac{\partial F(y_{n+1})}{\partial \alpha_n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

kde

$$F(y) = \|f - Ay\|^2. \tag{4}$$

Nechť $\|ARy_n\| > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Určíme koeficienty α_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Z komutativnosti operátorů A, P plyne komutativnost operátorů A, R. Lze tedy uvést $F(y_{n+1})$ na tvar

$$\begin{aligned} F(y_{n+1}) &= \|f - Ay_{n+1}\|^2 = \|Rf - \alpha_n ARy_n\|^2 = \\ &= \|Rf\|^2 - 2\alpha_n(Rf, ARy_n) + \alpha_n^2 \|ARy_n\|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Odtud a z podmínky (3) plyne, že

$$\alpha_n = \frac{(Rf, ARy_n)}{\|ARy_n\|^2}. \tag{6}$$

Jelikož

$$\frac{\partial^2 F(y_{n+1})}{\partial^2 \alpha_n} = 2\,\|ARy_n\|^2 > 0,$$

podmínky (3) dává minimum funkcionálu $F(y)$ pro $y = y_{n+1}$ definované rovnicí (2) a (6). Iterační proces (2) je tedy dán vzorcem

$$y_{n+1} = Pf + \frac{(Rf, ARy_n)}{\|ARy_n\|^2} Ry_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{7}$$

Věta 1. *Nechť A je lineární ohraničený operátor v reálném Hilbertově prostoru H. Nechť operátor P je lineární ohraničený v H a takový, že P^{-1} existuje. Nechť P je komutativní s A a platí*

$$\|R\| = q < 1\,. \tag{8}$$

Budiž dále splněna jedna z těchto podmínek:

1. *H je úplný.*
2. *R je totálně spojitý v H.*

Pak rovnice (1) má právě jedno řešení y^*. Posloupnost $\{y_n\}$ definovaná rovností (7) konverguje v normě H k řešení y^* a platí tyto odhady:

$$\|y^* - y_n\| \leqq kq^n\|f - Ay_0\|\,, \tag{9}$$

$$\|y^* - y_n\| \leqq kq\|f - Ay_{n-1}\|\,, \tag{10}$$

$$\|y^* - y_n\| \leqq k\left\{\|Rf\|^2 - \frac{(Rf, ARy_{n-1})^2}{\|ARy_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

kde $k = \|A^{-1}\| \leqq \dfrac{\|P\|}{1 - q}$ a y_0 je libovolný prvek z H.

Důkaz. Podle (5) a (6) platí

$$\begin{aligned} F(y_{n+1}) &= \|Rf\|^2 - 2\alpha_n(Rf, ARy_n) + \alpha_n^2\|ARy_n\|^2 = \\ &= \|Rf\|^2 - \frac{(Rf, ARy_n)^2}{\|ARy_n\|^2}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Protože

$$F(y_{n+1}) = \|R(f - \alpha_n Ay_n)\|^2$$

a prvek y_{n+1} definovaný rovností (2) a (6) minimisuje funkcionál $F(y)$ na množině všech prvků tvaru $Pf + \alpha Ry_n$, $\alpha \in \mathfrak{R}$, kde $\mathfrak{R}$ značí množinu všech reálných čísel, dává prvek $\alpha_n y_n$ minimum funkcionálu

$$\tilde{F}(y) = \|R(f - Ay)\|^2$$

na množině všech prvků tvaru αy_n, $\alpha \in \mathfrak{R}$. Tedy

$$F(y_{n+1}) = \tilde{F}(\alpha_n y_n) = \min_{\alpha \in \mathfrak{R}} \tilde{F}(\alpha y_n)\,.$$

Odtud

$$F(y_{n+1}) \leqq \tilde{F}(y_n)\,. \tag{13}$$

Jelikož

(14) $$\tilde{F}(y_n) = \|R(f - Ay_n)\|^2 \leqq q^2\|f - Ay_n\|^2 < F(y_n),$$

dostaneme odtud a z (13), že

$$F(y_0) \geqq F(y_1) \geqq \ldots \geqq F(y_n) \geqq \ldots \geqq 0.$$

Existuje tedy $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = p$ a $0 \leqq p \leqq F(y_0)$. Ukážeme, že $p = 0$. Z (13) a (14) plyne

(15) $$F(y_n) \leqq q^2 F(y_{n-1})$$

a tedy

(16) $$0 \leqq F(y_n) \leqq q^{2n} F(y_0) \to 0.$$

Tedy $p = 0$. Z předpokladu věty 1 plyne existence ohraničeného operátoru A^{-1} ([1]). Existuje tedy číslo $k > 0$ takové, že je-li y^* předpokládané řešení rovnice (1), platí

(17) $$\|y^* - y_n\|^2 \leqq k^2\|Ay^* - Ay_n\|^2 = k^2\|f - Ay_n\|^2 \to 0.$$

Ukážeme, že platí (9), (10), (11). Z nerovnosti (17), (16) a (15) dostaneme ihned (9), (10). Ze vztahu (17) a (12) obdržíme odhad (11). Tím je věta dokázána.

Poznámka 1. Nechť $A = I - \lambda K$. Speciální volbou operátoru dostaneme tyto případy:

a) $P = I$ (I je identický operátor).

(18) b) $P = \vartheta I$, kde $0 < \vartheta < \dfrac{1}{1 + \|\lambda K\|}$.

c) $P = \vartheta^2(I - \lambda K)$ a pro ϑ platí (18).

d) $P = I + J$, J je lineární ohraničený operátor komutativní s K.

K tomu, aby uvedená metoda konvergovala v H stačí, aby v případě:

a) $\|\lambda K\| < 1$.

b) $-(\lambda Ky, y) \geqq 0$ pro všechna $y \in H$, operátor K je symetrický v H.

c) Operátor K byl symetrický a λ nebylo charakteristickým číslem operátoru K.

d) Je-li K_λ resolventa operátoru λK, platila nerovnost

$$\|K_\lambda - J\| \leqq \frac{1}{1 + \|\lambda K\|}.$$

Poznámka 2. Nechť

(19) $$y_{n+1} = Pf + \vartheta_n(I - PA)\,y_n,$$

kde koeficienty ϑ_n jsou zatím neurčeny. Protože

$$F(y_{n+1}) \leqq q^2 F(\vartheta_n y_n) < F(\vartheta_n y_n),$$

je

(20) $$\operatorname{Min} F(y_{n+1}) < \operatorname{Min} F(\vartheta_n y_n).$$

Funkcionál $F(y)$ nabývá minima na množině ϑy_n, $\vartheta \in \mathfrak{R}$ pro $\vartheta_n y_n$, kde

$$\vartheta_n = \frac{(f, Ay_n)}{\|Ay_n\|^2}. \tag{21}$$

Z nerovnosti (20) plyne, že posloupnost $\{y_n\}$ definovaná rovností (7) minimisuje funkcionál $F(y)$ lépe než posloupnost definovaná rovnicí (19) a vztahem (21).

Poznámka 3. Můžeme definovat iterační proces dávající značně lepší odhady než (9), (10), (11), avšak pro praktické užití za cenu složitějších výpočtů.

Podle (7)

$$y_1 = Pf + \alpha_0 R y_0, \quad \alpha_0 = \frac{(Rf, ARy_0)}{\|ARy_0\|^2},$$
$$y_2 = Pf + \alpha_1 R y_1 = Pf + \alpha_1 RPf + \alpha_1 \alpha_0 R^2 y_0.$$

Položme

$$\tilde{y}_1 = Pf + \sigma RPf + \delta R^2 \tilde{y}_0, \quad \tilde{y}_0 = y_0,$$

kde koeficienty σ, δ určíme z podmínek

$$\frac{\partial F(\tilde{y}_1)}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial F(\tilde{y}_1)}{\partial \delta} = 0.$$

Odtud dostaneme soustavu dvou lineárních algebraických rovnic pro koeficienty σ, δ:

$$\sigma \|ARPf\|^2 + \delta(R^2 \tilde{y}_0, ARPf) = (ARPf, Rf),$$
$$\sigma(R^2 \tilde{y}_0, ARPf) + \delta \|R^2 \tilde{y}_0\|^2 = (R^2 \tilde{y}_0, Rf).$$

Je-li

$$D = \|ARPf\|^2 \|R^2 \tilde{y}_0\|^2 - (R^2 \tilde{y}_0, ARPf)^2 \neq 0,$$

lze určit σ, δ. Přitom $\tilde{y}_1$ dá funkcionálu $F(y)$ hodnotu menší než dva kroky iterace (7). Jsou-li splněny předpoklady věty 1, platí tyto odhady:

$$\|y^* - \tilde{y}_n\| \leqq kq^{2n} \|f - A\tilde{y}_0\|, \quad \|y^* - \tilde{y}_n\| \leqq kq^2 \|f - A\tilde{y}_{n-1}\|,$$
$$\|y^* - \tilde{y}_n\| \leqq kq \left\{ \|Rf\|^2 - \frac{(Rf, AR\tilde{y}_{n-1})^2}{\|AR\tilde{y}_{n-1}\|^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Literatura

[1] *J. Kolomý*: O konvergenci a užití iteračních metod. Časopis pro pěstování matematiky *86* (1961), 148—177.

[2] *L. B. Rall*: Error bounds for iterative solutions of Fredholm integral equations. Pacific Journal of Mathematics, vol. *V*, *1955*, 977—986.

[3] *H. D. Block*: Construction of solutions and propagation of errors in nonlinear problems. Proceedings of the American Mathematical Society, *4*, 1953, 715—722.

Резюме

К МЕТОДУ ПОДОБНОЙ ИТЕРАЦИИ

ИОСЕФ КОЛОМЫ (Josef Kolomý), Прага

В этой статье предлагается новый итерационный метода, аналогичной методу подобной итерации [1].

Пусть дано уравнение

(1) $$Ay = f,$$

где A – линейный ограниченный оператор в действительном гильбертовом пространстве H. Решение уравнения (1) предполагается в виде

(2) $$y_{n+1} = Pf + \alpha_n R y_n,$$

где $R = I - PA$, P – линейный ограниченный оператор в H, перестановочный с A. Пусть $\|ARy_n\| > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Коэффициенты α_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются из условий

$$\frac{\partial \|f - Ay_{n+1}\|^2}{\partial \alpha_n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда

(3) $$y_{n+1} = Pf + \frac{(Rf, ARy_n)}{\|ARy_n\|^2} Ry_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Теорема. *Пусть A — линейный ограниченный оператор в действительном гильбертовом пространстве H. Пусть P — линейный ограниченный оператор в H перестановочный с A и такой, что P^{-1} существует и $\|R\| = q < 1$. Пусть, кроме того выполнено одно из условий: 1. H полное, 2. R вполне непрерывный в H. Тогда уравнение (1) имеет только одно решение y^*, последовательность $\{y_n\}$, определенная уравнением (3), сходится по норме H к y^* и имеют место следующие оценки:*

$$\|y^* - y_n\| \leqq kq^n \|f - Ay_0\|,$$
$$\|y^* - y_n\| \leqq kq \|f - Ay_{n-1}\|,$$
$$\|y^* - y_n\| \leqq k \left\{ \|Rf\|^2 - \frac{(Rf, ARy_{n-1})^2}{\|ARy_{n-1}\|^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $k = \|A^{-1}\| \leqq \dfrac{\|P\|}{1 - q}$ *и* $y_0 \in H$.

Summary

ON THE SIMILAR ITERATIVE METHOD

JOSEF KOLOMÝ, Praha

In the present paper there is given a new iterative method, analogous to the similar iterative method [1].

The problem is to solve the equation

$$Ay = f, \tag{1}$$

where A is a linear bounded operator in a real Hilbert space. We use the iterative formula

$$y_{n+1} = Pf + \alpha_n R y_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

where $R = I - PA$, P is a linear bounded operator in H, commutative with A. Suppose that $\|ARy_n\| > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. The parameters α_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ are to be determined from the conditions

$$\frac{\partial F\,(y_{n+1})}{\partial \alpha_n} = 0\,, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,, \quad F(y) = \|f - Ay\|^2\,;$$

thus

$$y_{n+1} = Pf + \frac{(Rf, ARy_n)}{\|ARy_n\|^2} Ry_n\,. \tag{3}$$

Theorem. *Let A be a linear bounded operator in a real Hilbert space H. Let P be a linear bounded operator in H, commutative with A, having an inverse operator P^{-1} and such that $\|R\| = q < 1$. Let one of the following conditions be fulfilled:*

1. *H is complete;*
2. *R is completely continuous in H.*

Then the equation (1) has only one solution y^*. The sequence $\{y_n\}$ defined by (3) converges in the norm of H to y^*, and the error of approximation $\|y^* - y_n\|$ is bounded by the following inequalities:

$$\|y^* - y_n\| \leqq kq^n\|f - Ay_0\|\,, \quad \|y^* - y_n\| \leqq kq\|f - Ay_{n-1}\|\,,$$
$$\|y^* - y_n\| \leqq k\left\{\|Rf\|^2 - \frac{(Rf, ARy_{n-1})^2}{\|ARy_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

where $k = \|A^{-1}\| \leqq \|P\|/(1 - q)$ and y_0 is an arbitrary element from H.