Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

K TEORII KONGRUENCÍ PŘÍMEK V AFINNÍM PROSTORU

BOHUMIL CENKL, Praha

(Došlo 25. května 1960)

V práci jsou studovány kongruence v trojdimensionálním afinním prostoru, mající fokální plochy v afinní asymptotické polodeformaci. Problém byl položen A. ŠVECEM.

V projektivním trojdimensionálním prostoru byly studovány kongruence D (С. П. Фиников, Теория конгруэнций), čili kongruence W, jejichž fokální plochy jsou v projektivní deformaci 2. řádu. Naskýtá se otázka, neexistují-li analogické kongruence W v afinním unimodulárním trojdimensionálním prostoru, nahradíme-li požadavek projektivní deformace v projektivním prostoru požadavkem polodeformace, nebo jiným slabším požadavkem (tj. určitými vlastnostmi příslušné linearisující transformace). V tomto smyslu je řešen následující problém: V afinním prostoru P_3 o třech dimensích nechť je dána neparabolická kongruence přímek K, mající dvě různé fokální plochy (F_1), (F_2). Kongruence nechť je W, čili fokální plochy nechť jsou v asymptotické korespondenci C. Buď $\mathscr{A}$ afinita prostoru P_3 na sebe, která je tečnou afinitou korespondence C mezi plochami (F_1) a (F_2). Ptáme se čím jsou charakterisovány takové kongruence K, pro které asymptotika γ_2 fokální plochy (F_2) jdoucí bodem A_2, která je v korespondenci C obrazem asymptotiky γ_1 plochy (F_1) jdoucí bodem A_1, má při vhodné volbě $\mathscr{A}$ jednu z následujících vlastností.

1. Křivky $\gamma_2 = C\gamma_1$ a $\mathscr{A}\gamma_1$ mají v bodě A_2 analytický styk 2. řádu.

2. Průměty křivek γ_2 a $\mathscr{A}\gamma_1$ ze směru rovnoběžného s přímkou $p \equiv \overline{A_1A_2}$ kongruence K mají analytický styk 2. řádu.

3. Průměty křivek γ_2 a $\mathscr{A}\gamma_1$ ze směru rovnoběžného s tečnou q plochy (F_2) v bodě A_2 konjugovanou s tečnou $p \equiv \overline{A_1A_2}$.

4. Křivky $\gamma_2 = C\gamma_1$ a $\mathscr{A}\gamma_1$ nemají analytický styk 2. řádu, mají však geometrický styk 2. řádu a neexistuje směr, z něhož promítnuty by měly analytický styk 2. řádu.

V celé práci je užíváno značení stejného jako v [1].

1. Nechť je $\boldsymbol{A}$ rádiusvektor bodu A plochy (A) – základní plochy kongruence K. Vektor $\mathbf{e}_3$ nechť je rovnoběžný s přímkou kongruence procházející bodem A plochy (A). Diferenciální rovnice kongruence K jsou

$$(1) \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{e}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{3} \omega_{ki} \mathbf{e}_i \quad (k = 1, 2, 3)\,.$$

Vyloučíme-li válcové kongruence (přímky kongruence rovnoběžné) můžeme vzít ω_{31} a ω_{32} jako hlavní formy. Dále předpokládáme

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = 1\,, \tag{2}$$

čili

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0\,. \tag{3}$$

Volíme-li reper tak, aby $\omega_{31}\omega_{32} = 0$ byla rovnice torsálních křivek (tj. křivek které vytínají rozvinutelné plochy kongruence na základní ploše (A)) dostáváme

$$\omega_1 = \omega_{31}\,, \quad \omega_2 = -\,\omega_{32}\,. \tag{4}$$

Vektory $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{A} + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{A} - \mathbf{e}_3$ jsou rádiusvektory bodů A_1, A_2 fokálních ploch $(F_1), (F_2)$ kongruence K. Ze (4) máme

$$\begin{aligned} \omega_{33} &= (a - f)\,\omega_{31} + (b - g)\,\omega_{32}\,, & -\,\omega_{21} &= b\omega_{31} + c\omega_{32}\,,\\ -\,\omega_3 &= (a + f)\,\omega_{31} + (b + g)\,\omega_{32}\,, & \omega_{12} &= e\omega_{31} + f\omega_{32} \end{aligned} \tag{5}$$

a odtud

$$\begin{aligned} \delta b &= -\,b\pi_{11} - \pi_{23}\,, & \delta a &= a\pi_{11}\,, & \delta c &= -\,3c\pi_{11}\,,\\ \delta f &= f\pi_{11} + \pi_{13}\,, & \delta g &= -\,g\pi_{11}\,, & \delta e &= 3e\pi_{11}\,. \end{aligned}$$

Můžeme zřejmě volit $b = f = 0$. Vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou rovnoběžné s tečnami v bodech A_1, A_2 k fokálním plochám $(F_1), (F_2)$ konjugovanými s přímkou $p \equiv \overline{A_1A_2}$ kongruence K. Dále lze položiti $\dfrac{a}{c} = 1$ na základě vztahu

$$\delta \lg \frac{a}{c} = 4\pi_{11}\,.$$

Místo rovnic (5) máme tedy nyní

$$\begin{aligned} \omega_{33} &= a\omega_{31} - g\omega_{32}\,, & -\,\omega_3 &= a\omega_{31} + g\omega_{32}\,,\\ \omega_{12} &= e\omega_{31}\,, & -\,\omega_{21} &= a\omega_{32}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Na fokálních plochách $(F_1), (F_2)$ mějme repery

$$(\boldsymbol{F}_1; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\,, \quad (\boldsymbol{F}_2; \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)\,.$$

Rovnice asymptotik na ploše (F_1) je

$$e(\omega_{31})^2 - g(\omega_{32})^2 = 0\,.$$

Kongruence W dostaneme tedy, položíme-li

$$e = g\,. \tag{7}$$

Nyní jsou fokální plochy v asymptotické korespondenci C indukované přímkami kongruence K. Nejobecnější tečná afinita $\mathscr{A}$ korespondence C je zřejmě

$$(8)\qquad \mathscr{A}\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2\,, \qquad \mathscr{A}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{g}\,\mathbf{e}_2\,,$$
$$\mathscr{A}\mathbf{e}_1 = -\,a\mathbf{e}_3\,, \quad \mathscr{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3\,.$$

Předpokládáme $a \neq 0$; $g \neq 0$, čili že žádná fokální plocha není křivkou. Snadno zjistíme, že platí

$$\mathscr{A}\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2\,, \quad \mathscr{A}\,\mathrm{d}\mathbf{F}_1 = \mathrm{d}\mathbf{F}_2\,, \quad \mathscr{A}\,\mathrm{d}^2\mathbf{F}_1 = \mathrm{d}^2\mathbf{F}_2 + 2\mathbf{L}\,,$$

kde je

$$(9)\quad \mathbf{L} = \Phi_1\mathbf{e}_1 + \Phi_2\mathbf{e}_2 + \Phi_3\mathbf{e}_3\,,$$
$$\Phi_1 = (\lambda_1 g + a)\,\{(\omega_{31})^2 - (\omega_{32})^2\}\,,$$
$$\Phi_2 = -\,\frac{\mathrm{d}g}{g}\,\omega_{32} + g(\omega_{32})^2 + (K_1^2\omega_{31} + K_2^2\omega_{32})\,\omega_{32} + \frac{\omega_{31}}{g}\,(\omega_{31}I_1^3 + \omega_{32}I_2^3)\,,$$
$$\Phi_3 = \mathrm{d}a\,\omega_{31} + (K_1^3\omega_{31} + K_2^3\omega_{32})\,\omega_{32} + a^2(\omega_{31})^2 - a\omega_{31}(\omega_{31}I_1^1 + \omega_{32}I_2^1)\,.$$

Z předcházejících výrazů nahlédneme, že každému směru $\mathrm{d}\mathbf{F}_i = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2$ $(i = 1, 2)$ (směru tečny fokální plochy (F_1) v bodě A_1) odpovídá při korespondenci C a afinitě $\mathscr{A}$ směr $\mathbf{L}$. Tuto kvadratickou transformaci nazýváme *$\mathscr{A}$-linearisující transformací korespondence C* mezi fokálními plochami. Přímku, která prochází bodem A_1 resp. A_2 plochy (F_1) resp. (F_2) a která má směr $\mathbf{L}$, nazýváme *linearisující přímkou korespondence C*. Nechť je $\mathrm{d}\mathbf{F}_1 = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2$ směr tečny ke křivce λ_1, procházející bodem A_1 na ploše (F_1) a nechť λ_2 je křivka na ploše (F_2) procházející bodem A_2 a odpovídající křivce λ_1 v korespondenci C. Vlastnosti linearisující transformace můžeme tedy vyjádřiti takto:

1. Je-li $\mathbf{L} = 0$, potom křivky λ_2 a $\mathscr{A}\lambda_1$ mají v bodě A_2 plochy (F_2) analytický styk 2. řádu. Linearisující přímku nazýváme v tomto případě *$\mathscr{A}$-hlavní.*

2. Je-li $\mathbf{L} \neq 0$ a není-li směr $\mathbf{L}$ rovnoběžný se směrem $\mathrm{d}F_2$, potom mají průměty křivek λ_2 a $\mathscr{A}\lambda_1$ ze směru $\mathbf{L}$ analytický styk 2. řádu.

3. Je-li směr $\mathbf{L}$ rovnoběžný se směrem $\mathrm{d}F_2$, potom křivky λ_2 a $\mathscr{A}\lambda_1$ nemají analytický styk 2. řádu, mají však geometrický styk 2. řádu a neexistuje směr, z něhož promítnuty by měly analytický styk 2. řádu. Linearisující přímku nazýváme *$\mathscr{A}$-charakteristickou.*

2. Rovnice asymptotik na obou fokálních plochách je, jak víme, $(\omega_{31})^2 - (\omega_{32})^2 = 0$. Požadujeme, aby asymptotika γ_2 na ploše (F_2), určená rovnicí $\omega_{31} - \omega_{32} = 0$, měla s křivkou $\mathscr{A}\gamma_1$ analytický styk 2. řádu (γ_1 je asymptotika plochy (F_1) určená rovnicí $\omega_{31} - \omega_{32} = 0$) v bodě A_2 plochy (F_2), čili aby linearisující přímka tečny k asymptotice γ_2 v bodě A_2 byla $\mathscr{A}$-hlavní. K tomu je zřejmě nutné a stačí, aby

$$(10)\qquad \Phi_2 \equiv -\,\frac{1}{g}\,\{g_1 + g_2 - g^2 - g(K_1^2 + K_2^2) - I_1^3 - I_2^3\} = 0\,,$$
$$\Phi_3 \equiv a_1 + a_2 - a(I_1^1 + I_2^1) + a^2 + K_1^3 + K_2^3 = 0\,,$$

užijeme-li vztahů, které dostáváme dalším normováním reperu

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= I_1^1\omega_{31} + I_2^1\omega_{32}\,, & \omega_{22} &= K_1^2\omega_{31} + K_2^2\omega_{32}\,,\\ \omega_{13} &= I_1^3\omega_{31} + I_2^3\omega_{32}\,, & \omega_{23} &= K_1^3\omega_{31} + K_2^3\omega_{32}\,,\\ K_1^2 &= -I_1^1 - a\,, & K_2^2 &= -I_2^1 + g\,,\\ \mathrm{d}g &= g_1\omega_{31} + g_2\omega_{32}\,, & \mathrm{d}a &= a_1\omega_{31} + a_2\omega_{32}\,. \end{aligned}$$

Zjistěme nyní obecnost kongruence K, která je W a pro niž platí (10). Diferenciální rovnice kongruence W nechť jsou nyní

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{31}\mathbf{e}_1 - \omega_{32}\mathbf{e}_2 - (a\omega_{31} + g\omega_{32})\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathrm{d}\mathbf{e}_1 &= (I_1^1\omega_{31} + I_2^1\omega_{32})\,\mathbf{e}_1 + g\omega_{31}\mathbf{e}_2 + (I_1^3\omega_{31} + I_2^3\omega_{32})\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathrm{d}\mathbf{e}_2 &= -\,a\omega_{32}\mathbf{e}_1 + (K_1^2\omega_{31} + K_2^2\omega_{32})\,\mathbf{e}_2 + (K_1^3\omega_{31} + K_2^3\omega_{32})\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathrm{d}\mathbf{e}_3 &= \omega_{31}\mathbf{e}_1 + \omega_{32}\mathbf{e}_2 + (a\omega_{31} - g\omega_{32})\,\mathbf{e}_3\,, \end{aligned} \tag{11}$$

přičemž platí

$$\begin{gathered} K_1^2 = -I_1^1 - a\,,\quad K_2^2 = -I_2^1 + g\,,\\ [\mathrm{d}\omega_{31}] = (I_2^1 + g)\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\quad [\mathrm{d}\omega_{32}] = (-K_1^2 + a)\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,. \end{gathered} \tag{12}$$

Kvadratické rovnice (podmínky integrability systému diferenciálních rovnic (11)) jsou

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}a\,\omega_{31}] &= -\,\{K_1^3 + aI_2^1 + 2ag\}\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [\mathrm{d}g\,\omega_{32}] &= -\,\{I_2^3 - gK_1^2 + 2ag\}\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [\mathrm{d}g\,\omega_{31}] &= \{I_1^3 - 3gI_2^1\}\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [\mathrm{d}a\,\omega_{32}] &= \{K_2^3 + 3aK_1^2\}\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] &= \{-I_2^3 - ag + 2K_1^2I_2^1 - I_1^1g\}\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [\mathrm{d}I_1^3\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{32}] &= \{gK_2^3 - 3aI_2^3 - 2I_1^3I_2^1 - 2I_1^3g\}\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [\mathrm{d}K_1^3\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{32}] &= \{aI_1^3 - 3K_1^3 + 2K_1^2K_2^3 - K_2^3a\}\,[\omega_{31}\omega_{32}]\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Z rovnic (13_{1-4}) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a &= \{K_2^3 + 3aK_1^2\}\,\omega_{31} + \{K_1^3 + aI_2^1 + 2ag\}\,\omega_{32}\,,\\ \mathrm{d}g &= -\,\{I_2^3 - gK_1^2 + 2ag\}\,\omega_{31} - \{I_1^3 - 3gI_2^1\}\,\omega_{32}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Na základě (12) a (14) můžeme místo $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$ psát

$$K_1^3 + K_2^3 - 2aI_1^1 - a^2 + ag = 0\,,\quad I_1^3 + I_2^3 + ag + g^2 - 2gI_2^1 = 0\,. \tag{15}$$

Vnějším diferencováním (14) a úpravou rovnic $(13_{5,6,7})$ pomocí (12_1) a (15) máme

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] = A[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ &-[\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{31}] + 2g[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{32}] = B[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ &-[\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{31}] + 2a[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{32}] = C[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ &[\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{31}] - 3a[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] - [\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{32}] + 2a[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{32}] + a[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] =\\ &\quad = D[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ &[\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{31}] + g[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] - [\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{32}] + 2g[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] - 3g[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] =\\ &\quad = E[\omega_{31}\omega_{32}]\,, \end{aligned} \tag{16}$$

kde A, B, C, D, E jsou výrazy v invariantech kongruence K. Z (16) dostáváme

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} dI_1^1 &= \alpha_1\omega_{31} + \alpha_2\omega_{32}\,, & dI_2^3 &= \beta_1\omega_{31} + \beta_2\omega_{32}\,,\\ dI_2^1 &= \alpha_3\omega_{31} + \alpha_4\omega_{32}\,, & dK_2^3 &= \beta_3\omega_{31} + \beta_4\omega_{32}\,. \end{aligned}$$

Výrazy α, β musí splňovat následující vztahy:

$$\begin{aligned} 2ag\alpha_1 &= g(C + D) + a(B + E) - 2ag\alpha_1\,,\\ 2ag\alpha_3 &= -\,a(B + E - gA) + 2ag\alpha_4\,,\\ 2ag\alpha_2 &= -\,a(B + E + gA) + 2ag\alpha_4\,,\\ \beta_1 &= B + 2g\alpha_4 - \beta_2\,,\\ \beta_3 &= C - \frac{a}{g}(B + E) - aA - \beta_4 + 2a\alpha_4\,. \end{aligned}$$

Rovnice (17) vnějšně diferencujeme a dostaneme nové kvadratické rovnice

$$\begin{aligned} -\,[d\alpha_4\,\omega_{31}] + [d\alpha_4\,\omega_{32}] &= M_1[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [d\alpha_4\,\omega_{31}] + [d\alpha_4\,\omega_{32}] &= M_2[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ 2g[d\alpha_4 - d\beta_2\,\omega_{31}] + [d\beta_2\,\omega_{32}] &= M_3[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ -\,[d\beta_4\,\omega_{31}] + 2a[d\alpha_4\,\omega_{31}] + [d\beta_4\,\omega_{32}] &= M_4[\omega_{31}\omega_{32}]\,, \end{aligned}$$

kde M_i jsou opět výrazy v invariantech kongruence K. Opětným užitím Cartanova lematu na poslední kvadratické rovnice dostáváme

$$\text{(18)} \quad \begin{aligned} d\alpha_4 &= u_1\omega_{31} + u_2\omega_{32}\,, & d\beta_2 &= v_1\omega_{31} + v_2\omega_{32}\,, & d\beta_4 &= w_1\omega_{31} + w_2\omega_{32}\,,\\ u_1 &= \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\,, & v_1 &= M_3 + g(M_1 - M_2) - 2gv_2\,,\\ u_2 &= \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2)\,, & w_1 &= M_4 + a(M_1 - M_2) - w_2\,. \end{aligned}$$

Z (18) dále plyne

$$\text{(19)} \qquad \begin{aligned} [d(M_1 + M_2)\,\omega_{31}] + [d(M_1 - M_2)\,\omega_{32}] &= [d(u_1\omega_{31} + u_2\omega_{32})]\,,\\ -\,2g[dv_2\,\omega_{31}] + [dv_2\,\omega_{32}] &= K_1[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ -\,[d\omega_2\,\omega_{31}] + [d\omega_2\,\omega_{32}] &= K_2[\omega_{31}\omega_{32}]\,. \end{aligned}$$

Rovnice (19_1) je tvaru $\mathscr{I}[\omega_{31}\omega_{32}] = 0$, kde $\mathscr{I}$ je invariant kongruence. Místo (19_1) můžeme tedy psát

$$\text{(20)} \qquad \mathscr{I} = 0\,.$$

Je-li splněno (20), potom je systém v involuci a kongruence K, která je W a má fokální plochy v asymptotické afinní polodeformaci, existuje a závisí na dvou funkcích jedné proměnné. Značme tuto kongruenci d. Nyní nalezneme geometrickou charakteristiku výrazů (10), čímž budou alespoň částečně charakterisovány kongruence d (není zjištěn význam $\mathscr{I} = 0$). Pišme nyní pro zjednodušení $\Phi_0 = -\,g\Phi_2$, tedy místo (10) máme $\Phi_0 = \Phi_3 = 0$. Dále si uvědomme, že rovnice asymptotik φ_s na střední ploše kongruence a φ_i na sférické indikatrix kongruence K jsou — [1].

$$\begin{aligned} \varphi_s = \{J_6 - 2(2J_8 + 1)\}\,a^2(\omega_{31})^2 + \{J_5 - g_1 + gK_1^2 - a_2 + aI_2^1\}\,\omega_{31}\omega_{32} +\\ + \{-\,J_7 - 2(2J_9 - 1)\}\,g^2(\omega_{32})^2\,, \end{aligned}$$

$$\varphi_i = \{-J_6 - 4J_8\} a^2(\omega_{31})^2 + \{-J_4 - a_2 + aI_2^1 + g_1 - K_1^2 g\} \omega_{31}\omega_{32} + \\ + \{-J_7 + 4J_9\} g^2(\omega_{32})^2 .$$

$$J_6 = \frac{1}{a^2} I_1^3 , \quad J_7 = \frac{1}{g^2} K_2^3 , \quad J_8 = \frac{1}{4a^2}(a_1 - aI_1^1 + g^2) ,$$

$$J_9 = \frac{1}{4g^2}(g_2 - gK_2^2 - a^2) , \quad J_4 = I_2^3 + K_1^3 , \quad J_5 = I_2^3 - K_1^3$$

jsou invarianty studované v [1]. Píšeme-li stručně

$$\varphi_s = a_s(\omega_{31})^2 + b_s\omega_{31}\omega_{32} + c_s(\omega_{32})^2 ,$$
$$\varphi_i = a_i(\omega_{31})^2 + b_i\omega_{31}\omega_{32} + c_i(\omega_{32})^2 ,$$

dostáváme okamžitě vztahy

$$(21) \qquad a_s + b_s + c_s = -\Phi_0 - \Phi_3 , \quad a_i + b_i + c_i = \Phi_0 - \Phi_3 .$$

Odtud nalezneme geometrickou charakteristiku (10). Nechť jsou p_1, p_2 tečny v bodě A ke křivkám $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$ na střední ploše (A) kongruence K. Nechť q_1, q_2 jsou asymptotické tečny střední plochy v bodě A. Buď r tečna v bodě A ke křivce $\omega_{31} - \omega_{32} = 0$ (tzn. k obrazu asymptotiky fokální plochy na střední ploše). Obdobně u_1, u_2 jsou tečny v bodě A' na ploše (A') (indikatrix kongruence) ke křivkám $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$ (obrazy torsálních křivek). v_1, v_2 jsou tečny k asymptotikám indikatrix v bodě A'. s buď tečna k obrazu asymptotiky $\omega_{31} - \omega_{32} = 0$ fokální plochy na (A'). Rovnice (10) jsou tedy charakterisovány tím, že splynou přímky r a q_1 a rovněž s a v_1 a platí ještě, že $(p_1 p_2 r q_2) = \lambda_s$, $(u_1 u_2 s v_2) = \lambda_i$, kde je

$$(22) \qquad \lambda_s = -\frac{a^2}{g^2}\frac{J_6 - 4J_8 - 2}{J_7 + 4J_9 - 2} , \quad \lambda_i = \frac{a^2}{g^2}\frac{J_6 + 4J_8}{-J_7 + 4J_9} ,$$

kde a, g, J jsou invarianty kongruence K, jejichž charakteristika je podána v [1]. Máme tedy odpověď:

Aby kongruence W byla kongruencí d, k tomu je nutné a stačí, aby platilo (20), aby splynuly přímky r, q_1 a s, v_1 a přitom $(p_1 p_2 r q_2) = \lambda_s$, $(u_1 u_2 s v_2) = \lambda_i$, kde λ_s, λ_i jsou určeny pomocí výrazů (22). Taková kongruence závisí na dvou funkcích jedné proměnné.

3. *Zkoumejme kongruenci W, pro niž linearisující přímka tečny k asymptotice $\omega_{31} - \omega_{32} = 0$ na ploše (F_2) v bodě A_2 je přímka kongruence p jdoucí bodem A_2,* čili taková kongruence W, která má vlastnost 2 uvedenou nahoře. Takovou kongruenci značme d_1. Aby kongruence W byla d_1, k tomu je zřejmě nutné a stačí, aby platilo $\Phi_0 = 0$, čili

$$(23) \qquad g_1 + g_2 - g^2 - g(K_1^2 + K_2^2) - I_1^3 - I_2^3 = 0 .$$

Kongruence d_1 je dána rovnicemi (11), přičemž platí (12), a podmínkou (23). Z kvadratických rovnic (13_{1-4}) dostáváme (14) a pomocí (23) dostáváme rovnice

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{31}] - 3a[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}K_1^3\,\omega_{32}] + a[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] &= B_1[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\
[\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{31}] + g[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] - [\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{32}] - g[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] &= B_2[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\
[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] &= B_3[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\
-[\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{31}] + 2g[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{31}] - [\mathrm{d}I_2^3\,\omega_{32}] &= B_4[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\
[\mathrm{d}K_1^3\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{32}] &= B_5[\omega_{31}\omega_{32}]\,.
\end{aligned}
$$

Kongruence d_1 závisí na pěti funkcích jedné proměnné. Na základě rovnic (21) se zjistí, že kongruence d_1 jsou takto geometricky charakterisovány: V bodě A' plochy (A') mějme dány tečny p_1, p_2 k asymptotikám plochy (A'). Nechť jsou q_1, q_2 tečny ke křivkám $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$ na ploše (A') (jsou to obrazy torsálních křivek střední plochy). r_1, r_2 buďte tečny k obrazům asymptotik fokálních ploch na ploše (A'). Nechť existuje na (A') křivka γ jdoucí bodem A' a mající v bodě A' tečnu t, přičemž je

$$
(q_1q_2tr_1) = \frac{g^2}{a^2}\,\frac{4J_9 - 1}{J_6 - 1}\,.
$$

Dvě dvojice tečen p_1, p_2 a r_1, t určují v tečné rovině plochy (A') v bodě A' involuci. Jednou dvojicí této involuce jsou tečny s_1, s_2 k obrazům asymptotik střední plochy na ploše (A'). Jestliže nastane případ $J_6 - 1 = 0$, potom je tečna t totožná s přímkou q_2. Dvě dvojice tečen, které určují involuci, jsou potom p_1, p_2; r_1, q_2. Snadno zjistíme obecnost kongruence, pro niž platí $J_9 = 1$.

Upravíme rovnice $(13_{5,6,7})$ a vnějším diferencováním (14) dostáváme kvadratické rovnice

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{31}] - 3a[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}K_1^3\,\omega_{32}] + a[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] &= B_1[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\
2g[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{31}] + g[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] - 3g[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] &= B_2[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\
[\mathrm{d}I_1^1\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] &= B_3[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\
2g[\mathrm{d}I_2^1\,\omega_{32}] &= B_4[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\
[\mathrm{d}K_1^3\,\omega_{31}] + [\mathrm{d}K_2^3\,\omega_{32}] &= B_5[\omega_{31}\omega_{32}]\,,
\end{aligned}
$$

B_i jsou výrazy v invariantech kongruence. Snadno se zjistí, že kongruence d_1, pro kterou $J_6 = 1$, závisí na třech funkcích jedné proměnné, platí-li

$$
\left[\mathrm{d}\,\frac{B_4}{2g}\,\omega_{31}\right] + \left[\mathrm{d}\left\{\frac{1}{2g}\,(gB_3 - 2B_4 - B_2)\right\}\omega_{32}\right] = 0\,.
$$

4. Mějme dánu kongruenci W. Ptáme se, čím jsou charakterisovány kongruence W takové, že *linearisující přímka* tečny v bodě A_2 *asymptotiky* $\omega_{31} - \omega_{32} = 0$ na ploše (F_2) *je konjugovaná s přímkou kongruence* dotýkající se v bodě A_2 fokální plochy (F_2). To je kongruence W s vlastností 3 uvedenou na začátku; budeme ji značit d_2. Aby kongruence W byla d_2, k tomu je nutné a stačí, aby platilo $\Phi_3 = 0$. *Kongruence d_2 závisí na pěti funkcích jedné proměnné.* Geometrická charakteristika invariantu $\Phi_3 = 0$ je úplně stejná jako charakteristika invariantu $\Phi_0 = 0$ v 3, jen s tím rozdílem, že platí

$$
(q_1q_2tr_1) = -\,\frac{g^2}{a^2}\,\frac{1 - J_7}{1 + 4J_8}\,.
$$

5. d_3' budeme značit takovou kongruenci W, pro kterou *tečna v bodě* A_2 *k asymptotice* $\omega_{31} - \omega_{32} = 0$ *na ploše* (F_2) *je* $\mathscr{A}$*-charakteristická* – je to 4. z výše uvedených případů. Kongruence d_3' je tedy taková kongruence W, pro niž platí $\Phi_3 - a\Phi_2 = 0$, čili $\Phi_3 + \frac{a}{g}\Phi_0 = 0$. Předpokládejme pro zjednodušení, že je $a + g = 0$, čili, že kanonická přímka – viz [1] – půlí úhel torsálních tečen v bodě A střední plochy kongruence. Budeme tedy dále kongruencí d_3 rozumět kongruenci d_3', pro niž platí $a + g = 0$. Jinak řečeno, kongruence d_3 je kongruence d_3', pro kterou jsou splněny rovnice

$$(24)\quad a + g = 0\,, \quad \Phi_3 - \Phi_0 \equiv K_1^3 + K_2^3 + I_1^3 + I_2^3 - 2aI_1^1 + 2aI_2^1 - 2a^2 = 0\,.$$

Ze $(13_{1,2,3,4})$, (12_1), (24) dostáváme konečné rovnice

$$(25)\quad \begin{aligned} K_1^3 &= -K_2^3 + 2aI_1^1 + 2a^2\,, & K_1^2 &= -I_1^1 - a\,,\\ I_1^3 &= -K_2^3 + 2aI_1^1 - 2aI_2^1\,, & K_2^2 &= -I_2^1 - a\,,\\ I_2^3 &= K_2^3 - 2aI_1^1\,. \end{aligned}$$

Místo (14) píšeme nyní

$$(26)\quad da = \{K_2^3 - 3aI_1^1 - 3a^2\}\,\omega_{31} + \{-K_2^3 + 2aI_1^1 + aI_2^1\}\,\omega_{32}\,.$$

Dostáváme kvadratické rovnice $(13_{5,6,7})$ a vnějším diferencováním (26) rovnice

$$\begin{aligned} [dK_2^3\,\omega_{31}] - 3a[dI_1^1\,\omega_{31}] - [dK_2^3\,\omega_{32}] + 2a[dI_1^1\,\omega_{32}] + a[dI_2^1\,\omega_{32}] &= B_1[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [dI_1^1\,\omega_{31}] + [dI_2^1\,\omega_{32}] &= B_2[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ -[dK_2^3\omega_{31}] + 2a[dI_1^1\omega_{31}] - 2a[dI_2^1\omega_{31}] + [dK_2^3\omega_{32}] - 2a[dI_1^1\omega_{32}] &= B_3[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ -[dK_2^3\,\omega_{31}] + 2a[dI_1^1\,\omega_{31}] + [dK_2^3\,\omega_{32}] &= B_4[\omega_{31}\omega_{32}]\,. \end{aligned}$$

Odtud máme dále

$$(27)\quad dK_2^3 = \alpha_1\omega_{31} + \alpha_2\omega_{32}\,, \quad dI_1^1 = \alpha_3\omega_{31} + \alpha_4\omega_{32}\,, \quad dI_2^1 = \alpha_5\omega_{31} + \alpha_6\omega_{32}\,.$$

Pro α musí platit následující relace:

$$\begin{aligned} -\alpha_2 + 3a\alpha_4 - \alpha_1 + 2a\alpha_3 + a\alpha_5 &= B_1\,,\\ -\alpha_4 + \alpha_5 &= B_2\,,\\ \alpha_2 - 2a\alpha_4 + 2a\alpha_6 + \alpha_1 - 2a\alpha_3 &= B_3\,,\\ \alpha_2 - 2a\alpha_4 + \alpha_1 &= B_4\,. \end{aligned}$$

Vnějším diferencováním (27) dostáváme

$$\begin{aligned} -[d\alpha_2\,\omega_{31}] + [d\alpha_2\,\omega_{32}] + 2a[d\alpha_4\,\omega_{31}] &= C_1[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ -[d\alpha_4\,\omega_{31}] + [d\alpha_4\,\omega_{32}] &= C_2[\omega_{31}\omega_{32}]\,,\\ [d\alpha_4\,\omega_{31}] + [d\alpha_4\,\omega_{32}] &= C_3[\omega_{31}\omega_{32}]\,, \end{aligned}$$

B_i, C_i jsou výrazy v invariantech. Poslední dvě rovnice dávají konečnou relaci

$$(28)\quad [dB_2\,\omega_{31}] + \left[d\left\{\frac{1}{2a}(B_4 + B_1 - aB_2)\right\}\omega_{31} + \omega_{32}\right] = 0\,.$$

Je-li splněno (28), potom kongruence d_3 závisí na dvou funkcích jedné proměnné. Geometrickou charakteristiku invariantu (24_2) dostáváme obdobně jako v předcházejících případech.

Nechť q_1, q_2 jsou tečny ke křivkám $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$ v bodě A' indikatrix (A'). Nechť p_1, p_2 jsou tečny k asymptotikám plochy (A') v bodě A' a nechť t je tečna k sférickému obrazu asymptotiky $\omega_{31} - \omega_{32} = 0$ fokální plochy na ploše (A') v bodě A'. Je-li splněno (24_2), potom p_1 splyne s t a dvojpoměr

$$(q_1 q_2 t p_2) = \frac{J_6 + 4J_8}{J_7 - 4J_9} \frac{a^2}{g^2},$$

kde J jsou invarianty charakterisované v [1]. Máme tedy odpověď:

Kongruence W, jejíž kanonická přímka půlí úhel torsálních tečen, je kongruence d_3 právě tehdy, když platí (28) a pro asymptotické tečny indikatrix kongruence platí právě uvedená charakteristika invariantu (24_2). Kongruence d_3 závisí na dvou funkcích jedné proměnné.

Literatura

[1] *Р. Н. Щербаков:* Некоторые вопросы аффинной теории прямолинейных конгруэнций, Математический сборник, *37* (*79*), № 3 (1955), 527—556.

[2] *С. П. Фиников:* Метод внешних форм Картана, М. - Л., Гостехиздат, 1948.

[3] *E. Čech:* Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces I. Časopis pro pěst. mat. a fys., *74* (1949), 32—48.

Резюме

К ТЕОРИИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

БОГУМИЛ ЦЕНКЛ (Bohumil Cenkl), Прага

В трехмерном аффинном пространстве две любых поверхности находятся в соответствии аффинного изгибания первого порядка. В аффинном изгибании второго порядка они находятся тогда и только тогда, если они аффинно эквивалентны. Поэтому невозможно непосредственно перенести на аффинное пространство результаты исследования непараболических конгруэнций D из проективного пространства. Однако, если взять вместо изгибания второго порядка фокальных поверхностей конгруэнций более слабое требование, линеаризирующее преобразование, то мы получаем в распоряжение средство для различения некоторых типов конгруэнций, которые до сего времени — поскольку автору известно — вообще не изучались. Понятие линеаризирующего преобра-

зования было введено Э. Чехом [3]. Соответствие C между фокальными поверхностями определяется прямолинейной конгруэнцией (сопоставляются точки касания луча конгруэнции с фокальными поверхностями). Пусть $\mathscr{A}$ – аффинное преобразование рассматриваемого аффинного пространства на себя, являющееся касательным аффинным преобразованием для соответствия C. В этой работе автор исследует четыре различных типа конгруэнций W, обозначаемых соответственно через d, d_1, d_2, d_3.

1. Пусть *линеаризирующая прямая* касательной к асимптотической линии γ_2 в точке A_2 поверхности (F_2) является $\mathscr{A}$ *– главной,* то есть кривые γ_2 и $\mathscr{A}C^{-1}\gamma_2$ $(\mathscr{A}C^{-1}\gamma_2 = \gamma_1$ есть асимптотическая линия на $(F_1))$ имеют аналитическое касание второго порядка (*фокальные поверхности находятся в аффинном полуизгибании*). Конгруэнции этого типа мы обозначаем через d. Если имеет место (20), то конгруэнции d зависят от двух функций одного переменного и характеризуются уравнениями (10), имеющими следующий смысл: Пусть p_1, p_2 – касательные к торсальным кривым $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$ в точке A средней поверхности (A); пусть q_1, q_2 – асимптотические касательные к средней поверхности в точке A. Пусть r – касательная в точке A к образу асимптотической линии γ_1 фокальной поверхности (F_1) на (A). Аналогично, u_1, u_2 – касательные в точке A' на поверхности (A') (индикатриса конгруэнции) к образам торсальных кривых; v_1, v_2 – асимптотические касательные индикатрисы; s – касательная к образу асимптотической линии γ_1 фокальной поверхности (F_1). Тогда уравнения (10) характеризуются тем, что пары прямых s, v_1 и r, q_1 совпадут, и что $(p_1p_2rq_2) = \lambda_s$, $(u_1u_2sv_2) = \lambda_i$, где λ_s и λ_i даны уравнениями (22). a, g, J в этих уравнениях являются инвариантами конгруэнции, исследованной в [1].

2. *Линеаризирующая прямая касательной к асимптотической линии γ_2 на F_2) является лучем конгруэнции, проходящим через точку A_2.* Конгруэнции этого типа мы обозначим через d_1 – они зависят от пяти функций одного переменного. С геометрической точки зрения они характеризуются так: p_1, p_2 – асимптотические касательные в точке A' поверхности (A') – индикатрисы конгруэнции; q_1, q_2 – касательные к образцам торсальных кривых на (A') в точке A'; r_1, r_2 – касательные к образам асимптотических линий фокальных поверхностей на поверхности (A'). Пусть на (A') существует кривая γ, проходящая через точку A' и имеющая в этой точке касательную t, причем

$$(q_1q_2tr_1) = \frac{g^2}{a^2} \cdot \frac{4J_9 - 1}{J_6 - 1}.$$

Две пары касательных p_1, p_2 и r_1, t определяют в касательной плоскости поверхности (A') в точке A' инволюцию. Одной парой этой инцолюции являются касательные s_1, s_2 к образам асимптотических линий средней поверхности на (A').

3. Конгруэнции W такие, что *линеаризирующая прямая* касательной к асимптотической линии γ_2 поверхности (F_2) в точке A_2 *является сопряженной лучу конгруэнции, касающемуся в точке A_2 фокальной поверхности* (F_2). Эти конгруэнции, обозначаемые нами через d_2, зависят от пяти функций одного переменного. Геометрическая характеристика этих конгруэнций d_2 та же самая, как и для d_1, с той лишь разницей, что

$$(q_1 q_2 t r_1) = - \frac{g^2}{a^2} \cdot \frac{1 - J_7}{1 + 4J_8}\,.$$

4. Через d_3 мы обозначаем конгруэнции W, для которых *касательная в точке A_2 к асимптотической линии γ_2 на поверхности* (F_2) *является $\mathscr{A}$-характеристической*, причем ее каноническая прямая делит пополам угол торсальных касательных в точке A средней поверхности конгруэнции. Если имеет место (28), то конгруэнции d_3 зависят от двух функций одного переменного. Если q_1, q_2 — касательные к образу торсальных кривых на (A'); p_1, p_2 — касательные к асимптотическим линиям поверхности (A'); t — касательная к сферическому образу асимптотической линии γ_2 поверхности (F_2), то для конгруэнции d_3 прямая p_1 совпадет с t и

$$(q_1 q_2 t p_2) = \frac{a^2}{g^2} \cdot \frac{J_6 + 4J_8}{J_7 - 4J_9}\,,$$

где a, J — инварианты конгруэнции, исследованной в [1].

Résumé

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS UN ESPACE AFFIN

BOHUMIL CENKL, Praha

Dans un espace affin à trois dimensions toutes deux surfaces sont en déformation affine du premier ordre. Elles sont en déformation affine du second ordre si et seulement si elles sont affinement équivalentes. Il n'est donc pas possible de transporter dans l'espace affin l'étude des congruences D non-paraboliques de l'espace projectif. Mais si nous prenons au lieu d'une déformation du second ordre des surfaces focales des congruences une condition plus faible: une transformation linéarisante, nous trouvons un moyen de distinguer certains types de congruences qui, à ce que je sais, n'ont pas été étudiés jusqu'à présent. La notion de transformation linéarisante a été introduite par E. ČECH [3]. La correspondance C entre les surfaces focales est déterminée par la congruence de droites (sont en correspondance les points de contact de la droite de la congruence avec les surfaces focales). Soit $\mathscr{A}$ une affinité de l'espace affin en question sur lui-même, qui est une affinité tangente à la correspondance C.

Dans le présent travail, j'envisage quatre types différents de congruence W — je les désigne par d, d_1, d_2, d_3.

1. Supposons que la droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique γ_2 au point A_2 de la surface (F_2) soit $\mathscr{A}$-principale, c'est-à-dire que les courbes γ_2 et $\mathscr{A}C^{-1}\gamma_2$ ($\mathscr{A}C^{-1}\gamma_2 = \gamma_2$ étant une asymptotique sur (F_1)) aient un contact analytique du second ordre (les surfaces focales sont en demi-déformation affine). Les congruences de ce type seront désignées par d. Si (20) a lieu, les congruences d dépendent de deux fonctions d'une variable; elles sont caractérisées par les équations (10) dont la signification est la suivante: Soient p_1, p_2 les tangentes aux courbes torsales $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = 0$ au point A de la surface centrale (A); soient q_1, q_2 les tangentes asymptotiques à la surface centrale au point A'. Soit r la tangente au point A à la transformée sur (A) de l'asymptotique γ_1 de la surface focale (F_1). De manière analogue, soient u_1, u_2 les tangentes au point A' sur la surface (A') (indicatrice de la congruence) aux transformées des lignes torsales; soient v_1, v_2 les tangentes asymptotiques de l'indicatrice; s la tangente à la transformée de l'asymptotique γ_1 de la surface focale (F_1). Les équations (10) sont alors caractérisées par la coïncidence des couples de droites s, v_1 et r, q_1 et par ce que $(p_1p_2rq_2) = \lambda_s$, $(u_1u_2sv_2) = \lambda_i$, λ_s et λ_i étant donnés par les équations (22). a, g, J figurant dans ces équations sont les invariants de la congruence, étudiés dans [1].

2. La droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique γ_2 sur (F_2) est la droite de la congruence qui passe par le point A_2. Je désigne par d_1 les congruences de ce type; elles dépendent de cinq fonctions d'une variable. Géométriquement, elles sont caractérisées ainsi: p_1, p_2 sont les tangentes asymptotiques au point A' de la surface (A') — indicatrice de la congruence; q_1, q_2 sont les tangentes aux transformées des lignes torsales sur (A') au point A'; r_1, r_2 les tangentes aux transformées des asymptotiques des surfaces focales sur la surface (A'). Supposons qu'il existe sur (A') une courbe γ passant par (A') et ayant en ce point t pour tangente où

$$(q_1q_2tr_1) = \frac{g^2}{a^2}\,\frac{4J_9 - 1}{J_6 - 1}.$$

Deux paires de tangentes p_1, p_2 et r_1, t déterminent une involution dans le plan tangent à la surface (A') au point A'. Une paire de cette involution est celle des tangentes s_1, s_2 aux transformées des asymptotiques de la surface centrale sur (A').

3. Les congruences W telles que la droite linéarisante de la tangente à l'asymptotique γ_2 de la surface (F_2) au point A_2 est conjuguée à la droite de la congruence tangente au point A_2 à la surface focale (F_2). Ces congruences seront désignées par d_2. Elles dépendent de cinq fonctions d'une variable. Les caractéristiques géométriques de ces congruences d_2 sont les mêmes que dans le cas des congruences d_1 avec la seule différence

$$(q_1q_2tr_1) = -\frac{g^2}{a^2}\,\frac{1 - J_7}{1 + 4J_8}.$$

4. Je désigne par d_3 les congruences W pour lesquelles la tangente au point A_2 à l'asymptotique γ_2 sur la surface (F_2) est $\mathscr{A}$-caractéristique et dont la droite caractéristique est la bissectrice de l'angle des tangentes torsales au point A de la surface centrale de la congruence. Si (28) a lieu, les congruences d_3 dépendent de deux fonctions d'une variable. Si q_1, q_2 sont des tangentes à la transformée des lignes torsales sur (A'); p_1, p_2 des tangentes aux asymptotiques de la surface (A'); t une tangente à la transformée sphérique de l'asymptotique γ_2 de la surface (F_2), alors pour les congruences d_3 la droite p_1 coïncide avec t et l'on a

$$(q_1 q_2 t p_2) = \frac{a^2}{g^2} \frac{J_6 + 4J_8}{J_7 - 4J_9}$$

où a, J sont les invariants de la congruence étudiés dans [1].