Časopis pro pěstování matematiky

Milan Koman

Úloha o šachovnici a její zobecnění v teorii grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 3, 344--351

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117383`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

ÚLOHA O ŠACHOVNICI A JEJÍ ZOBECNĚNÍ V TEORII GRAFŮ

MILAN KOMAN, Praha

(Došlo dne 25. května 1960)

V první části příspěvku se řeší úloha o počtu různých n-tahových přemístěních věže na dané šachovnici. V druhé části je úloha zobecněna pro speciální třídu orientovaných grafů.

1. V běžné šachové praxi musí hráči často uvažovat, jakým způsobem je možno přemístit určitou figuru z daného postavení na zvolené pole šachovnice. Mnohdy lze tuto úlohu řešit více způsoby. Potom je třeba rozhodnout, který z možných způsobů je při daném rozmístění figur nejvýhodnější. Nechceme-li v takovém případě na některou možnost zapomenout, je důležité znát počet způsobů, kterými lze za daných podmínek toto přemístění uskutečnit.

Zde si všimneme pouze následující úlohy o přemísťování věže na libovolné prázdné obdélníkové nebo čtvercové šachovnici:

Úloha. *Na prázdné obdélníkové nebo čtvercové šachovnici o* $p \, . \, q$ *polích* (p, q jsou přirozená čísla větší než jedna, přičemž p značí počet sloupců a q počet řádků dané šachovnice) *jsou dána dvě* (nikoliv nutně navzájem různá) *pole* P *a* P'. *Dále je dáno přirozené číslo* n. *Zjistěte, kolika různými způsoby lze přemístit* n *tahy věž z pole* P *na pole* P'.

Lze očekávat, že hledaný počet přemístění závisí nejen na čísle n a „rozměrech" p, q dané šachovnice, ale také na volbě polí P a P'. Vzhledem k tomu budeme tento počet značit $F^{(n)}(P, P')$.

Abychom se v dalším vyjadřovali rychle a přitom dobře, uvedeme nejdříve několik pomocných úvah a označení:

Budiž dána obdélníková nebo čtvercová šachovnice o $p \, . \, q$ polích (p značí počet sloupců a q počet řádků šachovnice). Dále budiž dána v euklidovské rovině $\mathbf{E}_2$ množina $\mathfrak{S}_{p,q}$ mřížových bodů $A = [a_1, a_2]$, kde $a_1 = 1, 2, \ldots, p$; $a_2 = 1, 2, \ldots, q$. Potom zřejmě existuje prosté zobrazení $\mathbf{Z}$ množiny všech polí dané šachovnice na množinu $\mathfrak{S}_{p,q}$, pro které platí:

Je-li obrazem pole P při zobrazení $\mathbf{Z}$ mřížový bod $A = [a_1, a_2] \in \mathfrak{S}_{p,q}$ a jsou-li sloupce i řádky dané šachovnice očíslovány v přirozeném uspořádání, potom souřadnice a_1 udává příslušný sloupec a souřadnice a_2 příslušný řádek šachovnice, ve kterém leží dané pole P.

Vzhledem k tomu můžeme danou šachovnici ztotožnit s množinou $\mathfrak{S}_{p,q}$. V tom případě si však musíme říci, co rozumíme na šachovnici $\mathfrak{S}_{p,q}$ tahem a přemístěním věže.

Tahem věže rozumíme uspořádanou dvojici polí (A, B), kde $A, B \in \mathfrak{S}_{p,q}$, pro kterou platí některý ze vztahů

a) $\operatorname{sign} |a_1 - b_1| = 1\,, \quad \operatorname{sign} |a_2 - b_2| = 0\,,$

b) $\operatorname{sign} |a_1 - b_1| = 0\,, \quad \operatorname{sign} |a_2 - b_2| = 1\,.$

Přemístěním věže n tahy z pole A na pole B $(A, B \in \mathfrak{S}_{p,q})$ rozumíme uspořádanou n-tici tahů

$$(C_0, C_1), (C_1, C_2), \ldots, (C_{n-1}, C_n)\,,$$

kde $C_i \in \mathfrak{S}_{p,q}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $C_0 = A$, $C_n = B$.

V dalším se nám osvědčí ještě další označení:

Budiž dána obdélníková nebo čtvercová šachovnice $\mathfrak{S}_{p,q}$, kde $p, q > 1$, a pole $A = [a_1, a_2] \in \mathfrak{S}_{p,q}$. Potom množinu všech polí $X = [x_1, x_2] \in \mathfrak{S}_{p,q}$, pro něž platí

a) $\operatorname{sign} |a_1 - x_1| = 0$, $\operatorname{sign} |a_2 - x_2| = 0$, označíme $\mathfrak{M}^A_{[0,0]}$;

b) $\operatorname{sign} |a_1 - x_1| = 1$, $\operatorname{sign} |a_2 - x_2| = 0$, označíme $\mathfrak{M}^A_{[1,0]}$;

c) $\operatorname{sign} |a_1 - x_1| = 0$, $\operatorname{sign} |a_2 - x_2| = 1$, označíme $\mathfrak{M}^A_{[0,1]}$;

d) $\operatorname{sign} |a_1 - x_1| = 1$, $\operatorname{sign} |a_2 - x_2| = 1$, označíme $\mathfrak{M}^A_{[1,1]}$.

Snadno se zjistí, že množina $\mathfrak{M}^A_{[0,0]}$ se skládá pouze z jediného pole A.

Množina $\mathfrak{M}^A_{[1,0]}$ se skládá ze všech polí ležících v témže řádku s polem A, ovšem s výjimkou pole A. Obsahuje tedy množina $\mathfrak{M}^A_{[1,0]}$ pro všechna $A \in \mathfrak{S}_{p,q}$ vždy $p - 1$ různých polí.

Množina $\mathfrak{M}^A_{[0,1]}$ se skládá ze všech polí ležících v témže sloupci s polem A, ovšem opět s výjimkou pole A. Pro všechna $A \in \mathfrak{S}_{p,q}$ obsahuje množina $\mathfrak{M}^A_{[0,1]}$ vždy $q - 1$ různých polí.

Množina $\mathfrak{M}^A_{[1,1]}$ se skládá ze všech ostatních polí šachovnice $\mathfrak{S}_{p,q}$ a obsahuje $(p - 1)(q - 1)$ různých polí.

Nyní máme již všechno připraveno a můžeme začít s řešením naší úlohy. Předně ukážeme některé vlastnosti čísel $F^{(n)}(A, B)$, kde $A, B \in \mathfrak{S}_{p,q}$.

Je-li dána šachovnice $\mathfrak{S}_{p,q}$ $(p, q > 1)$ a přirozené číslo n, potom číslo $F^{(n)}(A, B)$ závisí pouze na tom, který platí ze vztahů

$$B \in \mathfrak{M}^A_{[0,0]}\,, \quad B \in \mathfrak{M}^A_{[1,0]}\,, \quad B \in \mathfrak{M}^A_{[0,1]}\,, \quad B \in \mathfrak{M}^A_{[1,1]}\,,$$

nikoliv však na samotné volbě polí $A, B \in \mathfrak{S}_{p,q}$.

Neboli jinými slovy: *Jestliže pro pole* $A, A', B, B' \in \mathfrak{S}_{p,q}$ $(p, q > 1)$ *platí některý ze vztahů*

a) $B \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,0]}$, $B' \in \mathfrak{M}^{A'}_{[0,0]}$,
b) $B \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,0]}$, $B' \in \mathfrak{M}^{A'}_{[1,0]}$,
c) $B \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,1]}$, $B' \in \mathfrak{M}^{A'}_{[0,1]}$,
d) $B \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,1]}$, $B' \in \mathfrak{M}^{A'}_{[1,1]}$,

potom pro všechna přirozená čísla n platí

$$F^{(n)}(A, B) = F^{(n)}(A', B')\,.$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

1. Pro $n = 1$ je tvrzení správné, neboť zřejmě pro všechna $A, B \in \mathfrak{S}_{p,q}$ platí

$$\begin{aligned} B \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,0]} &\Rightarrow F^{(n)}(A, B) = 0\,, \\ B \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,0]} &\Rightarrow F^{(n)}(A, B) = 1\,, \\ B \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,1]} &\Rightarrow F^{(n)}(A, B) = 1\,, \\ B \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,1]} &\Rightarrow F^{(n)}(A, B) = 0\,. \end{aligned}$$

Protože pro čárkované elementy dostaneme tytéž vztahy, je tím naše tvrzení pro $n = 1$ dokázáno.

2. Nyní za předpokladu, že tvrzení platí pro jisté $n \geqq 1$, dokážeme jeho platnost i pro $n + 1$.

Nechť $B \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,0]}$. Chceme-li přemístit věž $n + 1$ tahy z pole A na pole B, musíme zřejmě přemístit věž n tahy na některé pole množiny $\mathfrak{M}^{A}_{[1,0]}$ nebo $\mathfrak{M}^{A}_{[0,1]}$. Je-li tedy $B \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,0]}$, potom

$$F^{(n+1)}(A, B) = \sum_{X \in \mathfrak{M}^{A}[1,0]} F^{(n)}(A, X) + \sum_{Y \in \mathfrak{M}^{A}[1,0]} F^{(n)}(A, Y)\,. \tag{1}$$

Protože množina $\mathfrak{M}^{A}_{[1,0]}$ obsahuje $p - 1$ polí a množina $\mathfrak{M}^{A}_{[0,1]}$ obsahuje $q - 1$ polí, můžeme vzhledem k indukčnímu předpokladu přepsat vztah (1) ve tvaru

$$F^{(n+1)}(A, B) = (p - 1)\, F^{(n)}(A, X) + (q - 1)\, F^{(n)}(A, Y)\,, \tag{2}$$

kde $B \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,0]}$, $X \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,0]}$, $Y \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,1]}$.

Úplně stejným způsobem dostaneme i následující vztahy:

$$F^{(n+1)}(A, B) = F^{(n)}(A, A) + (p - 2)\, F^{(n)}(A, X) + (q - 1)\, F^{(n)}(A, Y)\,, \tag{3}$$

kde $B, X \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,0]}$, $Y \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,1]}$;

$$F^{(n+1)}(A, B) = F^{(n)}(A, A) + (q - 2)\, F^{(n)}(A, X) + (p - 1)\, F^{(n)}(A, Y)\,, \tag{4}$$

kde $B, X \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,1]}$, $Y \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,1]}$;

$$F^{(n+1)}(A, B) = F^{(n)}(A, X) + F^{(n)}(A, Y) + (p + q - 4)\, F^{(n)}(A, Z)\,, \tag{5}$$

kde $B, Z \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,1]}$, $X \in \mathfrak{M}^{A}_{[1,0]}$, $Y \in \mathfrak{M}^{A}_{[0,1]}$.

Protože pro čárkované elementy platí totéž, je tím naše tvrzení dokázáno.

Právě dokázané tvrzení nám umožňuje zjednodušit označení:

a) Je-li $B \in \mathfrak{M}^A_{[0,0]}$, potom označíme $F^{(n)}(A, B) = M^{(n)}_{[0,0]}$;
b) Je-li $B \in \mathfrak{M}^A_{[1,0]}$, potom označíme $F^{(n)}(A, B) = M^{(n)}_{[1,0]}$;
c) Je-li $B \in \mathfrak{M}^A_{[0,1]}$, potom označíme $F^{(n)}(A, B) = M^{(n)}_{[0,1]}$;
d) Je-li $B \in \mathfrak{M}^A_{[1,1]}$, potom označíme $F^{(n)}(A, B) = M^{(n)}_{[1,1]}$.

Nyní můžeme dosažené výsledky (2)–(5) formulovat takto:

Pro čísla $M^{(n)}_{[0,0]}$, $M^{(n)}_{[1,0]}$, $M^{(n)}_{[0,1]}$, $M^{(n)}_{[1,1]}$ platí rekurentní formule

$$\begin{aligned}
M^{(n+1)}_{[0,0]} &= (p-1)\,M^{(n)}_{[1,0]} + (q-1)\,M^{(n)}_{[0,1]}\,,\\
M^{(n+1)}_{[1,0]} &= M^{(n)}_{[0,0]} + (p-2)\,M^{(n)}_{[1,0]} + (q-1)\,M^{(n)}_{[1,1]}\,,\\
M^{(n+1)}_{[0,1]} &= M^{(n)}_{[0,0]} + (q-2)\,M^{(n)}_{[0,1]} + (p-1)\,M^{(n)}_{[1,1]}\,,\\
M^{(n+1)}_{[1,1]} &= M^{(n)}_{[1,0]} + M^{(n)}_{[0,1]} + (p+q-4)\,M^{(n)}_{[1,1]}\,,
\end{aligned}$$

přičemž je

(6) $$M^{(1)}_{[0,0]} = M^{(1)}_{[1,1]} = 0\,, \quad M^{(1)}_{[1,0]} = M^{(1)}_{[0,1]} = 1\,.$$

V právě uvedeném tvrzení můžeme vztahy (6) nahradit vztahy

(7) $$M^{(0)}_{[0,0]} = 1\,, \quad M^{(0)}_{[1,0]} = M^{(0)}_{[0,1]} = M^{(0)}_{[1,1]} = 0\,.$$

Nejlepší odpověď na naši úlohu však dávají následující rovnice, pomocí kterých určíme čísla $M^{(n)}_{[0,0]}$, $M^{(n)}_{[1,0]}$, $M^{(n)}_{[0,1]}$, $M^{(n)}_{[1,1]}$ přímo:

Budiž dána šachovnice $\mathfrak{S}_{p,q}$, kde $p, q > 1$. Potom platí:

$$\begin{aligned}
M^{(n)}_{[0,0]} &= \frac{1}{pq}\left[(p+q-2)^n + (q-1)(p-2)^n + (p-1)(q-2)^n + (p-1)\,.\right.\\
&\quad\left.\,.\,(q-1)(-2)^n\right],\\
M^{(n)}_{[1,0]} &= \frac{1}{pq}\left[(p+q-2)^n + (q-1)(p-2)^n - (q-2)^n - (q-1)(-2)^n\right],\\
M^{(n)}_{[0,1]} &= \frac{1}{pq}\left[(p+q-2)^n - (p-2)^n + (p-1)(q-2)^n - (p-1)(-2)^n\right],\\
M^{(n)}_{[1,1]} &= \frac{1}{pq}\left[(p+q-2)^n - (p-2)^n - (q-2)^n + (-2)^n\right].
\end{aligned}$$

Správnost těchto rovnic se snadno dokáže úplnou indukcí.

2. Všimněme si nyní, že naši úlohu můžeme formulovat jako úlohu z teorie grafů:

Označme $\mathbf{G}(\mathfrak{S}_{p,q})$ orientovaný graf, jehož uzly jsou mřížové body množiny $\mathfrak{S}_{p,q}$ a orientované hrany jsou uspořádané dvojice uzlů (A, B), kde $A, B \in \mathfrak{S}_{p,q}$, a pro které platí některý ze vztahů:

$$B \in \mathfrak{M}^A_{[1,0]}\,, \quad B \in \mathfrak{M}^A_{[0,1]}$$

(tzn. orientované hrany (A, B) jsou definované úplně stejně jako výše tahy věží). Nyní můžeme danou úlohu formulovat takto:

Úloha. *Buďtež dány dva uzly A, B orientovaného grafu $\mathbf{G}(\mathfrak{S}_{p,q})$, kde $p, q > 1$. Nechť je dále dáno přirozené číslo n. Určete počet $F^{(n)}(A, B)$ různých drah (C_0, C_1), $(C_1, C_2), \ldots, (C_{n-1}, C_n)$, kde $C_i \in \mathfrak{S}_{p,q}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $C_0 = A$, $C_n = B$.*

Jestliže ovšem formulujeme naši úlohu o šachovnici jako úlohu z teorie grafů, nabízí se ihned další zobecnění. Nejdříve ovšem musíme uvést několik přípravných úvah a označení.

Označení. 1. Budiž dáno k přirozených čísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ větších než 1. Potom množinu všech mřížových bodů $A = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$ k-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_k$, pro něž platí

$$a_i = 1, 2, \ldots, p_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

označíme $\mathfrak{S}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$.

Vektor $[p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_k - 1]$ označíme $\mathbf{p}$.

2. Množinu všech vektorů $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ k-rozměrného vektorového prostoru $\mathbf{V}_k$, pro něž platí

$$v_i = 0 \text{ nebo } 1 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

označíme $\mathfrak{V}_k$.

Vektor $[1, 1, \ldots, 1] \in \mathfrak{V}_k$ označíme $\mathbf{j}$.

3. Množinu všech vektorů $\mathbf{d}_i = [\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \ldots, \Delta_{ik}] \in \mathfrak{V}_k$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$, a kde Δ_{ij} je známý Kroneckerův symbol, pro který platí

$$\Delta_{ij} = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & \text{je-li } i = j\,, \\ 0 & \text{je-li } i \neq j\,, \end{array} \right.$$

označíme ϑ_k.

4. Budiž dán mřížový bod $A = [a_1, a_2, \ldots, a_k] \in \mathfrak{S}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ a libovolný prvek $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_k] \in \mathfrak{V}_k$. Potom množinu všech mřížových bodů $X = [x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_k] \in \mathfrak{S}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$, pro něž platí

$$\operatorname{sign} |a_i - x_i| = v_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

označíme $\mathfrak{M}^A_{\mathbf{v}}$ resp. $\mathfrak{M}^A_{[v_1, v_2, \ldots, v_k]}$.

5. Označme $\mathbf{G}(\mathfrak{S}_{p_1, p_2, \ldots, p_k})$ orientovaný graf, jehož uzly jsou mřížové body množiny $\mathfrak{S}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ a orientované hrany jsou takové uspořádané dvojice uzlů (A, B), kde $A, B \in \mathfrak{S}_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$, pro které platí některý ze vztahů

$$B \in \mathfrak{M}^A_{\mathbf{d}}\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{d} \in \vartheta_k\,.$$

Nyní již můžeme přistoupit k formulaci i řešení naší zobecněné úlohy:

Úloha. *Je dán orientovaný graf* $\mathbf{G}(\mathfrak{S}_{p_1,p_2,\ldots,p_k})$, *kde* $p_i > 1$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Dále buďtež dány dva uzly* $A, B \in \mathfrak{S}_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$ *a přirozené číslo* n. *Určete počet* $F^{(n)}(A, B)$ *různých drah* (C_0, C_1), (C_1, C_2), ..., (C_{n-1}, C_n), *kde* $C_i \in \mathfrak{S}_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $C_0 = A$, $C_n = B$.

Podobně jako výše pro „dvojrozměrné" grafy zjistí se snadno i zde, že *číslo* $F^{(n)}(A, B)$ *závisí vedle přirozeného čísla* n *a čísel* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *pouze na tom, který platí ze vztahů* $B \in \mathfrak{M}_{\mathbf{v}}^A$, kde $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}_k$ *a nikoliv na samotné volbě uzlů* A, B.

Můžeme proto i zde zjednodušit označení: Je-li $B \in \mathfrak{M}_{\mathbf{v}}^A$, kde $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}_k$, potom označíme $F^{(n)}(A, B) = M_{\mathbf{v}}^{(n)}$.

Protože každá orientovaná hrana (A, B) grafu $\mathbf{G}(\mathfrak{S}_{p_1,p_2,\ldots,p_k})$ spojuje pouze takové dva uzly A, B, které se liší pouze v jediné souřadnici, snadno se ověří následující tvrzení:

Budiž dán orientovaný graf $\mathbf{G}(\mathfrak{S}_{p_1,p_2,\ldots,p_k})$, *kde* $p_i > 1$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Budiž* $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_k] \in \mathfrak{V}_k$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_k], \in \mathbf{V}_k$ *a definujme číslo* $\alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ *tímto způsobem:*

1. *je-li* $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \vartheta_k$, *potom* $\alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = 1$;
2. *je-li* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, *potom* $\alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{j}) = \sum_{i=1}^{k} u_i(p_i - 2)$;
3. *je-li* $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in \vartheta_k$, *potom* $\alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{k} (v_i - u_i)(p_i - 1)$;
4. *jestliže* $\pm(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \notin \vartheta_k$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, *potom* $\alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = 0$.

Potom pro čísla $M_{\mathbf{u}}^{(n)}$, *kde* $\mathbf{u} \in \mathfrak{V}_k$, *platí rekurentní formule*

$$M_{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \sum_{\mathbf{v} \in \mathfrak{V}_k} \alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}} M_{\mathbf{v}}^{(n)}, \tag{8}$$

přičemž

$$M_{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \textit{pro} \quad \mathbf{u} \in \vartheta_k, \\ 0 & \textit{pro} \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{V}_k - \vartheta_k \end{cases}$$

resp.

$$M_{\mathbf{u}}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \textit{pro} \quad \mathbf{u} = [0, 0, \ldots, 0] \in \mathfrak{V}_k, \\ 0 & \textit{pro} \quad \mathbf{u} \neq [0, 0, \ldots, 0], \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V}_k. \end{cases}$$

Všimněme si ještě, že vztah (8) můžeme upravit takto:

$$M_{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \sum_{\mathbf{v} \in \mathfrak{V}_k} \alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}} M_{\mathbf{v}}^{(n)} = \sum_{\substack{\mathbf{v} \in \mathfrak{V}_k \\ \mathbf{u}-\mathbf{v} \in \vartheta_k}} M_{\mathbf{v}}^{(n)} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{j}) M_{\mathbf{u}}^{(n)} + \sum_{\substack{\mathbf{v} \in \mathfrak{V}_k \\ \mathbf{v}-\mathbf{u} \in \vartheta_k}} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p}\, M_{\mathbf{v}}^{(n)}.$$

Definujeme-li pro $\mathbf{v} \notin \mathfrak{V}_k$ číslo $M_{\mathbf{v}}^{(n)}$ jakkoliv, dostaneme odtud snadno

$$M_{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{k} u_j M_{\mathbf{u}-\mathbf{d}_j}^{(n)} + \sum_{j=1}^{k} u_j (p_j - 2) M_{\mathbf{u}}^{(n)} + \sum_{j=1}^{k} (1 - u_j)(p_j - 1) M_{\mathbf{u}+\mathbf{d}_j}^{(n)}. \tag{9}$$

Podobně jako pro „dvojrozměrné" grafy můžeme i zde vyjádřit čísla $M_{\mathbf{v}}^{(n)}$, kde $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}_k$, explicitně:

Budiž dán orientovaný graf $G(\mathfrak{S}_{p_1,p_2,\ldots,p_k})$, kde $p_i > 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Nechť $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_k] \in \mathfrak{V}_k$, $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_k] \in \mathfrak{V}_k$. Označme

$$\varphi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \prod_{i=1}^{k} [p_i(1 - u_i) - 1]^{v_i}, \quad \psi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{k} p_i(1 - v_i) - k.$$

Potom platí

$$M_{\boldsymbol{u}}^{(n)} = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_k} \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \varphi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \,.\, \psi^n(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) \,. \tag{10}$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí: 1. Dokážeme tvrzení pro $n = 0$. Počítejme výraz

$$\frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_k} \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \varphi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, \psi^0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_k} \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \varphi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \,.$$

Upravme nyní součet

$$\sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \varphi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{\substack{v_i = 0,1 \\ i = 1,2,\ldots,k}} \prod_{i=1}^{k} [p_i(1 - u_i) - 1]^{v_i} =$$

$$= \sum_{\substack{v_i = 0,1 \\ i = 1,2,\ldots,k \\ i \neq j}} [p_j(1 - u_j) - 1] \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} [p_i(1 - u_i) - 1]^{v_i} + \sum_{\substack{v_i = 0,1 \\ i = 1,2,\ldots,k \\ i \neq j}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} [p_i(1 - u_i) - 1]^{v_i} =$$

$$= \sum_{\substack{v_i = 0,1 \\ i = 1,2,\ldots,k \\ i \neq j}} p_j(1 - u_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} [p_i(1 - u_i) - 1]^{v_i} .$$

Odtud snadno úplnou indukcí dostaneme

$$\sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \varphi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \prod_{i=1}^{k} p_i(1 - u_i) \,.$$

Z tohoto vztahu již plyne snadno výše uvedené tvrzení pro $n = 0$.

2. Za předpokladu, že tvrzení platí pro jisté $n \geqq 0$, dokážeme jeho platnost i pro $n + 1$. Podle vztahů (9) a (10) postupnou úpravou dostaneme

$$M_{\boldsymbol{u}}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{k} (u_j M_{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d}_j}^{(n)} + u_j(p_j - 2) M_{\boldsymbol{u}}^{(n)} + (1 - u_j)(p_j - 1) M_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{d}_j}^{(n)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (u_j \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \prod_{i=1}^{k} [p_i(1 - u_i + \Delta_{ij}) - 1]^{v_i} \psi^n(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) +$$

$$+ u_j(p_j - 2) \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \prod_{i=1}^{k} [p_i(1 - u_i) - 1]^{v_i} \psi^n(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) +$$

$$+ (1 - u_j)(p_j - 1) \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \prod_{i=1}^{k} [p_i(1 - u_i - \Delta_{ij}) - 1]^{v_i} \psi^n(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v})) =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathfrak{V}_k} \psi^n(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) \sum_{j=1}^{k} (u_j [p_j(2 - u_j) - 1]^{v_j} + u_j(p_j - 2)[p_j(1 - u_j) - 1]^{v_j} +$$

$$+ (1 - u_j)(p_j - 1)(- p_j u_j - 1)^{v_j}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} [p_i(1 - u_i) - 1]^{v_i} .$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$u_j[p_j(2-u_j)-1]^{v_j}+u_j(p_j-2)[p_j(1-u_j)-1]^{v_j}+(1-u_j)(p_j-1)\,.$$
$$.(-p_ju_j-1)^{v_j}=[p_j(1-u_j)-1]^{v_j}[p_j(1-v_j)-1]\,.$$

Odtud dostáváme

$$M_u^{(n+1)}=\sum_{v\in\mathfrak{V}_k}\psi^n(p,v)\sum_{j=1}^{k}[p_j(1-v_j)-1]\prod_{i=1}^{k}[p_i(1-u_i)-1]^{v_i}=$$
$$=\sum_{v\in\mathfrak{V}_k}\varphi(p,u,v)\,\psi^n(p,v)\,.$$

Tím je důkaz proveden.

Резюме

ЗАДАЧА О ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

МИЛАН КОМАН (Milan Koman), Прага

В первой части статьи решается следующая задача: *На прямоугольной шахматной доске заданы два поля P и P'. Каково число $F^{(n)}(P, P')$ n-членных последовательностей ходов ладьи, переводящих ладью с поля P на поле P!*

Вторая часть статьи посвящена обобщению этой задачи для специального класса ориентированных графов $G(\mathfrak{S}_{p_1,p_2,\ldots,p_k})$.

Zusammenfassung

EINE SCHACHBRETTAUFGABE UND IHRE VERALLGEMEINERUNG IN DER THEORIE DER GRAPHEN

MILAN KOMAN, Praha

Im ersten Teil des Beitrags ist die Lösung folgender Schachbrettaufgabe gegeben: *Es seien auf einem rechteckigen Schachbrett zwei Felder P und P' gegeben. Man soll die Anzahl $F^{(n)}(P, P')$ der n-gliedrigen Turmzügefolgen bestimmen, die den Turm vom Feld P nach P' überführen.*

Der Zweite Teil des Beitrags behandelt die Verallgemeinerung dieser Aufgabe auf eine spezielle Klasse der gerichteten Graphen $G(\mathfrak{S}_{p_1,p_2,\ldots,p_k})$.