ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 86 * PRAHA 30. X. 1961 * ČÍSLO 4

O DIMENSI LEXIKOGRAFICKÉHO SOUČTU ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

VÍTĚZSLAV NOVÁK, Brno

(Došlo dne 5. května 1960)

V práci se pojednává o dimensi lexikografického součtu částečně uspořádaných množin ve vztahu k dimensi množiny indexů a dimensi složek, o vztahu **A**, **B**, **C**-homomorfismu k dimensi a k **A**, **B** zobrazení.

Buď N neprázdná částečně uspořádaná množina a $\{M_\alpha(\alpha \in N)\}$ systém neprázdných disjunktních částečně uspořádaných množin. *Lexikografickým součtem* množin M_α přes množinu N rozumíme podle M. M. DAYE (viz [1]) množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in N$, $y \in M_x$ částečně uspořádanou podle pravidla: $[x_1, y_1] < [x_2, y_2]$ právě tehdy, když $x_1 < x_2$ nebo $x_1 = x_2$ a $y_1 < y_2$. Tuto částečně uspořádanou množinu značíme $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$.

Buď ϱ částečné uspořádání na množině N. Nechť τ je lineární uspořádání na N takové, že $\varrho \subset \tau$. Pak pravíme, že τ je *lineárním prodloužením* částečného uspořádání ϱ.

Nechť $\{\tau_i\}$, $i < \alpha$ je *posloupnost* lineárních uspořádání na množině N. Částečné uspořádání ϱ na N definované takto: $\varrho = \bigcap_i \tau_i$ se nazývá *realisované posloupností* lineárních uspořádání $\{\tau_i\}$.

Dimensí částečně uspořádané množiny N (částečně uspořádané relací ϱ) se rozumí kardinální číslo moh α, kde α je nejmenší ordinální číslo takové, že posloupnost lineárních prodloužení $\{\tau_i\}$, $i < \alpha$ realisuje ϱ.

Lemma 1. *Nechť M je částečně uspořádaná množina a nechť $N \subset M$. Pak* $\dim N \leqq \dim M$.

D ů k a z. Nechť ϱ je částečné uspořádání na M a σ příslušné částečné uspořádání na N. Nechť $\dim M = \mathfrak{m}$. Buď $\{\mathsf{L}_i\}$, $i < \alpha$ posloupnost lineárních uspořádání na M, která realisuje ϱ a taková, že moh $\alpha = \mathfrak{m}$. Ke každému L_i přiřaďme lineární uspořádání K_i na N definované takto:

$$x < y \text{ v } \mathsf{K}_i \Leftrightarrow x < y \text{ v } \mathsf{L}_i .$$

Je zřejmé, že posloupnost K_i, $i < \alpha$ realisuje σ a jest moh $\alpha = \mathfrak{m}$, takže $\dim N \leqq \mathfrak{m}$.

Věta 1. *Buď N částečně uspořádaná množina a $\{M_\alpha(\alpha \in N)\}$ systém disjunktních neprázdných částečně uspořádaných množin. Pak platí:*

$$\dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha = \sup \{\dim N, \dim M_\alpha(\alpha \in N)\} .$$

Důkaz. Buď $\mathfrak{m} = \sup \{\dim N, \dim M_\alpha(\alpha \in N)\}$. Nechť ϱ je částečné uspořádání na N, σ_α částečné uspořádání na M_α. Nechť $\{\mathsf{L}_i\}$, $i < \beta$ je posloupnost lineárních uspořádání na N, která realisuje ϱ a taková, že moh $\beta = \mathfrak{m}$; nechť $\{\mathsf{K}_j^\alpha\}$, $j < \beta$ je posloupnost lineárních uspořádání na M_α, která realisuje σ_α. Takové posloupnosti vždy existují. Definujme lineární uspořádání T_{ij} na $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ takto: $[x_1, y_1] < [x_2, y_2]$ v T_{ij}, když a jen když $x_1 < x_2$ v L_i nebo $x_1 = x_2$ a $y_1 < y_2$ v $\mathsf{K}_j^{x_1}$.

a) T_{ij} je zřejmě pro každé i, j vskutku lineárním uspořádáním na $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Snadno se totiž přesvědčíme, že T_{ij} je relace asymetrická, transitivní a úplná.

b) Pro každé i, j je T_{ij} lineárním prodloužením $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$: nechť $[x_1, y_1] < [x_2, y_2]$ v $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Pak buď $x_1 < x_2$ v ϱ nebo $x_1 = x_2$ a $y_1 < y_2$ v σ_{x_1}. V prvém případě $x_1 < x_2$ v každém L_i a tedy $[x_1, y_1] < [x_2, y_2]$ v každém T_{ij}. V druhém případě $y_1 < y_2$ v každém $\mathsf{K}_j^{x_1}$ a tedy rovněž $[x_1, y_1] < [x_2, y_2]$ v každém T_{ij}.

c) Posloupnost $\{\mathsf{T}_{ii}\}$, $i < \beta$ realisuje $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Nechť totiž $[x_1, y_1] \parallel [x_2, y_2]$. Pak buď $x_1 \parallel x_2$ v ϱ nebo $x_1 = x_2$ a $y_1 \parallel y_2$ v σ_{x_1}. V prvém případě existují L_{i_0}, L_{i_1} taková, že v L_{i_0} platí $x_1 < x_2$ a v L_{i_1} $x_2 < x_1$. Pak v $\mathsf{T}_{i_0 i_0}$ platí $[x_1, y_1] < [x_2, y_2]$ a v $\mathsf{T}_{i_1 i_1}$ platí $[x_2, y_2] < [x_1, y_1]$. V druhém případě existují $\mathsf{K}_{j_0}^{x_1}$, $\mathsf{K}_{j_1}^{x_1}$ taková, že v $\mathsf{K}_{j_0}^{x_1}$ platí $y_1 < y_2$ a v $\mathsf{K}_{j_1}^{x_1}$ platí $y_2 < y_1$. Pak v $\mathsf{T}_{j_0 j_0}$ platí $[x_1, y_1] < [x_2, y_2]$ a v $\mathsf{T}_{j_1 j_1}$ platí $[x_2, y_2] < [x_1, y_1]$. Tedy vskutku $\{\mathsf{T}_{ii}\}$, $i < \beta$ realisuje $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ a ježto moh $\beta = \mathfrak{m}$, máme $\dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha \leqq \mathfrak{m}$.

d) Označme S podmnožinu v $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ utvořenou takto: v každé množině M_α vyberme jeden prvek x_α. Položme $S = \{[\alpha, x_\alpha]; \alpha \in N\}$. Pak S je isomorfní s N, $S \subset \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$; odtud podle lemmatu 1 plyne

$$\dim N = \dim S \leqq \dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha .$$

Označme P_α podmnožinu v $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ utvořenou takto: $P_\alpha = \{[\alpha, x]; x \in M_\alpha, \alpha \text{ pevné}\}$.

Pak P_α je isomorfní s M_α a jest $P_\alpha \subset \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Odtud podle lemmatu 1 plyne

$$\dim M_\alpha = \dim P_\alpha \leqq \dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha .$$

Celkem $\dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha \geqq \mathfrak{m}$. Z c) a d) plyne: $\dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha = \mathfrak{m}$.

Z věty 1 plynou některé zajímavé **důsledky**:

1. Položme $N = \boldsymbol{n}$;[1]) pak $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ a $\dim N = 1$. Tedy:

$$\dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha = \dim (M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n) = \max (\dim M_1, \dim M_2, \ldots, \dim M_n) .$$

2. Položme $N = n$; pak $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ a $\dim N = 2$. Tedy:

$$\dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha = \dim (M_1 + M_2 + \ldots + M_n) = \max (2, \dim M_1, \dim M_2, \ldots, \dim M_n) .$$

3. Položme $M_\alpha = M$ pro každé $\alpha \in N$, pak $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha = N \odot M$. Tedy

$$\dim (N \odot M) = \max (\dim N, \dim M) .$$

Buďte M, N částečně uspořádané množiny. Nechť φ je zobrazení M na N. φ se nazývá **A**-*homomorfismus*, má-li vlastnosti:

(1) $x < y \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y)$, (2) $x \parallel y \Rightarrow \varphi(x) \parallel \varphi(y)$.

φ se nazývá **B**-*homomorfismus*, má-li vlastnosti:

(3) $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$, (4) $x \parallel y \Rightarrow \varphi(x) \parallel \varphi(y)$ nebo $\varphi(x) = \varphi(y)$.

φ se nazývá **C**-*homomorfismus*, má-li vlastnosti (1) a (4).

Platí: φ je **A**-homomorfismem tehdy a jen tehdy, když rozklad na M příslušný k φ je rozkladem ve vložené řetězce. φ je **B**-homomorfismem tehdy a jen tehdy, když rozklad na M příslušný k φ je rozkladem ve vložené částečně uspořádané množiny, jejichž libovolné dva různé prvky jsou nesrovnatelné. φ je **C**-homomorfismem tehdy a jen tehdy, když rozklad na M příslušný k φ je rozkladem ve vložené částečně uspořádané množiny (viz [3]).

Nechť φ je zobrazení množiny M na množinu N. Pro libovolné $\alpha \in N$ označíme M_α množinu všech vzorů prvku α při zobrazení φ.

Lemma 2. *Zobrazení φ částečně uspořádané množiny M na částečně uspořádanou množinu N je* **C**-*homomorfismem tehdy a jen tehdy, když $M = \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$.*

Důkaz. 1. Nechť $M = \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Přiřaďme prvku $[\alpha, x]$ množiny $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ prvek $\alpha \in N$. Pak toto zobrazení φ je **C**-homomorfismus. Nechť totiž $[\alpha, x] < [\beta, y]$ v $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$.

---

[1]) $\boldsymbol{n}$ značí podle G. Birkhoffa (viz [5]) množinu všech ordinálních čísel menších než n neboli lineárně uspořádanou množinu z n prvků, n značí množinu všech kardinálních čísel menších než n neboli neuspořádanou množinu z n prvků. Operace ordinálního a kardinálního součtu a ordinálního součinu, jež jsou speciálními případy lexikografického součtu, rovněž zavádí Birkhoff v [5].

Pak buď $\alpha < \beta$ nebo $\alpha = \beta$ a $x < y$. V každém případě však $\varphi([\alpha, x]) \leqq \varphi([\beta, y])$. Nechť $[\alpha, x] \parallel [\beta, y]$ v $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Pak buď $\alpha \parallel \beta$ nebo $\alpha = \beta$ a $x \parallel y$. V prvém případě $\varphi([\alpha, x]) \parallel \varphi([\beta, y])$, ve druhém $\varphi([\alpha, x]) = \varphi([\beta, y])$.

2. Nechť φ je **C**-homomorfismus M na N. Buď $x \in M$; přiřaďme k němu dvojici $[\varphi(x), x] \in \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Je-li obráceně $[y, x] \in \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$, je $y \in N$ a $x \in M_y$, takže $\varphi(x) = y$, tj. $[y, x] = [\varphi(x), x]$ a dvojice $[y, x]$ je přiřazena prvku $x \in M$. Tedy naše zobrazení je zobrazením M na $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$ a to zřejmě prostým. Ukážeme, že je to isomorfismus. Nechť $x_1 < x_2$ v M. Pak $\varphi(x_1) \leqq \varphi(x_2)$ v N, z čehož plyne $[\varphi(x_1), x_1] < [\varphi(x_2), x_2]$ v $\sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Nechť $x_1 \parallel x_2$ v M, pak $\varphi(x_1) \parallel \varphi(x_2)$ nebo $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ v N, z čehož plyne

$$[\varphi(x_1), x_1] \parallel [\varphi(x_2), x_2] \text{ v } \sum_{\alpha \in N} M_\alpha .$$

Je tedy $M = \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$.

Důsledek 1. *Nechť M, N jsou částečně uspořádané množiny takové, že N je* **A**-*homomorfním obrazem M. Pak* $\dim M = \dim N$.

Důkaz. Nechť φ je **A**-homomorfismus M na N; pro každé $\alpha \in N$ je M_α řetězcem, takže $\dim M_\alpha = 1$. Tedy

$$\dim M = \dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha = \sup \{\dim N, 1\} = \dim N .$$

Důsledek 2. *Nechť M, N jsou částečně uspořádané množiny takové, že N je* **B**-*homomorfním obrazem M. Pak platí:*

a) *je-li* $\dim N \geqq 2$, *je* $\dim M = \dim N$;

b) *je-li* $\dim N = 1$, *je* $\dim M = 1$ *nebo* $\dim M = 2$.

Důkaz. Nechť φ je **B**-homomorfismus M na N; pro každé $\alpha \in N$ je M_α jednoprvkovou množinou nebo množinou, jejíž libovolné dva různé prvky jsou nesrovnatelné, tedy $\dim M_\alpha \leqq 2$. Je tedy:

$$\dim M = \dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha = \sup \{\dim N, \dim M_\alpha\} .$$

Je-li $\dim N \geqq 2$, dostáváme odtud $\dim M = \dim N$.

Je-li $\dim N = 1$, plyne odtud $\dim M = 1$ nebo $\dim M = 2$.

Důsledek 3. *Nechť M, N jsou částečně uspořádané množiny takové, že N je* **C**-*homomorfním obrazem M. Pak* $\dim M = \sup \{\dim N, \dim M_\alpha(\alpha \in N)\}$; *při tom M_α je množina všech vzorů prvku $\alpha \in N$ v daném* **C**-*homomorfismu.*

Důkaz plyne z lemmatu 2.

V dosavadních úvahách jsme nerozlišovali mezi řetězcem a jednoprvkovou množinou, tj. za dimensi jednoprvkové množiny jsme považovali číslo 1. Pro další úvahy bude účelné definovat dimensi jednoprvkové množiny jako číslo 0.

Nechť M, N jsou částečně uspořádané množiny. Isotonní zobrazení φ množiny M na množinu N, které má vlastnost:

$$(5) \qquad P \subset M\,, \quad \dim P \geqq 2 \Rightarrow \dim \varphi(P) = \dim P$$

nazveme **A**-*zobrazením.*

Isotonní zobrazení φ množiny M na množinu N, které má vlastnost:

$$(6) \qquad P \subset M\,, \quad \dim P \neq 2 \Rightarrow \dim \varphi(P) = \dim P\,;$$
$$\dim P = 2 \Rightarrow \dim \varphi(P) = 2 \quad \text{nebo} \quad \dim \varphi(P) = 0$$

nazveme **B**-*zobrazením.*

Věta 2. *Zobrazení φ částečně uspořádané množiny M na částečně uspořádanou množinu N je* **A**-*zobrazením tehdy a jen tehdy, když je to* **A**-*homomorfismus.*

Důkaz. 1. Je-li φ **A**-homomorfismem, pak je **A**-zobrazením, což plyne z důsledku 1.

2. Nechť φ je **A**-zobrazení a nechť $x, y \in M$, $x < y$. Ježto φ je isotonní, máme $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$. Nechť $x, y \in M$, $x \parallel y$. Pak $\dim \{x, y\} = 2$, takže $\dim \{\varphi(x), \varphi(y)\} = 2$ a tedy $\varphi(x) \parallel \varphi(y)$. φ je tedy **A**-homomorfismem.

Věta 3. *Zobrazení φ částečně uspořádané množiny M na částečně uspořádanou množinu N je* **B**-*zobrazením tehdy a jen tehdy, když je to* **B**-*homomorfismus.*

Důkaz. 1. Z důsledku 2 plyne, že **B**-homomorfismus je **B**-zobrazením.

2. Nechť φ je **B**-zobrazení a nechť $x, y \in M$, $x < y$. Ježto φ je isotonní, máme $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$; mimo to $\dim \{x, y\} = 1$, takže $\dim \{\varphi(x), \varphi(y)\} = 1$, tedy $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ a tedy $\varphi(x) < \varphi(y)$. Nechť $x, y \in M$, $x \parallel y$. Pak $\dim \{x, y\} = 2$, takže $\dim \{\varphi(x), \varphi(y)\} = 2$ nebo $\dim \{\varphi(x), \varphi(y)\} = 0$, tj. $\varphi(x) \parallel \varphi(y)$ nebo $\varphi(x) = \varphi(y)$. φ je tedy **B**-homomorfismem.

Nakonec uvedeme jednu větu o **C**-homomorfismu:

Věta 4. *Jsou-li $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ libovolná kardinální čísla taková, že $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{n}$, pak existují takové částečně uspořádané množiny M, N, že N je* **C**-*homomorfním obrazem M a* $\dim M = \mathfrak{m}$, $\dim N = \mathfrak{n}$.

Důkaz. Buď N libovolná částečně uspořádaná množina taková, že $\dim N = \mathfrak{n}$. Taková částečně uspořádaná množina vždy existuje (viz [4]). Pro každé $\alpha \in N$ nechť M_α značí libovolnou částečně uspořádanou množinu takovou, že $\dim M_\alpha = \mathfrak{m}_\alpha \leqq \mathfrak{m}$. Nechť pro alespoň jedno $\alpha = \alpha_0$ platí $\mathfrak{m}_{\alpha_0} = \mathfrak{m}$. Položme $M = \sum_{\alpha \in N} M_\alpha$. Podle věty 1 máme pak:

$$\dim M = \sup \{\dim N, \dim M_\alpha(\alpha \in N)\} = \mathfrak{m}\,.$$

Zobrazení φ definované takto: $x \in M_\alpha \Rightarrow \varphi([\alpha, x]) = \alpha$; podle lemmatu je **C**-homomorfním zobrazením M na N, při čemž platí $\dim M = \mathfrak{m}$, $\dim N = \mathfrak{n}$.

Literatura

[1] *M. M. Day*: Arithmetic of ordered systems. Transactions of the American mathematical society *58* (1945), 1—43.

[2] *K. Čulík*: O lexikografickém součtu částečně uspořádaných množin. Časopis pro pěstování matematiky, roč. *84* (1959), 16—30.

[3] *K. Čulík*: Über die Homomorphismen der teilweise geordneten Mengen und Verbände. Čechoslov. mat. žurnal, roč. *9* (1959), 496—518.

[4] *B. Dushnik, E. W. Miller*: Partially ordered sets. American Journal of Mathematics *63* (1941), 600—610.

[5] *G. Birkhoff*: Lattice theory, New York 1948.

Резюме

О РАЗМЕРЕ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ СУММЫ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

ВИТЕЗСЛАВ НОВАК, (Vítězslav Novák), Брно

В работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Пусть N — частично упорядоченное множество и $\{M_\alpha(\alpha \in N)\}$ — система непересекающихся частично упорядоченных множеств. Тогда

$$\dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha = \sup \{\dim N,\ \dim M_\alpha(\alpha \in N)\} .$$

Следствием этой теоремы являются следующие утверждения:

1. Пусть M, N – частично упорядоченные множества такие, что существует **A**-гомоморфное изображение M на N. Тогда $\dim M = \dim N$.

2. Пусть M, N – частично упорядоченные множества такие, что существует **B**-гомоморфное изображение M на N. Тогда

a) $\dim M = \dim N$, если $\dim N \geqq 2$,

b) $\dim M = 1$, или $\dim M = 2$, если $\dim N = 1$.

3. Пусть M, N – частично упорядоченные множества такие, что существует **C**-гомоморфное изображение M на N. Тогда

$$\dim M = \sup \{\dim N,\ \dim M_\alpha(\alpha \in N)\} ,$$

если M_α является множеством всех прообразов элемента α.

Summary

THE DIMENSION OF LEXICOGRAPHIC SUMS OF PARTIALLY ORDERED SETS

VÍTĚZSLAV NOVÁK, Brno

In this paper the following theorem is proved:

Theorem 1. *Let N be a partially ordered point set and $\{M_\alpha(\alpha \in N)\}$ a system of disjoint partially ordered sets. Then*

$$\dim \sum_{\alpha \in N} M_\alpha = \sup \{\dim N, \dim M_\alpha(\alpha \in N)\} .$$

From this theorem there follow the following statements:

1. Let M and N be partially ordered sets and φ an **A**-homomorphism on M onto N. Then $\dim M = \dim N$.

2. Let M and N be partially ordered sets and φ a **B**-homomorphism on M onto N. Then

a) $\dim N \geqq 2$ implies $\dim M = \dim N$,

b) $\dim N = 1$ implies $\dim M = 1$ or $\dim M = 2$.

3. Let M and N be partially ordered sets and φ a **C**-homomorphism on M onto N. Then $\dim M = \sup \{\dim N, \dim M_\alpha(\alpha \in N)\}$ whenever M_α is the set of all $x \in M$ such that $\varphi(x) = \alpha$.