Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

O PROSTORU HOLOMORFNÍCH FUNKCÍ

HANA VANÍČKOVÁ, JIŘÍ VANÍČEK, Praha

(Došlo dne 18. června 1960)

Výšetřuje se prostor funkcí holomorfních uvnitř jednotkového kruhu a spojitých na jeho hranici, s normou $\|f\| = \sup_{|z| \leqq 1} |f(z)|$, v souvislosti s dosud neřešenou otázkou existence Schauderovy base v tomto prostoru.

1. Základní pojmy. Banachovým prostorem nazýváme normovaný lineární prostor nad tělesem reálných nebo komplexních čísel, který je úplný. Buď G omezená otevřená množina v rovině komplexních čísel. Symbolem H, resp. $H(G)$, označíme normovaný lineární prostor nad tělesem komplexních čísel, jehož prvky jsou funkce holomorfní pro $|z| < 1$, resp. $z \in G$, a spojité pro $|z| \leqq 1$, resp. v $\overline{G}$, s obvyklými algebraickými operacemi a s normou $\|f\| = \sup_{|z| \leqq 1} |f(z)|$, resp. $\|f\| = \sup_{z \in \overline{G}} |f(z)|$. Jak lze snadno nahlédnout, jsou H a $H(G)$ separabilní Banachovy prostory.

Buď B Banachův prostor a $\{x_n\}$ posloupnost prvků prostoru B. Říkáme, že $\{x_n\}$ je basí B,[1]) jestliže ke každému $x \in B$ existuje právě jedna posloupnost čísel $f_n(x)$ taková, že

$$\lim_{k \to \infty} \| \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\, x_n - x \| = 0 .$$

Zajímavý a dosud neřešený problém funkcionální analysy je, existuje-li v každém separabilním Banachově prostoru base. Ve všech běžně se vyskytujících prostorech (jako c, c_0, l^p, L^p ($p \geqq 1$), $C(\langle 0, 1 \rangle)$) se podařilo basi sestrojit. Pouze prostory H a $H(G)$ odolávají všem pokusům.

Úkolem tohoto článku je promluvit o situaci a některých obtížích, které se vyskytují při pokusech o konstrukci base v prostorech H a $H(G)$.

2. Cesarova base H a $H(G)$. Na první pohled by se mohlo zdát, že funkce $f_n(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tvoří basi prostoru H. To také chybně tvrdí R. P. BOAS JR. v [2], § 2, str. 470.[2])

---

[1]) Takto definovaná base se obvykle nazývá Schauderova base na rozdíl od algebraické Hammelovy base. V tomto článku se Hammelova base nevyskytuje, proto pro zkrácení budeme psát místo Schauderova base krátce base.

[2]) Doslova: 1, z, z^2, … mají vlastnost T_∞ v každém kruhu $\mathscr{U}(0, r)$, což znamená $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ stejnoměrně pro $|z| \leqq r$.

Abychom dokázali, že tomu tak skutečně není, stačí sestrojit funkci $\mathfrak{F}$ holomorfní pro $|z| < 1$ a spojitou pro $|z| \leqq 1$, jejíž mocninná řada nekonverguje na příklad pro $z = 1$. K tomu účelu budeme modifikovat známý příklad spojité funkce s divergentní Fourierovou řadou z [3], str. 516. (Podrobněji viz [6] nebo [7].)

Pro libovolné přirozené k a $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ položme

$$P_k(\varphi) = \sum_{j=1}^{2^{k^3}} \frac{1}{j} \left[\cos\left(2^{k^3} - j\right)\varphi - \cos\left(2^{k^3} + j\right)\varphi\right] = 2 \sin 2^{k^3}\varphi \left(\sum_{j=1}^{2^{k^3}} \frac{1}{j} \sin j\varphi\right),$$

$$Q_k(\varphi) = \sum_{j=1}^{2^{k^3}} \frac{1}{j} \left[\sin\left(2^{k^3} - j\right)\varphi - \sin\left(2^{k^3} + j\right)\varphi\right] = -2 \cos 2^{k^3}\varphi \left(\sum_{j=1}^{2^{k^3}} \frac{1}{j} \sin j\varphi\right).$$

Protože $|P_k(\varphi)| \leqq 2(1 + 2\pi)$ a $|Q_k(\varphi)| \leqq 2(1 + 2\pi)$ pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, konvergují řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} P_k(\varphi) \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_k(\varphi)$$

stejnoměrně v $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Tedy funkce

$$F(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} P_k(\varphi) \quad \text{a} \quad G(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_k(\varphi)$$

jsou spojité v $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zřejmě $F(0) = F(2\pi) = G(0) = G(2\pi) = 0$. Snadno se ukáže, že Fourierovy řady funkcí F a G mají tvar

$$F(\varphi) \sim a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\varphi\,, \quad G(\varphi) \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin j\varphi\,.$$

Položme

$$\hat{f}(r, \varphi) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} r^j a_j \cos j\varphi \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r < 1\,,$$

$$\hat{f}(r, \varphi) = F(\varphi) \qquad \text{pro} \quad r = 1\,.$$

Funkce $f(x, y)$, která transformací $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ přejde ve funkci $\hat{f}(r, \varphi)$, je podle [4], str. 452, harmonická pro $x^2 + y^2 < 1$ a spojitá pro $x^2 + y^2 \leqq 1$. Tedy existuje funkce $g(x, y)$ taková, že $g(0, 0)$ je reálné a $f + ig$ je holomorfní pro $|z| < 1$.

Rozvinutím funkce $f + ig$ v mocninnou řadu dostáváme, že pro funkci $\hat{g}(r, \varphi)$, ve kterou přejde $g(x, y)$ transformací $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, platí

$$\hat{g}(r, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j a_j \cdot \sin j\varphi\,.$$

Definujme funkci

$$\hat{h}(r, \varphi) = \hat{g}(r, \varphi) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r < 1\,, \quad \hat{h}(r, \varphi) = G(\varphi) \quad \text{pro} \quad r = 1\,.$$

Funkce $h(x, y)$ příslušná transformací $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ k $\hat{h}(r, \varphi)$ je podle [4] harmonická pro $x^2 + y^2 < 1$ a spojitá pro $x^2 + y^2 \leqq 1$.

Tedy funkce $\mathfrak{F}(z) = (f + ih)(x, y)$, kde $z = x + iy$, je holomorfní pro $|z| < 1$ a spojitá pro $|z| \leqq 1$.

Kdyby platilo $\mathfrak{F}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ i pro $z = 1$, bylo by $\operatorname{Re}\mathfrak{F}(z) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\varphi$, ale stejnou úvahou jako v [3] lze dokázat, že Fourierova řada funkce F pro $\varphi = 0$ nekonverguje.

Ukázali jsme, že existuje funkce $\mathfrak{F} \in H$ taková, že rovnost $\mathfrak{F}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ neplatí pro $z = 1$. Dokážeme mnohem silnější tvrzení.

Věta 1. I. *Množina A těch funkcí z H, pro které $\sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(0) \frac{z^j}{j!}$ $\left(f^{(j)} = \frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}z^j}\right)$ konverguje k f stejnoměrně pro $|z| \leqq 1$, je první kategorie v sobě.*

II. *Množina B těch funkcí $f \in H$, pro které posloupnost $\left\{\sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(0) \frac{z^j}{j!}\right\}_{k=0}^{\infty}$ je ohraničená v H, je první kategorie v H.*

Provedeme nejdůležitější kroky důkazu:

I. Zaveďme v A novou normu vztahem $\|f\|' = \sup_{k=0}^{\infty} \left\|\sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(0) \frac{z^j}{j!}\right\|$. Prostor A s normou $\|\ \|$ označme A_1, prostor A s normou $\|\ \|'$ označme A_2. Nepříliš složitým výpočtem lze v A_2 ověřit Bolzano-Cauchyovu podmínku. A_2 je tedy Banachův prostor a protože $\|f\|' \geqq \|f\|$ pro všechna $f \in A$, je zobrazení $\boldsymbol{U}$ prostoru A_2 na A_1, definované vztahem $\boldsymbol{U}(f) = f$, spojité. Podle [1], str. 38, je spojitý obraz úplného prostoru buď úplný nebo první kategorie v sobě. V prvém případě by byl A_1 uzavřený v H. A však obsahuje všechny polynomy a množina všech polynomů je hustá v H. Odtud by plynulo, že $H = A$, a to odporuje výše uvedenému příkladu. Tedy A_1 je první kategorie v sobě.

II. Označme φ_n zobrazení H do H, které funkci f přiřazuje funkci $\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) \frac{z^j}{j!}$. φ_n je zřejmě lineární a z vyjádření derivace Cauchyho integrálem plyne, že je spojité. Má tedy smysl

$$\|\varphi_n\| = \sup_{\|f\| \leqq 1} \left\|\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) \frac{z^j}{j!}\right\|.$$

Dokážeme, že posloupnost $\{\|\varphi_n\|\}$ není omezená. Předpokládejme, že existuje číslo $L > 0$ tak, že $\|\varphi_n\| \leqq L$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo a $\mathfrak{F}$ funkce z hořejšího příkladu. Existuje N a polynom P_N stupně nejvýše N-tého tak, že $\|\mathfrak{F} - P_N\| \leqq \varepsilon/(L + 1)$. Tedy

$$\|\mathfrak{F} - \varphi_n(\mathfrak{F})\| \leqq \|\mathfrak{F} - P_N\| + \|P_N - \varphi_n(P_N)\| + \|\varphi_n\| \cdot \|P_N - \mathfrak{F}\|.$$

Protože $P_N = \varphi_n(P_N)$ pro $n \geqq N$, dostáváme, že $\|\mathfrak{F} - \varphi_n(\mathfrak{F})\| \leqq \varepsilon$. To je ale spor, protože Taylorova řada funkce $\mathfrak{F}$ nekonverguje pro $z = 1$.

Označme $M_{k,n} = \underset{f \in H}{\mathscr{E}} [\|\varphi_n(f)\| \leqq k]$. Dokážeme, že množina

$$\mathfrak{M}_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_{k,n}$$

je řídká v H.

$M_{k,n}$ je vzor uzavřené koule při spojitém zobrazení a tedy $\mathfrak{M}_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_{k,n}$ je uzavřená. Kdyby nebyla řídká, musela by obsahovat vnitřní bod f_0. Potom by existovalo $\delta > 0$ tak, že pro $f \in H$, $\|f - f_0\| < \delta$ a všechna n by bylo $\|\varphi_n(f)\| \leqq k$. Potom ale pro $g \in H$, $\|g\| \leqq \delta$ dostáváme $\|\varphi_n(g)\| \leqq 2k$ a tedy $\|\varphi_n\| \leqq \dfrac{2k}{\delta}$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, což není možné. Dokazované tvrzení dostaneme ihned, uvědomíme-li si, že

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k .$$

V příkladě na začátku tohoto paragrafu jsme viděli, že stejnoměrná konvergence Taylorova rozvoje holomorfní funkce pro $|z| \leqq 1$ úzce souvisí se stejnoměrnou konvergencí Fourierovy řady na hranici jednotkového kruhu. Tato souvislost dovoluje přenést na Taylorovy řady Fejérovu větu o sčítání Fourierovy řady metodou aritmetických středů.

Věta 2. *Pro $f \in H$ označme $c_n(f) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(0) \cdot \dfrac{z^j}{j!}$. Potom $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = f$ stejnoměrně pro $|z| \leqq 1$ a tedy mocniny z^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, tvoří „Cesarovu basi“ prostoru H.*

Důkaz. Budiž $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$. Pomocí a_j lze známým způsobem vypočíst Fourierovy koeficienty $\operatorname{Re} f(e^{i\vartheta})$ a $\operatorname{Im} f(e^{i\vartheta})$. Z Fejérovy věty [3], str. 518, dostáváme, že $c_n(f) \to f$ stejnoměrně pro $|z| = 1$. Stejnoměrná konvergence pro $|z| \leqq 1$ plyne z toho, že holomorfní funkce $c_n(f) - f$ nabývá maxima své absolutní hodnoty na hranici jednotkového kruhu.

Věta 3. *Buď G jednoduše souvislá ohraničená oblast, jejíž hranicí je graf $\Gamma(g)$ Jordanovy křivky g. Pak v prostoru $H(G)$ existuje Cesarova base.*

Důkaz. Podle věty 5 [4], str. 409, existuje prosté spojité zobrazení $\boldsymbol{W}$ množiny $\overline{G}$ na uzavřený jednotkový kruh takové, že $\boldsymbol{W}$ je holomorfní v G. Stačí položit $f_n = \boldsymbol{W}^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Existenční věta o sčítání Taylorovy řady podle obecnějších matic je odvozena v „J. Vaníček: Biortogonální systémy a limitovací metody“. (Vyjde v tomto časopise, 1962.)

3. Holomorfní a harmonické funkce. V tomto paragrafu budeme považovat H za prostor nad tělesem reálných čísel.

Při snaze o konstrukci base v prostoru H se nabízí cesta hledat tuto basi pomocí base v prostoru harmonických funkcí. Tato cesta, jak ukážeme, nevede k cíli.

Nejprve sestrojíme basi v prostoru $\mathscr{H}$, jehož prvky jsou funkce harmonické pro $x^2 + y^2 < 1$ a spojité pro $x^2 + y^2 \leqq 1$, s normou $\|\varphi\| = \sup_{x^2+y^2 \leqq 1} |\varphi(x, y)|$. Protože funkce z $\mathscr{H}$ je svými hodnotami na hranici jednotkového kruhu určena jednoznačně a nabývá na ní maxima své absolutní hodnoty, je zobrazení $\mathbf{U}(\varphi) = \hat{\varphi}(1, \vartheta)$, kde $\hat{\varphi}(r, \vartheta)$ je funkce, která vznikne z φ transformací do polárních souřadnic, isometricky isomorfní zobrazení prostoru $\mathscr{H}$ na podprostor těch funkcí z $C(\langle 0, 2\pi \rangle)$, pro které platí $f(0) = f(2\pi)$. Jsou-li x_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, Schauderovy funkce tvořící basi $C(\langle 0, 2\pi \rangle)$, sestrojené v [5], tvoří $\mathbf{U}^{-1}(x_0), \mathbf{U}^{-1}(x_2), \mathbf{U}^{-1}(x_3), \ldots$ basi prostoru $\mathscr{H}$.

Ke každé funkci $\varphi \in \mathscr{H}$ existuje funkce $f = \mathbf{W}(\varphi)$ holomorfní pro $|z| < 1$ a taková, že $\operatorname{Im} f(0) = 0$ a $\operatorname{Re} f = \varphi$. Kdyby pro každé $\varphi \in \mathscr{H}$ bylo $\mathbf{W}(\varphi) \in H$, dostali bychom, že v H existuje base.

Že tento postup nevede k cíli, ukazuje následující známé tvrzení, jehož jednoduchý a zajímavý důkaz lze provést funkcionálně analytickými prostředky.

Věta 4. *Existuje funkce φ harmonická pro $x^2 + y^2 < 1$ a spojitá pro $x^2 + y^2 \leqq 1$ taková, že příslušnou funkci ψ harmonickou pro $x^2 + y^2 < 1$ a takovou, že $\varphi + i\psi$ je holomorfní pro $|z| < 1$, nelze spojitě rozšířit na obor $x^2 + y^2 \leqq 1$.*

Důkaz. Označme $H_0 = \mathop{\mathscr{E}}_{f \in H} [f(0) = 0]$, $\mathscr{H}_0 = \mathop{\mathscr{E}}_{\varphi \in \mathscr{H}} [\varphi(0, 0) = 0]$. Zobrazení $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ prostoru H_0 do $\mathscr{H}_0$ definujme vztahy

$$\mathbf{U}(f) = \operatorname{Re} f, \quad \mathbf{V}(f) = \operatorname{Im} f.$$

Jestliže dokazovaná věta neplatí, jsou $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ zobrazení H_0 na $\mathscr{H}_0$. Obě zobrazení jsou zřejmě prostá, lineární a spojitá.

H_0 a $\mathscr{H}_0$ jsou po řadě uzavřené lineály v H a $\mathscr{H}$ a jsou tedy úplné. Podle věty o spojitém obrazu úplného prostoru [1], str. 41, dostáváme, že i $\mathbf{U}^{-1}$ a $\mathbf{V}^{-1}$ jsou spojitá zobrazení $\mathscr{H}_0$ na H_0. Ale složené zobrazení $\mathbf{U}(\mathbf{V}^{-1})$ není spojité, jak je ihned vidět, konstruujeme-li na příklad posloupnost konformních zobrazení jednotkového kruhu na obdélníky

$$-1 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1, \quad -\frac{1}{n} \leqq \operatorname{Im} z \leqq \frac{1}{n}.$$

Tento spor dokazuje naši větu.

Literatura

[1] *S. Banach*: Théorie des operations linéaires. Monografje Matematyczne Tom 1, Warszawa 1932.
[2] *R. P. Boas Jr.*: Expansion of analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. *48*, 1940, 467—487.
[3] *V. Jarník*: Integrální počet II. Praha 1955.
[4] *А. И. Маркушевич:* Теория аналитических функций. Гос. изд. тех. теорет. лит. Москва-Ленинград 1950.
[5] *J. Schauder*: Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functional Räumen. Math. Z. *26* (1927), 47—65.
[6] *H. Svobodová*: Sumační metody v teorii mocninných řad. Diplomová práce MFF UK 1960.
[7] *J. Vaníček*: Schauderovy base v Banachových prostorech. Diplomová práce MFF UK 1960.

Резюме

О ПРОСТРАНСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

ГАНА ВАНИЧКОВА и ИРЖИ ВАНИЧЕК, Прага

H — пространство Банаха, образованное функциями, голоморфными для $|z| < 1$ и непрерывными для $|z| \leqq 1$, норма в котором

$$\|f\| = \sup_{|z| \leqq 1} |f(z)| .$$

Показано, что степени $1, z, z^2, \ldots$ образуют базис Чесаро пространства H, но не его базис Шаудера. Конечно, множество тех $f \in H$, для которых $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равномерно для $|z| \leqq 1$, первой категории в себе.

В дальнейшем показано, что находить базис H при помощи базиса пространства гармонических функций является непригодным.

Summary

ON THE SPACE OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

HANA VANÍČKOVÁ and JIŘÍ VANÍČEK, Praha

H is a Banach space composed of functions holomorphic for $|z| < 1$ and continuous for $|z| \leqq 1$ with norm

$$\|f\| = \sup_{|z| \leqq 1} |f(z)| .$$

It is shown that the powers $1, z, z^2, \ldots$ constitute a Cesaro basis of H, but not its Schauder basis. Even the set of those $f \in H$ for which $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ uniformly for $|z| \leqq 1$ is of first category in itself.

Furthermore, it is shown that the construction of the basis in H by means of a basis in the harmonic functions space is not feasible.