Václav Vilhelm

Заметка к полным структурам, представимым множествами

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 76--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117415

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ЗАМЕТКА К ПОЛНЫМ СТРУКТУРАМ, ПРЕДСТАВИМЫМ МНОЖЕСТВАМИ

ВАЦЛАВ ВИЛЬГЕЛМ (Václav Vilhelm), Прага

(Поступило в редакцию 28/X 1960 г.)

В статье исследуется связь между полными структурами, представимыми множествами в смысле И. В. СТЕЛЛЕЦКОГО (см. [3]), и компактно образованными структурами. Показано, что в классе полных структур, представимых множествами, справедливость теоремы об изоморфизме является достаточным условием для модулярности структуры.

1

В согласии с И. В. Стеллецким [3] мы скажем, что полная структура L представима множествами, если она изоморфна полной структуре L', элементами которой являются подмножества некоторого множества и в которой выполняется следующее: 1) пересечение произвольного множества $\{A_\alpha\}$ элементов из L' совпадает с множественным пересечением множеств A_α, 2) объединение произвольной цепи $\{B_\beta\}$ в L' совпадает с множественным объединением множеств B_β.

Замечание. Чтобы избежать недоразумений будем в этой статье структурные операции обозначать символами $\vee$, $\wedge$, а символами $\cup$, $\cap$ будем всегда соответственно обозначать множественное объединение и множественное пересечение.

В статье [3] доказано, что полную структуру L можно представить множествами тогда и только тогда, когда она слабо непрерывна сверху (т. е. для каждого $x \in L$ и для каждой цепи $\{y_\alpha\}$ в L должно быть $x \wedge \bigvee_\alpha y_\alpha = \bigvee_\alpha (x \wedge y_\alpha)$) и слабо молекулярна. Притом L слабо молекулярна, если каждый ее элемент z можно представить в виде $z = \bigvee_\gamma z_\gamma$, где элементы z_γ слабо недостижимы снизу. (Элемент $t \in L$ слабо недостижим снизу, если из равенства $t = \bigvee_{\delta \in \Delta} t_\delta$, где $\{t_\delta\}$ — цепь в L, вытекает равенство $t = t_{\delta_0}$ для некоторого $\delta_0 \in \Delta$.)

Прежде всего покажем, что это условие Стеллецкого можно сформулировать в более простом виде, причем одновременно лучше выяснится связь между полными структурами, представимыми множествами, и компактно образованными структурами.

Определение 1. Элемент a полной структуры L назовем *цепно компактным,* если для каждой цепи $\{a_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ в L справедлива импликация $a \leqq \bigvee_\alpha a_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow a \leqq a_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0 \in A$. L является *цепно компактно образованной,* если каждый ее элемент является объединением некоторого множества цепно компактных элементов.

Замечание. (см. [2]). Элемент a полной структуры L называется компактным, если ко всякому множеству A элементов из L, для которого $a \leqq \bigvee A$, существует конечная часть $A' \leqq A$ такая, что $a \leqq \bigvee A'$. Структура L является тогда компактно образованной, если каждый ее элемент представляет собой объединение некоторого множества компактных элементов. Непосредственно видно, что компактно образованная структура является цепно компактно образованной.

Лемма 1. *Пусть L — цепно компактно образованная структура. Пусть $\{a_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — цепь в L, $a \in L$. Тогда*

$$a \wedge \bigvee_{\alpha \in A} a_\alpha = \bigvee_{\alpha \in A} (a \wedge a_\alpha).$$

Доказательство. Положим $p = a \wedge \bigvee_\alpha a_\alpha$, $q = \bigvee_\alpha (a \wedge a_\alpha)$. Очевидно, $p \geqq q$, так что достаточно доказать соотношение $p \leqq q$. Так как L — цепно компактно образованная структура, то $p = \bigvee_{\beta \in B} c_\beta$, где c_β — цепно компактный элемент в L при любом $\beta \in B$. Справедливо $c_\beta \leqq a \wedge \bigvee_{\alpha \in A} a_\alpha \leqq \bigvee_{\alpha \in A} a_\alpha$ и, следовательно, $c_\beta \leqq a_{\alpha(\beta)}$, где $\alpha(\beta) \in A$. Одновременно, конечно, $c_\beta \leqq a$. Поэтому для каждого $\beta \in B$ будет $c_\beta \leqq a_{\alpha(\beta)} \wedge a$. Итак, $p = \bigvee_{\beta \in B} c_\beta \leqq \bigvee_{\beta \in B} (a_{\alpha(\beta)} \wedge a) \leqq \bigvee_{\alpha \in A} (a_\alpha \wedge a) = q$.

Теорема 1. *Полную структуру L можно представить множествами тогда и только тогда, если она цепно компактно образована.*

Доказательство. Пусть L — цепно компактно образованная структура. В таком случае из леммы 1 и из определения 1 вытекает, что Lслабо непрерывна сверху и слабо молекулярна, так что ее можно (согласно [3]) представить множествами. Наоборот, пусть L представима множествами; тогда L слабо непрерывна сверху и слабо молекулярна. Очевидно, достаточно доказать, что каждый слабо недостижимый снизу элемент $a \in L$ является одновременно цепно компактным. Итак, пусть $\{a_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ — цепь в L, $a \leqq \bigvee_\alpha a_\alpha$. Тогда $a = a \wedge$ $\wedge \bigvee_\alpha a_\alpha = \bigvee_\alpha (a \wedge a_\alpha) \Rightarrow a = a \wedge a_{\alpha_0}$, $\alpha_0 \in A$, так что $a \leqq a_{\alpha_0}$.

Обратим теперь внимание на то, каким образом можно, используя представление полных структур множествами, характеризовать компактно образованные структуры.

Теорема 2. (Ср. [1]). *Структура L является компактно образованной тогда и только тогда, когда она изоморфна полной структуре L', элементами которой служат подмножества некоторого множества и в которой для любого множества $\{A_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ элементов из L'*

$$\bigwedge_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha A_\alpha, \quad \bigvee_\alpha A_\alpha = \bigcup_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}} (A_{\alpha_1} \vee \ldots \vee A_{\alpha_k}),$$

где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ пробегает все конечные части множества A.

Доказательство ведется аналогично доказательству теоремы 1 из статьи [3]. Пусть сначала L – компактно образованная структура. Для $x \in L$ обозначим символом $A(x)$ множество тех компактных элементов $z \in L$, для которых $z \leqq x$. Очевидно, что в таком случае $x \neq y \Leftrightarrow A(x) \neq A(y)$, $x \leqq y \Leftrightarrow A(x) \leqq \leqq A(y)$. Если положить $\bigvee_\alpha A(x_\alpha) = A(\bigvee_\alpha x_\alpha)$ и $\bigwedge_\alpha A(x_\alpha) = A(\bigwedge_\alpha x_\alpha)$, то множества $A(x)$ образуют полную структуру L', изоморфную L. При этом, очевидно, $\bigwedge_\alpha A(x_\alpha) = \bigcap_\alpha A(x_\alpha)$. Пусть $x = \bigvee_\gamma x_\gamma (\gamma \in \Gamma)$, и рассмотрим элемент $\bigvee_\gamma A(x_\gamma) = A(x)$. Пусть $a \in A(x)$. Тогда a компактен и $a \leqq x = \bigvee_\gamma x_\gamma$. Значит, $a \leqq x_{\gamma_1} \vee \ldots \vee x_{\gamma_k}$ и, следовательно, $a \in A(x_{\gamma_1} \vee \ldots \vee x_{\gamma_k}) = A(x_{\gamma_1}) \vee \ldots \vee A(x_{\gamma_k})$ так что $A(x) \leqq \bigcup_{\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}} [A(x_{\gamma_1}) \vee \ldots \vee A(x_{\gamma_k})]$. Ясно, что здесь имеет место знак равенства, потому что обратное включение очевидно. Наоборот, пусть $L \cong L'$, где L' – структура из теоремы 2. Достаточно доказать, что L' компактно образована. Пусть U – универсальный элемент струткрукы L'. Пусть для каждого $x \in U$ символ $D(x)$ означает пересечение всех элементов $D \in L'$, для которых $x \in D$. Если $B \in L'$, то, очевидно, $B = \bigvee_{y \in B} D(y)$; итак, достаточно доказать, что $D(x)$ является для каждого $x \in U$ компактным элементом. Пусть $D(x) \leqq \bigvee_{\alpha \in A} C_\alpha$. Тогда $D(x) \leqq \bigcup_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}} (C_{\alpha_1} \vee \ldots \vee C_{\alpha_k})$. Так как $x \in D(x)$, то $x \in \bigcup_{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}} (C_{\alpha_1} \vee \vee \ldots \vee C_{\alpha_k})$ и, следовательно, для определенной группы $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ будет $x \in C_{\alpha_1} \vee \ldots \vee C_{\alpha_k}$. Отсюда и из определения множества $D(x)$ непосредственно следует, что $D(x) \leqq C_{\alpha_1} \vee \ldots \vee C_{\alpha_k}$.

2

Мы скажем, что в структуре L справедлива *теорема об изоморфизме,* если для любых $a, b \in L$ будет $a \vee b/a \cong b/a \wedge b$. В статье [2] доказано, что выполнение теоремы об изоморфизме в компактно образованной структуре влечет за собой ее модулярность. Мы покажем, что этот результат можно без труда распространить на структуры, представимые множествами в смысле отд. 1.

Теорема 3. *Пусть полную структуру L можно представить множествами, и пусть в L справедлива теорема об изоморфизме. Тогда структура L модулярна.*

Доказательство. Из доказательства главной теоремы работы [2], гарантирующей модулярность компактно образованной структуры, в которой выполняется теорема об изоморфизме, вытекает, что наша теорема является следствием леммы 1 и ниже следующего утверждения: *к двум любым элементам* a, b $(a > b)$ *структуры* L *из теоремы* 3 *существуют элементы* $p, q \in L$ *такие, что* p/q *есть простой квоциент и* $a \geqq p > q \geqq b$. Это утверждение почти очевидно, если перейдем от структуры L к структуре L', которая является представлением первой при помощи множеств. Пусть $A, B \in L', A > B$. Тогда $A \supset B$ и в A существует элемент x, для которого $x \notin B$. Положим $P = \bigwedge\limits_{\beta} A_\beta = \bigcap\limits_{\beta} A_\beta$, где A_β пробегает все элементы структуры L', для которых $x \in A_\beta$, $B \subset A_\beta \subseteqq A$. Имеет место $P > B$. Пусть, далее $\{B_\gamma\}$ – насыщенная цепь в L' между элементами P и B, несодержащая P. Если положить $Q = \bigvee\limits_{\gamma} B_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma} B_\gamma$, то можно легко проверить, что $A \geqq P > Q \geqq B$, причем P/Q – простой квоциент.

Замечание. Из вспомогательного утверждения, приведенного в доказательстве теоремы 3, из леммы 1 и из теоремы 1 вытекает, что класс полных структур, представимых множествами, содержится в классе структур, исследуемых в работе [4]. Из теоремы 1,11 цитированной работы вытекает следующий результат: В полной структуре L, представимой множествами, справедлива теорема Жордана-Гельдера с нижним простым подобием квоциентов тогда и только тогда, когда 1) L выполняет нижнее условие простых квоциентов, 2) для любой цепи $\{a_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ и простого квоциента a/b, где $a_\alpha \leqq a$ для $\alpha \in A$, выполняется равенство $\bigwedge\limits_{\alpha}(a_\alpha \vee b) = (\bigwedge\limits_{\alpha} a_\alpha) \vee b$. Итак, в частности, имеем: если L удовлетворяет условиям 1), 2), то множсетва скачков любых двух насыщенных цепей между теми же двумя элементами имеют одинаковую мощность.

Литература

[1] *G. Birkhoff, O. Frink*: Representation of lattices by sets. Trans. Amer. Math. Soc. *64* (1948), 299—316.

[2] *P. Crawley*: The Isomorphism Theorem in compactly generated lattices. Bull. Amer. Math. Soc. *65* (1959), 377—379.

[3] *И. В. Стеллецкий:* О полных структурах, представимых множествами. Успехи матем. наук, *12* (1957), вып. 6 (78), 177—180.

[4] *В. Вильгелм:* Теорема Жордана-Гельдера в структурах без условия конечности цепей. Чех. матем. журнал *4* (1954), 29—49.

Výtah

POZNÁMKA K ÚPLNÝM SVAZŮM, KTERÉ LZE REPRESENTOVAT MNOŽINAMI

VÁCLAV VILHELM, Praha

И. В. Стеллецкий udal nutné a postačující podmínky, aby úplný svaz L byl representovatelný množinami (v smyslu popsaném v článku [3]). V této poznámce je ukázáno, že Stelleckého podmínky lze formulovat v jednodušším tvaru, v němž vynikne souvislost těchto svazů se svazy kompaktně generovanými (srv. [2]). Prvek a úplného svazu L nazveme *řetězcově kompaktním*, jestliže pro každý řetězec $\{a_\alpha\}$, $\alpha \in A$ v L, pro nějž $a \leqq \bigvee_{\alpha \in A} a_\alpha$, platí $a \leqq a_{\alpha_0}$, $\alpha_0 \in A$. L se nazývá *řetězcově kompaktně generovaný*, je-li každý jeho prvek spojení nějaké množiny řetězcově kompaktních prvků. Pak platí věta: *L lze representovat množinami právě tehdy, je-li řetězcově kompaktně generovaný.* Je ukázáno, jak lze pomocí representace množinami charakterisovat kompaktně generované svazy (věta 2). Jednoduchou strukturu úplných svazů, které lze representovat množinami ukazuje věta 3, která říká, že *úplný svaz L representovatelný množinami, v němž jsou každé dva kvocienty $a \vee b/a$, $b/a \wedge b$ $(a, b \in L)$ isomorfní, je modulární.*

Summary

A REMARK ON COMPLETE LATTICES REPRESENTED BY SETS

VÁCLAV VILHELM, Praha

I. V. STELLECKIJ presented necessary and sufficient conditions for a complete lattice L to be representable by sets (in the sense described in his paper [3]). In the present paper it is proved that Stelleckij's conditions may be formulated in a form which shows a connection of these lattices with compactly generated lattices (see [2]). An element a of a complete lattice L is called *chain-compact* if for each chain $\{a_\alpha\}$, $\alpha \in A$ in L with $a \leqq \bigvee_{\alpha \in A} a_\alpha$ there exists an $\alpha_0 \in A$ such that $a \leqq a_{\alpha_0}$. A lattice L is *chain-compactly generated* if each of its elements is a join of chain-compact elements. Then the following theorem holds: *L can be represented by sets if and only if L is chain-compactly generated.* Theorem 2 characterises compactly generated lattices by means of the concept of representation by sets. Theorem 3 shows a simple structure of complete lattices which may be represented by sets: *In a complete lattice L representable by sets, if each two quotients $a \vee b/a$, $b/a \wedge b$ $(a, b \in L)$ are isomorphic, then L is modular.*