Ivan Kiguradze

Об условиях колоблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 4, 492--495

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117457`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ОБ УСЛОВИЯХ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

И. Т. КИГУРАДЗЕ, Тбилиси (СССР)

(Поступило в редакцию 2 II 1962 г.)

Дается простое доказательство теоремы о колеблемости решений уравнения (1) и устанавливается условие неколеблемости.

В настоящей заметке рассматривается дифференциальное уравнение

$$u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0\,, \tag{1}$$

где $n > 1$ а функция $a(t)$ непрерывна в промежутке $\langle t_0, \infty)$. В заметке приводится простое доказательство теоремы Ясного-Курцвейля ([1], [2]) и устанавливается условие неколеблемости всех решений уравнения (1).

Теорема 1. *Если функция $A(t) = a(t)\, t^{\frac{1}{2}(n+3)}$ положительна и не убывает, то уравнение* (1) *обладает колеблющимся решением.*

Доказательство. Пусть решение $u(t)$ уравнения (1) положительно в промежутке (t, ∞). Легко видеть, что $u(t)$ будет неубывающей функцией и $u'(\infty) = 0$. При $t > 2t$, из уравнения (1) имеем

$$u(t) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t} (\tau - t_1)\, a(\tau)\, u^n \,\mathrm{d}\tau + (t - t_1) \int_t^\infty a(\tau)\, u^n \,\mathrm{d}\tau \geqq \frac{A(t)}{n+1}\, t^{-\frac{1}{2}(n-1)}\, u^n\,,$$

откуда легко следует, что

$$u(t) \leqq \left(\frac{n+1}{A(t)}\right)^{1/(n-1)} t^{1/2}\,. \tag{2}$$

Таким образом мы показали, что всякое неколеблющееся, положительное решение уравнения (1) для больших значений аргумента удовлетворяет неравенству (2).

Пусть $u(t)$ такое решение уравнения (1) начальные значения которого удовлетворяет условию

$$c_0 = t_0 u'^2(t_0) - u'(t_0)\, u(t_0) > 2 \lim_{t\to\infty} \left(\frac{n+1}{A(t)}\right)^{2/(n-1)}\,. \tag{3}$$

Покажем, что оно колеблющееся. Допустим противное — пусть $u(t)$ положительно в промежкутке (t, ∞). Умножая обе части уравнения (1) на $t^{3/2}(t^{-1/2}u)'$ и интегрируя от t_0 до t, в силу второй теоремы о среднем значении, легко находим

$$tu'^2 - uu' + \frac{2}{n+1} A(t)\,(t^{-1/2}u)^{n+1} = c_0 + \frac{2}{n+1} A(t)\,[\xi^{-1/2}u(\xi)]^{n+1}\,, \; t_0 \leqq \xi \leqq t\,.$$

Отсюда согласно (2) и (3) вытекает

$$tu'^2 - uu' \geqq c_0 - 2\left(\frac{n+1}{A(t)}\right)^{2/(n-1)} > 0\,, \quad t > t_2\,,$$

где $t_2 \geqq t_1$ достаточно большое число. В силу последнего неравенства имеем

$$\frac{u(t)}{t} \geqq \frac{u(t_2)}{t_2}\,, \quad t \geqq t_2\,,$$

что противоречит неравенству (2). Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Если функция* $A_\alpha(t) = a(t)\,t^{\frac{1}{2}(n+3)+\alpha}$, *где* $\alpha > 0$, *положительна и не возрастает, то все решения уравнения* (1) *неколеблющиеся.*

Доказательство. Преобразованием

$$u(t) = t^\lambda w(\lg t)\,, \tag{4}$$

где $\lambda = 1/2 + \alpha/(2n-2)$, уравнение (1) приводится к виду

$$w'' + (2\lambda - 1)\,w' + A_{\alpha/2}(e^x)\,|w|^n \operatorname{sgn} w + \lambda(\lambda - 1)\,w = 0\,, \tag{5}$$

где $A_{\alpha/2}(e^x) = a(e^x)\,e^{\frac{1}{2}(n+3+\alpha)w}$.

Допустим теперь, что уравнение (1) имеет колеблющееся решение $u(t)$. Тогда определенная равенством (4) функция $w(x)$ будет колеблющимся решением уравнения (5). Пусть $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ последовательность нулей $w(x)$. Умножая равенство (5) на $w'(x)$ и интегрируя от x_0 до x_k, согласно второй теореме о среднем значении, находим

$$w'^2(x_k) + 2(2\lambda - 1)\int_{x_0}^{x_k} w'^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{n+1}\,A_{\alpha/2}(e^{x_0})\,|w^{n+1}(\xi_k)\,| = w'^2(x_0)\,,$$
$$x_0 \leqq \xi_k \leqq x_k\,.$$

Отсюда следует

$$\int_{x_0}^{\infty} w'^2(t)\,\mathrm{d}t \leqq \frac{w'^2(x_0)}{4\lambda - 2} = c_1^2\,,$$

в силу которого находим

$$|w(x)| \leqq \int_{x_0}^{x} |w'(z)|\,\mathrm{d}z \leqq \left\{\int_{x_0}^{x} w'^2(z)\,\mathrm{d}z\right\}^{1/2} (x - x_0)^{1/2} < c_1 x^{1/2}\,. \tag{6}$$

Согласно (6) из (4) имеем

$$|u(t)| \leqq c_1 t^{\lambda} \lg^{1/2} t\,. \tag{7}$$

Перепишем теперь уравнение (1) в таком виде

$$u'' + a_1(t)\, u = 0\,,$$

где $a_1(t) = a(t)\, u^{n-1}(t)$. В силу (7) имеем

$$a_1(t) \leqq \frac{c_1^{n-1} A_\alpha(t) \lg^{(n-1)/2} t}{t^{\alpha/2}}\, t^{-2} = o(t^{-2}) \quad \text{при} \quad t \to \infty\,,$$

из которого согласно хорошо известной теореме Кнезера (см. напр. [3], 143 до 145) следует, что $u(t)$ неколеблющееся.

Таким образом допущение, что уравнение (1) имеет колеблющееся решение неверно. Теорема доказана.

Литература

[1] *М. Ясны*: О существовании колеблющегося решени нелинейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + f(x) y^{2n-1} = 0$. Časopis pro pěstování matematiky *85* (1960), 1, 78—83.

[2] *Я. Курцвейль*: Заметка по колеблющимся решениям уравнения $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$. Časopis pro pěstování matematiky *85* (1960), 3, 357—358.

[3] *Р. Беллман*: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Москва 1954.

Výtah

O PODMÍNKÁCH PRO OSCILACI ŘEŠENÍ ROVNICE $u'' + a(t)\, |u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

I. T. Kiguradze, Tbilisi (SSSR)

V článku jsou dokázány dvě věty pro rovnici

$$u'' + a(t)\, |u|^n \operatorname{sgn} u = 0\,, \tag{1}$$

kde $n > 1$ a $a(t)$ je spojitá funkce na intervalu $< t_0, \infty$.

Věta 1. (Jasný-Kurzweil) *Je-li funkce $A(t) = a(t)\, t^{\frac{1}{2}(n+3)}$ kladná a neklesající, pak existuje oscilatorické řešení rovnice* (1).

Věta 2. *Jestliže pro nějaké $\alpha > 0$ funkce $A_\alpha(t) = a(t)\, t^{\frac{1}{2}(n+3)+\alpha}$ je kladná a nerostoucí, pak žádné řešení rovnice* (1) *neosciluje.*

Zusammenfassung

ÜBER DIE BEDINGUNGEN FÜR DIE OSZILLATION DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

I. T. KIGURADZE, Tbilisi (UdSSR)

In der vorliegenden Bemerkung wird die Differentialgleichung

$$u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0 \tag{1}$$

behandelt, wo $n > 1$ und die Funktion $a(t)$ im Intervall $\langle t_0, \infty)$ stetig ist. Es werden folgende Sätze bewiesen:

Satz 1 (Jasný-Kurzweil). *Wenn die Funktion $A(t) = a(t)\,t^{\frac{1}{2}(n+3)}$ positiv und nichtabnehmend ist, so hat die Differentialgleichung (1) eine oszillierende Lösung.*

Satz 2. *Wenn die Funktion $A_\alpha(t) = a(t)\,t^{\frac{1}{2}(n+3)+\alpha}$, wo $\alpha < 0$, positiv und nichtzunehmend ist, so sind alle Lösungen der Differentialgleichung (1) nichtoszillierend.*