Miroslav Fiedler
Заметка к методу Лина

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 4, 438--443

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117480

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

ЗАМЕТКА К МЕТОДУ ЛИНА

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Praha

(Поступило в редакцию 25/V 1962)

В заметке доказано, что для алгебраического уравнения с одними вещественными простыми корнями метод Лина для некоторого линейного делителя (соотвествующий наименьшену положительному или найбольшему отрицательному корню) является устойчивым.

1. Введение. Как известно, метод Лина для решения алгебраического уравнения[1]) состоит в построении последовательности многочленов определенной степени, которая в случае сходимости стремится к некоторому делителю левой части данного уравнения. Эта последовательность определяется для данного уравнения $f(x) = 0$ и данного исходного многочлена $d_0(x)$ (со старшим коэффициентом, равным единице) методом индукции так, что $d_{i+1}(x)$ — остаток при делении $f(x)$ на $xd_i(x)$, разделенный на его старший коэффициент. При этом методе некоторые делители $d(x)$ данного многочлена $f(x)$ устойчивы в том смысле, что, если исходный многочлен $d_0(x)$ достаточно близок к $d(x)$, то последовательность $d_i(x)$ сходится к $d(x)$; однако, другие делители могут быть неустойчивыми.

В настоящей заметке мы хотим доказать следующую теорему:

Теорема. *Пусть $f(x)$ — многочлен степени выше второй и пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет только вещественные ненулевые корни. Если a — наименьший положительный и b — наибольший отрицательный корень $f(x) = 0$, то в случае, когда каждый из корней a и b простой, по крайней мере один из делителей $x - a$, $x - b$ является для метода Лина истойчивым. При этом, если один из корней a, b не существует, то делитель, соответствующий второму корню, необходимо устойчивый.*

Для доказательства, которому будет посвящен дальнейший параграф, нам понадобится следующий известный результат:[2])

---

[1]) См., например, [1], стр. 110. [2]) См. [1].

(1,1) Для того, чтобы линейный делитель $x - c$ многочлена $f(x)$ был устойчивым относительно метода Лина для решения уравнения $f(x) = 0$, достаточно, чтобы

$$\left|1 - \frac{g(c)}{g(0)}\right| < 1, \tag{1}$$

где $g(x)$ — многочлен, для которого $f(x) = (x - c)\, g(x)$; или, что то же самое, чтобы

$$\left|1 + \frac{cf'(c)}{f(0)}\right| < 1. \tag{2}$$

Теперь мы перейдем к доказательству теоремы.

2. Доказательство теоремы.

(2,1) Пусть $x > 0$, $y > 0$. Тогда

$$\left(\frac{x+y}{2x}\right)^x \left(\frac{x+y}{2y}\right)^y \leqq 1; \tag{3}$$

знак равенства имеет место только для $x = y$.

Доказательство. Функция $\varphi(x) = x \log x$ строго выпукла для $x > 0$, так как $\varphi''(x) = 1/x > 0$. Следовательно,

$$\frac{x+y}{2} \log \frac{x+y}{2} \leqq \frac{1}{2}(x \log x + y \log y),$$

т. е.

$$x \log \frac{x+y}{2x} + y \log \frac{x+y}{2y} \leqq 0.$$

Отсюда следует непосредственно (3), со знаком равенства только для $x = y$.

(2,2) Для $1 + x > 0$ имеет место неравенство

$$\log(1 + x) \leqq x, \tag{4}$$

со знаком равенства только для $x = 0$. Доказательство очевидно.

(2,3) Пусть заданы положительные числа $p, p_1, \ldots, p_m, q, q_1, \ldots, q_n$ $(m \geqq 0,$ $n \geqq 0)$, для которых выполнены неравенства $p < p_i$, $q < q_j$ $(i = 1, \ldots, m;$ $j = 1, \ldots, n)$. Обозначим

$$u(x) = \prod_{i=1}^{m} (1 - x/p_i), \quad v(x) = \prod_{j=1}^{n} (1 - x/q_j)$$

(если $m = 0$, то $u(x) = 1$; если $n = 0$, то $v(x) = 1$). Тогда

$$[u(p)\, v(-p)]^q [u(-q)\, v(q)]^p \leqq 1 \tag{5}$$

и

$$\left[\frac{p+q}{2q}u(p)v(-p)\right]^q\left[\frac{p+q}{2p}u(-q)v(q)\right]^p \leqq 1 . \tag{6}$$

В (5) имеет место равенство только для $m = n = 0$, в (6) для $m = n = 0$ и $p = q$.

Доказательство. Из (2,2) следует

$$\log u(p) = \sum_{i=1}^{m}\log\left(1-\frac{p}{p_i}\right) \leqq -p\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i},$$

с равенством только для $m = 0$. Аналогичным образом,

$$\log v(-p) \leqq p\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j} \quad \text{(равенство для } n = 0\text{)},$$

$$\log u(-q) \leqq q\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}, \quad \log v(q) \leqq -q\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}.$$

Следовательно,

$$q\log u(p) + q\log v(-p) + p\log u(-q) + p\log v(q) \leqq 0,$$

т. е. имеет место неравенство (5), со знаком равенства только для $m = n = 0$. Из (5) и (3) (сля $x = p$, $y = q$) следует (1), со знаком равенства только для $m = n = 0$ и $p = q$.

(2,4) Пусть $f(x)$ — многочлен положительной степени с одними вещественными ненулевыми корнями.

1° Если все корни уравнения $f(x) = 0$ положительны и a — наименьший корень, то

$$-1 \leqq \frac{af'(a)}{f(0)} \leqq 0 \tag{7}$$

(влево знак равенства имеет место только для $f(x) = c(x - a)$, c — постоянная, вправо только в случае, когда a — кратный корень).

2° Если все корни уравнения $f(x) = 0$ отрицательны и b — наибольший корень, то

$$-1 \leqq \frac{bf'(b)}{f(0)} \leqq 0 \tag{8}$$

(равенства аналогично как в 1°).

3° Если $f(x) = 0$ имеет как положительные, так и отрицательные корни и если a — наименьший положительный и b — наибольший отрицательный корни, то

$$\frac{af'(a)}{f(0)} \leqq 0, \quad \frac{bf'(b)}{f(0)} \leqq 0, \tag{9}$$

и

$$(10)\qquad \left(-\frac{af'(a)}{2f(0)}\right)^{-b}\left(-\frac{bf'(b)}{2f(0)}\right)^{a}\leqq 1\,,$$

со знаком равенства только для $f(x) \approx c(x-a)(x-b)$ (c — постоянная) и $a+b=0$.

Доказательство. 1° Если $a, a_1, \ldots, a_m$ — все корни[3]) уравнения $f(x)=0$, то

$$\frac{f(x)}{f(0)}=\left(1-\frac{x}{a}\right)\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{x}{a_i}\right),$$

так что

$$\frac{af'(a)}{f(0)}=-\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{a}{a_i}\right).$$

Из этого следует непосредственно наше утверждение.

Так как доказательство 2° аналогично, перейдем к доказательству 3°. Функция $f(x)/f(0)$ является положительной в интервале (b, a); следовательно, $f'(a)/f(0)\leqq$ $\leqq 0$ и $f'(b)/f(0)\geqq 0$, так что справедливы неравенства (9). Если $a, a_1, \ldots, a_m$ ($m\geqq 0$) — все положительные корни[3]) и $b, b_1, \ldots, b_n$ ($n \geqq 0$) все отрицательные корни[3]) уравнения $f(x)=0$, то обозначим

$$u(x)=\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{x}{a_i}\right),\quad v(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{x}{b_j}\right).$$

Если $a=a_i$ или $b=b_j$ для некоторого i или j, то (10) выполнено тривиальным образом. Если $a<a_i$ и $b>b_j$ для всех $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, то из

$$\frac{f(x)}{f(0)}=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)u(x)\,v(-x)$$

следует

$$-\frac{af'(a)}{2f(0)}=-\frac{a-b}{2b}u(a)\,v(-a)\,,\quad -\frac{bf'(b)}{2f(0)}=\frac{a-b}{2a}u(b)\,v(-b)\,.$$

Из (6) мы получим непосредственно (10), со знаком равенства только для $m=n=0$ и $a=-b$.

Теперь возможно доказать теорему, высказанную в начале статьи. Если a существует и является простым корнем $f(x)=0$, в то время как b не существует, то из (2,4) получим, что

$$-1<\frac{af'(a)}{f(0)}<0\,;$$

---

3) С соответствующими кратностями.

следовательно,

$$\left|1 + \frac{af'(a)}{f(0)}\right| < 1\,,$$

и по (1,1) делитель $x - a$ устойчив для метода Лина.

Аналогично доказывается случай, когда $f(x)$ имеет только отрицательные корни.

Остается проверить случай, когда $f(x) = 0$ имеет как положительные так и отрицательные корни. Из предположений, что степень $f(x)$ выше второй и наименьший положительный корень a и наибольший отрицательный корень b являются простыми, следует, что левая часть (10) положительна, и по крайней мере одно из чисел

$$\gamma_1 = -\frac{af'(a)}{2f(0)}, \quad \gamma_2 = -\frac{bf'(b)}{2f(0)}$$

положительно и меньше единицы.

Если $0 < \gamma_1 < 1$, то

$$\left|1 + \frac{af'(a)}{f(0)}\right| < 1\,,$$

т. е. по (1,1) $x - a$ является устойчивым. Аналогично, $x - b$ — устойчивый делитель, если $0 < \gamma_2 < 1$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства следует, что в последнем случае $x - a$ является устойчивым, если

$$|af'(a)| \leqq |bf'(b)|\,.$$

Замечание 2. Можно показать без труда, что 3° из (2,4) равносильно следующему утверждению: Если $f(x)$ — многочлен с одними вещественными корнями, a, b $(a < b)$ — его два соседних корня и $f(x) > 0$ в (a, b), то

$$f(x) \geqq \frac{(x-a)(b-x)}{b-a}\,[f'(a)]^{\frac{x-a}{b-a}}\,[-f'(b)]^{\frac{b-x}{b-a}}\,.$$

Литература

[1] *В. Л. Загускин:* Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений, Москва 1960.

Výtah

POZNÁMKA O LINOVĚ METODĚ

MIROSLAV FIEDLER, Praha

Dokazuje se tato věta:

Nechť $f(x)$ je reálný polynom stupně alespoň třetího a nechť rovnice $f(x) = 0$ má jen reálné nenulové kořeny. Je-li jednoduchý jak nejmenší kladný kořen a, tak i největší záporný kořen b této rovnice (pokud existují), pak alespoň jeden z dělitelů $x - a$, $x - b$ polynomu $f(x)$ je stabilní vzhledem k Linově metodě (tj., vyjdeme-li z polynomu $x - a'$ resp. $x - b'$ dostatečně blízkého k $x - a$ resp. $x - b$, pak Linova metoda předposledního zbytku konverguje k $x - a$ resp. $x - b$). Neexistuje-li jeden z kořenů a nebo b, pak dělitel odpovídající zbylému kořenu je stabilní.

Summary

A REMARK ON LIN'S METHOD

MIROSLAV FIEDLER, Praha

The following theorem is proved:

Let $f(x)$ be a real polynomial of degree $\geqq 3$ and let all the roots of $f(x) = 0$ be real and different from zero. If the smallest positive root a and the greatest negative root b of this equation (as far as they exist) are both simple then at least one of the divisors $x - a$, $x - b$ of $f(x)$ is stable with respect to Lin's method (i.e. if we proceed from a polynomial $x - a'$, $x - b'$ resp. sufficiently near to $x - a$, $x - b$ resp. then Lin's method converges to $x - a$, $x - b$ resp.). In the case that one of the roots a, b does not exist, the divisor corresponding to the other root is then stable.