Ivo Vrkoč

Über eine bestimmte Klasse der zufälligen Prozesse mit absorbierten Barrieren

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 4, 402--425

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

ÜBER EINE BESTIMMTE KLASSE DER ZUFÄLLIGEN PROZESSE MIT ABSORBIERTEN BARRIEREN

IVO VRKOČ, Praha

(Eingelangt am 15. Februar 1963)

In diesem Artikel sind die Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit angeführt, dass ein bestimmter Punkt eine gewisse Grenze überschreitet, der unter dem Einfluss von Störungen in Bewegung gesetzt ist. ($\bar{P}(\sup_{\tau \leqq t} |x(\tau, \omega)| \geqq v)$, $P(|x(t, \omega)| \geqq v)$ usw).[1]) Unter dem Begriff Störungen verstehen wir hier einen zufälligen Prozess, der in endlicher Anzahl disjunkter Zeitintervalle wirkt und die weiter angeführten Bedingungen erfüllt. Die Ergebnisse sind in asymptotischer Form angeführt, d.h., wir setzen voraus, dass die Anzahl der höheren angeführten Zeitintervalle ins Unendliche wächst, weiter, dass für die Parameter (a), (b), (c) die Formel (I,0) gilt und dadurch werden die Grenzformeln für die Wahrscheinlichkeit $\bar{P}(\sup_{\tau \leqq t} |x(\tau, \omega)| \geqq v)$ usw. bestimmt. Mit dem Problem: ähnliche Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen beschäftigt sich Dinges H. [1], aber unter ganz andere Voraussetzungen über Zufallsprocess. Hier wird nichts anderes ausser (1), (2), (3) über die Strukture der Prozesse vorausgesetzt. Die Ausdrücke $P(|x(t, \omega)| \geqq v)$, $\bar{P}(\sup_{\tau \leqq t} |x(\tau, \omega)| \geqq v)$ haben Bedeutung z.B. für die Definition der stochastischen Stabilität [2] ... [4]. Zum Schluss dieser Arbeit wird die Verwendung der Ergebnisse an einer sehr einfachen Differentialgleichung $\dot{x} = R(t, x, \omega)$ durchgeführt, wo $R(t, x, \omega)$ bestimmte Störungen bezeichnet.

Damit wir über die angeführten Wahrscheinlichkeiten sprechen könnten, müssen wir voraussetzen, dass die Wirkung der Störungen in einem gewissen Sinne klein ist. Es sei $I_k = \langle t_1^k, t_2^k \rangle$ eines von den früher erwähnten Zeitintervallen. Wir werden

$$\text{(a)} \qquad E(|x(t_2^k) - x(t_1^k)| \,\big|\, x(t), t \leqq t_1^k) \leqq \delta(t_2^k - t_1^k)$$

für alle k voraussetzen, wo $E(x \,|\, y)$ den bedingten Erwartungswert bezeichnet. Weiter werden wir fordern, dass die Störungen die systematischen Fehler nicht bewirken. D.h.

$$\text{(b)} \qquad E(x(t_2^k) - x(t_1^k) \,\big|\, x(t), t \leqq t_1^k) = 0\,.$$

[1]) $\bar{P}(A) = \inf_{B \supset A} P(B)$, wo A messbar sind.

Die dritte Bedingung wird mit Hilfe des Beispieles abgeleitet. Das Beispiel zeigt, dass die Bedingungen (a), (b) nicht genügen, damit die systematischen Fehler nicht entstehen. Wir werden also voraussetzen: es existiert die Konstante $K > 0$ so, dass

$$\text{(c)} \qquad P(|x(t) - x(t_1^k)| > K(t - t_1^k) \,|\, x(t), t \leqq t_1^k) = 0$$

gilt. Weiter werden wir voraussetzen, dass die Zeitintervalle gleiche Länge haben. Wenn die Längen der Zeitintervalle verschieden sein können und d nur die obere Grenze der Längen ist, dann ist es möglich das neue Problem in das untersuchte Problem zu überführen, aber mit anderen Parameten. Es ist darum möglich, dass wir die nebeneinander liegenden Zeitintervalle, deren Summe nicht grösser als d ist, wie ein einziger Zeitintervall nehmen können.

Die Prozesse, die wir hier verwenden, können auf verschiedenen Räumen Ω definiert sein. Wenn trotzdem die Zufallsgrössen $x_1(\omega) \ldots x_n(\omega)$ in dem gemeinsamen Raum $\Omega(\mathscr{F}, P)$ definiert sind, können wir diese Zufallsgrössen in den Euklidischen Raum $\mathscr{E}_n$ des Dimension n transformieren. Wir erhalten das neue Wahrscheinlichkeitmass P^* in $\mathscr{E}_n$ mit Hilfe der Transformation:

$$\omega \in T^{-1}(A) \quad \text{wenn} \quad [x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)] \in A$$

gilt (A ist B-menge in $\mathscr{E}_n$).

Mit Rücksicht auf [5] können wir die bedingten Distributionen

$$F(\lambda_1 \,|\, \lambda_2 \ldots, \lambda_n) = P^*(x_1(\omega) \leqq \lambda_1 \,|\, x_2(\omega) = \lambda_2, \ldots, x_n(\omega) = \lambda_n)$$

angeführen. Weiter können wir den bedingten Erwartungswert

$$E(\varphi(x_1(\omega)) \,|\, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_n) = \int \varphi(\lambda_1) \, \mathrm{d}F(\lambda_1 \,|\, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

angeführt, dass diese Gleichung für alle $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gilt. Durch Anwendung dieser Bezeichnungen, können wir die Bedingungen (a), (b), (c) in die neue Form überführen und definieren die Klasse der zufälligen Prozesse, mit denen wir uns beschäftigen werden.

Definition 1. Es seien die Zahlen t_0, $d > 0$ gegeben. Bezeichnen wir $t_k = t_0 + kd$. $X_{t_0,d}$ ist die Klasse der Prozesse $x(t, \omega)$, die für alle $t \geqq t_0$ definiert sind (aber notwendigerweise nicht in gemeinsamen Ω) und

(1) $E(x(t_{k+1}, \omega) - \mu \,|\, x(t_k) = \mu, x(t_{k-1}, \omega) = \alpha_{k-1}, \ldots, x(t_0, \omega) = \alpha_0) = 0$

(2) $E(|x(t_{k+1}, \omega) - \mu| \,|\, x(t_k, \omega) = \mu, x(t_{k-1}, \omega) = \alpha_{k-1}, \ldots, x(t_0, \omega) = \alpha_0) \leqq \delta d$

(3) $P(|x(t, \omega) - \mu| > K(t - t_k) \,|\, x(t_k, \omega) = \mu, x(t_{k-1}, \omega) = \alpha_{k-1}, \ldots, x(t_0, \omega) = \alpha_0) = 0$

für alle $t_k \leqq t \leqq t_{k+1}$ erfüllen.

Wir wollen die Ausdrücke

(4) $$P_1(\delta, K, v, d, t) = \sup_{x \in X_{t_0,d}} \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t} x(\tau, \omega) \geqq v), \quad x(t_0, \omega) \equiv 0$$

(5) $$P_2(\delta, K, v, d, t) = \sup_{x \in X_{t_0,d}} \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t} |x(\tau, \omega)| \geqq v), \quad x(t_0, \omega) \equiv 0$$

abschätzen. Diese Abschätzungen werden im Sinn der asymptotischen Formeln durchgeführt. Die folgende Definition des beschränkten Prozesses im Punkt erleichtert uns sehr die Situation. Nach Hilfsatz 2. können wir nämlich die Wahrscheinlichkeit $\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t} x(\tau, \omega) \geqq v)$ mit Hilfe des geeigneteren Ausdruckes $P(x_\lambda(t, \omega) \geqq \lambda)$ abschätzen.

Definition 2. Es sei der Prozess $x(t, \omega)$ gegeben, der in $\langle t_0, \infty)$ definiert ist. Es sei die reele Zahl λ gegeben und K, d sind die Zahlen aus den Bedingungen (1) ... (3). Wenn für feste ω die Zahl t_k so existiert, dass $x(t_k, \omega) \geqq \lambda - Kd$, dann bezeichnen wir $t(\omega)$ das Minimum solcher Zahlen. Im umgekehrten Fall nehmen wir $t(\omega) = \infty$ an. Es sei $x_\lambda(t, \omega) = x_\lambda(t(\omega), \omega) = x(t(\omega), \omega)$ für $t \geqq t(\omega)$, $x_\lambda(t, \omega) = x(t, \omega)$ für $t \leqq t(\omega)$. Den Prozess $x_\lambda(t, \omega)$ nennen wir einen im Punkte λ beschränkten Prozess, welcher dem Prozess $x(t, \omega)$ entspricht.

Die Hilfsätze 1.–4. bestimmen die grundlegenden Eigenschaften der im Punkt beschränkten Prozesse.

Hilfsatz 1. *Es sei $x \in X_{t_0,d}$, dann ist auch $x_\lambda \in X_{t_0,d}$.*

Beweis. Aus der Bedingungen (1) ... (3) folgt:

(1′) $$E(x(t_{k+1}) - x(t_k) \mid x(t_k), \ldots, x(t_0)) = 0,$$

(2′) $$E(|x(t_{k+1}) - x(t_k)| \mid x(t_k), \ldots, x(t_0)) \leqq \delta d,$$

(3′) $$P(|x(t) - x(t_k)| > K(t - t_k) \mid x(t_k), \ldots, x(t_0)) = 0 \quad \text{für} \quad t_k \leqq t \leqq t_{k+1},$$

für fast alle ω (Im $\Omega, \mathscr{F}, P$). In diesen Ausdrücken können wir x und x_λ vertauschen. Im Fall, dass für feste ω $x(t_l, \omega) < \lambda - Kd$ für alle $l \leqq k$ gilt, muss die Ungleichung $t(\omega) \geqq t_{k+1}$ gelten und also $x_\lambda(t, \omega) = x(t, \omega)$ für $t \leqq t_{k+1}$ sein. Im Fall, dass für feste ω $x_\lambda(t_k, \omega) \geqq \lambda - Kd$ ist, muss die Gleichung $x_\lambda(t, \omega) = x(t_k, \omega)$ für $t \geqq t_k$ gelten. Die Bedingungen (1′) ... (3′) für x_λ, können wir wieder auf die Bedingungen (1) ... (3) für x_λ überführen. Die Hilfsätze 2.–5. führe ich ohne Beweis an.

Hilfsatz 2. *Es sei $x \in X_{t_0,d}$, dann gilt*

$$P(x_{\lambda+Kd}(t, \omega) \geqq \lambda) \leqq P^-(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t} x(\tau, \omega) \geqq \lambda) \leqq$$
$$\leqq \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t} x(\tau, \omega) \geqq \lambda) \leqq P(x_\lambda(t, \omega) \geqq \lambda - Kd).$$

(*Wenn die Menge M nicht messbar ist, setzen wir* $P^-(M) = \sup_{A \subset M} P(A)$, *wo A messbar sind.*)

Hilfsatz 3. *Der Ausdruck* $P(x_\lambda(t, \omega) \geqq \lambda - Kd)$ *ist die nichtfallende Funktion* t *für feste* λ *und für einen festen Prozess* $x \in X_{t_0,d}$.

Hilfsatz 4. *Der Ausdruck* $P(x_\lambda(t, \omega) \geqq \lambda - Kd)$ *ist die nichtwachsende Funktion* λ, *für feste* t *und für einen festen Prozess* $x \in X_{t_0,d}$.

Es sei Z_Θ die Menge der Prozesse $x \in X_{t_0,d}$ die die Ungleichung (2) mit $\delta = \Theta$ erfüllt (für feste d, λ, K). Setzen wir

$$\zeta(\Theta) = \sup_{x \in Z_\Theta} P(x_\lambda(t, \omega) \geqq \lambda - Kd).$$

Hilfsatz 5. *Die Funktion* $\zeta(\Theta)$ *ist nichtfallend.*

Das wichtige Ergebnis des Hilfsatzes 2. ist, dass es uns den Ausdruck $P(x(t, \omega) \geqq \nu)$ abschätzen genügt. Wir können uns daher nur mit einer kleineren Klasse der Prozesse $X^*_{t_0,d} \subset X_{t_0,d}$ beschäftigen, die die bestimmte Markoffsches Eigenschaft haben.

Definition 3. $X^*_{t_0,d}$ ist die Klasse der Prozesse x die in $X_{t_0,d}$ gehören und für die die Bedingungen $P(x(t) \in A \mid x(t_k) = \mu, x(t_{k-1}) = \alpha_{k-1}, \ldots, x(t_1) = \alpha_1) = P(x(t) \in \in A \mid x(t_k) = \mu)$ für jedes ganze $k \geqq 0$ und für alle $t \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$ erfüllt sind.

Hilfsatz 6. *Es sei* $x(t, \omega)$ *der Prozess, der in* $\langle t_0, \infty)$ *definiert ist,* $x \in X_{t_0,d}$, *dann existiert der Prozess* $x^*(t, \varrho)$ *(aber er kann in einem anderen* Ω *definiert sein) so, dass* $x^* \in X^*_{t_0,d}, P_\varrho(x^*(t_0, \varrho) \leqq \lambda) = P_\omega(x(t_0, \omega) \leqq \lambda)$ *und*

$$(6,1) \qquad P_\varrho(x^*(t_{k+1}) \in A \mid x^*(t_k) = \mu) = P_\omega(x(t_{k+1}) \in A \mid x(t_k) = \mu)$$

für alle $t \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$.

Bemerkung 1. *Aus* (6,1) *folgt, dass der Prozess* x^* *auch* (1) ... (3) *erfüllt, d.h.* $x^* \in X_{t_0,d}$ *folgt aus* (6,1) *und dabei für jedes* $i = 1, \ldots, n$, $P(x(t_i) \leqq \lambda) = P(x^*(t_i) \leqq \leqq \lambda)$ *ist.*

Beweis. Anfangs werden wir die Prozesse x, x^* nur in der Zeitpunkten $t = t_i$, $i = 0, \ldots, n$ nehmen. Die Distribution des Prozesses x^* d.h.

$$F^*(\lambda_n, \ldots, \lambda_1) = P(x^*(t_n) \leqq \lambda_n, \ldots, x^*(t_1) \leqq \lambda_1)$$

definieren wir

$$(6,2) \qquad F^*(\lambda_n, \ldots, \lambda_1) = \int_{-\infty}^{\lambda_{n-1}} \ldots \int_{-\infty}^{\lambda_1} F(\lambda_n \mid \Theta_{n-1}) \, \mathrm{d}_{n-1} F(\Theta_{n-1} \mid \Theta_{n-2}) \ldots$$
$$\ldots \mathrm{d}_2 F(\Theta_2 \mid \Theta_1) \, \mathrm{d}_1 F(\Theta_1),$$

wo $F(\lambda_{k+1} \mid \lambda_k) = P(x(t_{k+1}) \leqq \lambda_{k+1} \mid x(t_k) = \lambda_k)$ ist und d_i bezeichnet, dass wir über die Variable Θ_i integrieren. Es ist bekannt, dass für die bedingten Distributionen $F^*(\lambda_k \mid \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_1)$

$$(6,3) \qquad F^*(\lambda_k \mid \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_1) = F^*(\lambda_k \mid \lambda_{k-1}), \quad F^*(\lambda_k \mid \lambda_{k-1}) = F(\lambda_k \mid \lambda_{k-1})$$

gilt, wo $F(\lambda_k \mid \lambda_{k-1})$ die bedingte Distribution des Prozesses x ist. Jetzt müssen wir noch den Prozess x^* für alle $t \geqq t_0$ definieren. Den Prozess x^* werden wir für $t \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$ so definieren, dass die Gleichungen

$$(6,4) \qquad P(x^*(t) \leqq \lambda \mid x^*(t_k) = \lambda_k, \ldots, x^*(t_1) = \lambda_1) =$$

$$= P\left(x^*(t_{k+1}) \leqq \lambda_k + d\,\frac{\lambda - \lambda_k}{t - t_k} \,\middle|\, x^*(t_k) = \lambda_k, \ldots, x^*(t_1) = \lambda_1\right) \quad \text{für} \quad t_k \leqq t \leqq t_{k+1}$$

gelten. Aus (6,3) und (6,4) folgt (6,1) und die Bemerkung. Die Gleichung aus Definition 3. muss gewiss für $t = t_{k+1}$ gelten. Für übrige $t \in (t_k, t_{k+1})$ folgt diese Gleichung mit Hilfe (6,4).

Weiter möchten wir einen solchen Prozess y finden, der im Ausdruck $E(\varphi(x(t, \omega)))$ den grössten Wert realisiert, wo x zu $X^*_{t_0,d}$ gehören muss und $x(t_0, \omega)$ und $\varphi(\lambda)$ fest sind. Der Prozess ermöglicht uns dann die Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $\sup\limits_{x \in X^*_{t_0,d}} P(x(t, \omega) \geqq \nu)$ zu finden, für die vorgegebene Anfangsdistribution. Für weitere Betrachtungen ist es geeignet, folgende Bezeichnung einzuführen.

Definition 4. $\varphi_a^b(\lambda) = \sup\limits_{x \in X^*_{t_0,d}} E(\varphi(x(t_b)) \mid x(t_a) = \lambda)$, wo die Zahlen a, b ganz und nichtnegativ sind, $a \leqq b$.

Die Hilfsätze 7., 8. beschreiben die grundlegenden Eigenschaften der Ausdrücke $\varphi_a^b(\lambda)$.

Hilfsatz 7. *Wenn für die B-Funktionen (Borelfunktionen) $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\varphi(\lambda) \leqq \psi(\lambda)$ gilt, dann gilt auch $\varphi_a^b(\lambda) \leqq \psi_a^b(\lambda)$ für alle $a \leqq b$.*

Hilfsatz 8. *Es seien a, b, c ganze nichtnegative Zahlen $a < b < c$. Es seien $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ die beschränkten B-Funktionen, die $\varphi_b^c(\lambda) \leqq \psi(\lambda)$ erfüllen, dann*

$$\varphi_a^c(\lambda) \leqq \sup_{x \in X^*_{t_0,d}} E(\psi(x(t_b, \omega)) \mid x(t_a, \omega) = \lambda) = \sup_{x \in X^*_{t_0,d}} \int \psi(\Theta)\, \mathrm{d}F(\Theta \mid \lambda) = \psi_b^a(\lambda)$$

gilt, wo $F(\Theta \mid \lambda)$ die bedingte Distribution $x(t_b)$ laut $x(t_a)$ ist.

Beweis. Zu beliebigen $\varepsilon > 0$ suchen wir den Prozess $x^* \in X^*_{t_0,d}$ auf, sodass

$$(8,1) \qquad \varphi_a^c(\lambda) \leqq E(\varphi(x^*(t_c)) \mid x^*(t_a) = \lambda) + \varepsilon = \int \varphi(\Theta)\, \mathrm{d}_\Theta F^*(\Theta \mid \lambda) + \varepsilon$$

gilt. Es sei $F^*(\Theta \mid \gamma)$ die bedingte Distribution $x^*(t_c)$ laut $x^*(t_a)$ und $F^{**}(\gamma \mid \lambda)$ die bedingte Distribution $x^*(t_c)$ laut $x^*(t_b)$. Es gilt

$$(8,2) \qquad \int \varphi(\Theta)\, \mathrm{d}_\Theta F^*(\Theta \mid \lambda) = \int \left(\left(\int \varphi(\Theta)\, \mathrm{d}_\Theta F^{**}(\Theta \mid \gamma)\, \mathrm{d}_\gamma F(\gamma \mid \lambda) \right) \right).$$

Weiter mit Rücksicht auf die Definition F^{**} gilt

$$(8,3) \qquad \int \varphi(\Theta)\, d_\Theta F^{**}(\Theta \mid \gamma) \leqq \varphi_b^c(\gamma) \leqq \psi(\gamma)\,.$$

Nach (8,1) ... (8,3) ist $\varphi_a^c(\lambda) \leqq \int \psi(\gamma)\, d_\gamma F(\gamma \mid \lambda) + \varepsilon \leqq \psi_a^b(\lambda) + \varepsilon$. Wir können schon leicht die zu bewiesende Ungleichung aus dieser letzten Ungleichung erhalten. Im Fall, dass $\varphi(\lambda)$ konvex ist, können wir einen solchen Prozess wirklich bestimmt.

Hilfsatz 9. *Es sei $\varphi(\lambda)$ konvex, dann ist jede Funktion $\varphi_k^{k+1}(\lambda)$ konvex. Das Maximum im Ausdruck $\varphi_k^{k+1}(\lambda)$ gibt jeder Prozess $x^* \in X^*_{t_0,d}$, für den $F(\lambda_{k+1} \mid \lambda_k) = P^*(x^*(t_{k+1}) \leqq \lambda_{k+1} \mid x^*(t_k) = \lambda_k) = F(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$, wo*

$$(9,1) \quad F(u) = 0 \quad \text{für} \quad u < -Kd\,, \qquad F(u) = 1 \quad \text{für} \quad u \geqq Kd\,,$$

$$F(u) = \frac{\delta}{2K} \quad \text{für} \quad -Kd \leqq u < 0\,, \quad F(u) = 1 - \frac{\delta}{2K} \quad \text{für} \quad 0 \leqq u < Kd\,.$$

Es gilt

$$(9,2) \qquad \varphi_k^{k+1}(\lambda) = E(\varphi(x^*(t_{k+1})) \mid x^*(t_k) = \lambda)\,.$$

Wir suchen den Prozess x, für den $\varphi_k^{k+1}(\lambda) = \int \varphi(\Theta)\, dF(\Theta \mid \lambda)$ gilt.

Weil die bedingte Distribution die Bedingungen (1) ... (3) erfüllt müssen, folgende Beziehungen

$$(9,3) \qquad F(\Theta \mid \lambda) = 0 \quad \text{für} \quad \Theta < \lambda - Kd\,, \quad F(\Theta \mid \lambda) = 1 \quad \text{für} \quad \Theta \geqq \lambda + Kd$$

$$\int \Theta\, dF(\Theta \mid \lambda) = \lambda\,, \quad \int |\Theta - \lambda|\, dF(\Theta \mid \lambda) \leqq \delta d$$

gelten. Wir werden nur $F(\Theta)$ anstatt $F(\Theta \mid \lambda)$ schreiben und wir können gewiss $\lambda = 0$ annehmen. Wir haben also die Bedingungen

$$(9,4) \qquad F(\lambda) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < -Kd$$

$$(9,5) \qquad F(\lambda) = 1 \quad \text{für} \quad \lambda \geqq Kd$$

$$(9,6) \qquad \int \lambda\, dF = 0$$

$$(9,7) \qquad \int |\lambda|\, dF = \gamma \leqq \delta d\,.$$

Wir müssen die Funktion $F(\lambda)$ so aufsuchen, dass der Ausdruck

$$(9,8) \qquad \int \varphi(\lambda)\, dF(\lambda)$$

maximal sein wird. Es sei $F(\lambda)$ „die Stiegenfunktion" (das ist die nichtfallende Funktion, die nur eine endliche Anzahl der Werte hat). Wir setzen voraus, dass $F(\lambda)$ die Unstetigkeit im Punkt v, $0 < |v| < Kd$ hat. Wir werden zeigen, dass eine neue „Stiegenfunktion" existiert, die im Punkt v stetig ist und in den übrigen Punkten (anstatt $-Kd, 0, Kd$) unstetig sein könnte, nur im Fall, dass $F(\lambda)$ dort unstetig ist. Die neu Funktion muss auch (9,4) ... (9,7) erfüllen und der Ausdruck (9,8) darf nicht kleiner werden. Wir können nur den Fall $v > 0$ annehmen (der Fall $v < 0$ ist analog) Setzen wir $e = F(v) - F(v - 0)$, $F_0(\lambda) = 0$ für $\lambda < 0$, $F_0(\lambda) = e(1 - v/Kd)$ für $0 \leqq \lambda < v$, $F_0(\lambda) = -ev/Kd$ für $v \leqq \lambda < Kd$ und weiter $\tilde{F}(\lambda) = F(\lambda) + F_0(\lambda)$ für $\lambda < Kd$, $\tilde{F}(\lambda) = F(\lambda) = 1$ für $\lambda \geqq Kd$. Die Funktion $\tilde{F}(\lambda)$ ist selbverständlich stetig im Punkt v und die Stetigkeit in den übrigen Punkten (anstatt $-Kd, 0, Kd$) ist unverändert. Es gilt

$$(9,9)\quad \int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\tilde{F}(\lambda) = \int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}F(\lambda) + e\left[\varphi(0)\left(1 - \frac{v}{Kd}\right) + \varphi(Kd)\,\frac{v}{Kd} - \varphi(v)\right].$$

Wir erhalten $\int \lambda\,\mathrm{d}\tilde{F}(\lambda) = \int \lambda\,\mathrm{d}F(\lambda) = 0$ und $\int |\lambda|\,\mathrm{d}\tilde{F}(\lambda) = \int |\lambda|\,\mathrm{d}F(\lambda) \leqq \delta d$, wenn wir in (9,9) $\varphi(\lambda) = \lambda$ oder $\varphi(\lambda) = |\lambda|$ setzen. Die Bedingungen (9,6) und (9,7) sind also erfüllt. Im Fall, dass $\varphi(\lambda)$ konvex ist, ist der letzte Ausdruck in (9,9) in der Klammer nichtnegativer und $\int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\tilde{F}(\lambda) \geqq \int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}F(\lambda)$ gilt. Wir können diesen Prozess wiederholen, um die Funktion $F^*(\lambda)$ zu erhalten, die nur in den Punkten $-Kd, 0, Kd$ Unstetigkeiten haben soll. Eine solche Funktion ist mit Rücksicht auf (9,4) ... (9,7) eindeutig bestimmt.

$$(9,10)\quad F^*(\lambda) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < -Kd\,, \quad F^*(\lambda) = \tfrac{1}{2}\min\left(\frac{\gamma}{Kd}, 1\right) \quad \text{für} \quad -Kd \leqq \lambda < 0\,,$$

$$F^*(\lambda) = \tfrac{1}{2}\max\left(2 - \frac{\gamma}{Kd}, 1\right) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \lambda < Kd,\; F^*(\lambda) = 1 \quad \text{für} \quad \lambda \geqq Kd\,.$$

Der Ausdruck (9,8) ist in diesem Fall gleich $\int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}F^*(\lambda) = \varphi(-Kd)\,p(\gamma) + \varphi(0)\,(1 - 2p(\gamma)) + \varphi(Kd)\,p(\gamma)$, wo $p(\gamma) = \frac{1}{2}\min(\gamma/Kd, 1)$. Wir bekommen den grössten Wert im (9,8), wenn wir die Funktion nach (9,10) mit $\delta = \gamma$ wählen, weil $\varphi(\lambda)$ konvex ist. Es kann jede Distribution $F(\lambda)$, die (9,4) ... (9,7) erfüllt, mit einer „Stiegendistribution" $F_1(\lambda)$ aproximiert werden, die (9,4) ... (9,7) wieder erfüllt und so dass $|\int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}F(\lambda) - \int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}F_1(\lambda)|$ beliebig klein ist. Die Distribution $F^*(\lambda)$ gibt also das Maximum für (9,8). Die Funktion $\varphi_k^{k+1}(\lambda)$ ist gleich $\varphi_k^{k+1}(\lambda) = \int \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}F^*(\lambda) = \varphi(\lambda - Kd)\,p(\delta) + \varphi(\lambda)\,(1 - 2p(\delta)) + \varphi(\lambda + Kd)\,p(\delta)$ und φ_k^{k+1} ist wieder konvex.

Leider, können wir nicht nur konvexe Funktionen $\varphi(\lambda)$ betrachten. Wir müssen auch solche Funktionen annehmne, die im folgenden Hilfsatz beschrieben werden. In diesem Fall gibt der Prozess, der im Hilfsatz 9. konstruirt wird nur die obere Grenze, aber nicht das Maximum des Ausdruckes. Es zeigt doch, dass in den asymptotischen Formeln dieser Umstand keine Rolle spielt.

Hilfsatz 10. *Wir setzen* $0 \leqq \varphi(\lambda) \leqq 1$, $\varphi(\lambda) = 1$ *für* $\lambda \geqq \nu$, *voraus, wo* $\nu = sKd$ (*s ist die natürliche Zahl*), $\varphi(\lambda)$ *konvex für* $\lambda \leqq \nu$ *ist. Es gilt*

$$E(\varphi(x(t_n))) \leqq E(\varphi^*(y(t_n))) , \tag{10,1}$$

für jeden Prozess $x \in X^*_{t_0,d}$, *für beliebige* $\varepsilon > 0$ *und jede beliebige natürliche Zahl n, wo*

$$\begin{aligned} \varphi^*(\lambda) &= \varphi(\lambda) \quad \textit{für} \quad \lambda \notin (\nu - 2Kd - \varepsilon, \nu) \\ \varphi^*(\lambda) &= 1 \quad \textit{für} \quad \lambda \in \langle \nu - 2Kd, \nu \rangle , \\ \varphi^*(\lambda) & \quad \textit{linear in} \quad \langle \nu - 2Kd - \varepsilon,\ \nu - 2Kd \rangle \quad \textit{ist} . \end{aligned} \tag{10,2}$$

Der Prozess y ist der im Punkte $\nu - Kd$ *beschränkte Prozess, welcher dem Prozess z entspricht. Der Prozess z ist in folgender Weise festgestellt:*

$$\begin{aligned} & P(z(t_{k+1}) = \mu - Kd \mid z(t_k) = \mu) = p = \tfrac{1}{2} \min (\delta/K, 1) , \\ & P(z(t_{k+1}) = \mu + Kd \mid z(t_k) = \mu) = p, \ P(z(t_{k+1}) = \mu \mid z(t_k) = \mu) = \\ & = 1 - 2p, \ P(z(t_0) \leqq \mu) = P(x(t_0) \leqq \mu) . \end{aligned} \tag{10,3}$$

Beweis. Wir werden die Folgenden Beziehungen und Behauptung brauchen. Es sei $\varphi(\lambda)$ eine B-Funktion, $0 \leqq \varphi(\lambda) \leqq 1$. Wenn $F(\lambda \mid \mu)$ die bedingte Distribution eines Prozesses $x \in X^*_{t_0,d}$ ist, dann gilt

$$0 \leqq \int \varphi(\lambda) \, d_\lambda F(\lambda \mid \mu) \leqq 1 . \tag{10,4}$$

Es sei $\Theta(\lambda)$ eine lineare Funktion $\Theta(\lambda) = a\lambda + b$, dann gilt

$$E(\Theta(x(t_{k+1})) \mid x(t_k) = \mu) = a\mu + b , \tag{10,5}$$

wenn $x \in X^*_{t_0,d}$.

Es sei $\varphi(\lambda)$ konvex für $\lambda \leqq \nu$, linear in $\langle \nu - 2Kd, \nu \rangle$, $\varphi(\lambda) = 1$ für $\lambda \geqq \nu$, dann gelten für den Maximumprozess (d.h. der Prozess, der in φ_k^{k+1} ein Maximum gibt) die folgenden Beziehungen: wenn $\lambda < \nu - Kd$, dann gelten im Zeitintervall $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$ die Bedingungen (10,3), wenn $\lambda \geqq \nu - Kd$, dann gilt $P(x(t_{k+1}) = \lambda \mid x(t_k) = \lambda) = 1$. Die Funktion φ_k^{k+1} ist konvex für $\lambda \leqq \nu$. Wir beweisen jetzt diese Behauptung. Nehmen wir die Funktion $\beta(\lambda) : \beta(\lambda) = \varphi(\lambda)$ für $\lambda \leqq \nu$ und $\beta(\lambda)$ ist linear für $\lambda \geqq \nu - 2Kd$. Es ist sicher $\varphi(\lambda) \leqq \beta(\lambda)$ und $\beta(\lambda)$ ist konvex. Nach Hilfsatz 9. existiert der Prozess, der im Ausdruck $\beta_k^{k+1}(\lambda)$ das Maximum gibt und dieser Prozess (10,3) in $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$ erfüllt. Für $\lambda \geqq \nu - 2Kd$ ist $\beta(\lambda)$ linear und wir können nach (10,5) den Prozess beschränkt im ν nehmen. Mit Rücksicht auf Hilfsatz 7. ist $\varphi_k^{k+1}(\lambda) \leqq \beta_k^{k+1}(\lambda)$. Weil für den Prozess beschränkt im ν, $P(x(t_{k+1}) > \nu \mid x(t_k) = \lambda) = 0$ (unter der Voraussetzung $\lambda < \nu$), ist $\varphi_k^{k+1}(\lambda) = \beta_k^{k+1}(\lambda)$ für $\lambda \leqq \nu$. Nach Hilfsatz 9. ist $\varphi_k^{k+1}(\lambda)$ konvex für $\lambda \leqq \nu$. Wir bekommen selbverständlich $\varphi_k^{k+1}(\lambda) = 1$ für $\lambda > \nu$.

Jetzt können wir schon Hilfsatz 10. beweisen. Definieren wir ${}^n\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)$ für $\lambda \notin (\nu - 2Kd, \nu)$, ${}^n\psi(\lambda)$ ist linear in $\langle \nu - 2Kd, \nu \rangle$. Weil $\varphi(\lambda)$ konvex ist, gilt

$$(10{,}6) \qquad \varphi(\lambda) \leqq {}^n\psi(\lambda) .$$

Weil $\varphi^*(\lambda) = 1$ für $\lambda \in \langle \nu - 2Kd, \nu \rangle$, gilt

$$(10{,}7) \qquad {}^n\psi(\lambda) \leqq \varphi^*(\lambda) .$$

Nach Hilfsatz 9. gilt

$$(10{,}8) \qquad \varphi^n_{n-1}(\lambda) \leqq {}^n\psi^n_{n-1}(\lambda) .$$

Aus der Behauptung und (10,7) folgt

$$(10{,}9) \qquad {}^n\psi^n_{n-1}(\lambda) = \int {}^n\psi(\mu) \, \mathrm{d}\tilde{F}(\mu \,|\, \lambda) \leqq \int \varphi^*(\mu) \, \mathrm{d}\tilde{F}(\mu \,|\, \lambda) ,$$

wo $\tilde{F}(\mu \,|\, \lambda)$ die bedingte Distribution des Prozesses ist, der (10,3) erfüllt und beschränkt im ν ist. Setzen wir $\varphi^*_{n-1}(\lambda) = \int \varphi^*(\mu) \, \mathrm{d}\hat{F}(\mu \,|\, \lambda)$, wo $\hat{F}(\mu \,|\, \lambda)$ ist die bedingte Distribution des Prozesses der (10,3) erfüllt und im $\nu - Kd$ beschränkt ist. Nach (10,1) ist

$$(10{,}10) \qquad \varphi^*_{n-1}(\lambda) = 1 \quad \text{für} \quad \lambda \geqq \nu - 2Kd .$$

Aus (10,10), (10,1) und (10,9) folgt

$$(10{,}11) \qquad {}^n\psi^n_{n-1}(\lambda) \leqq \varphi^*_{n-1}(\lambda) .$$

Mit Rücksicht auf die Behauptung ist ${}^n\psi^n_{n-1}(\lambda)$ konvex für $\lambda \leqq \nu$ und nach (10,4) ist ${}^n\psi^n_{n-1}(\lambda) \leqq 1$. Wir werden also ${}^{n-1}\psi(\lambda)$ definieren:

$$\begin{gathered} {}^{n-1}\psi(\lambda) = {}^n\psi^n_{n-1}(\lambda) \quad \text{für} \quad \lambda \notin (\nu - 2Kd, \nu) \\ {}^{n-1}\psi(\lambda) \quad \text{ist linear in} \quad \langle \nu - 2Kd, \nu \rangle . \end{gathered}$$

Es gilt ${}^{n-1}\psi(\lambda) \geqq {}^n\psi^n_{n-1}(\lambda)$ und nach (10,8) gilt

$$(10{,}12) \qquad \varphi^n_{n-1}(\lambda) \leqq {}^{n-1}\psi(\lambda) .$$

Nach (10,10), (10,11), (10,4) ist ${}^{n-1}\psi(\lambda) \leqq \varphi^*_{n-1}(\lambda)$.

Im Beweis können wir durch vollständige Induktion fortsetzen. Wir werden voraussetzen, dass folgende Funktionen ${}^k\psi$, φ^*_k existieren.

$$(10{,}13) \qquad \varphi^n_k(\lambda) \leqq {}^k\psi(\lambda)$$

$$(10{,}14) \qquad {}^k\psi(\lambda) \leqq \varphi^*_k(\lambda) \text{ für alle } \lambda, \ \varphi^*_k(\lambda) = 1 \text{ für } \lambda \geqq \nu - 2Kd$$

$$(10{,}15) \qquad {}^k\psi(\lambda) \text{ ist konvex für } \lambda \leqq \nu$$

$$(10{,}16) \qquad {}^k\psi(\lambda) \text{ ist linear in } \langle \nu - 2Kd, \nu \rangle$$

$$(10{,}17) \qquad {}^k\psi(\lambda) \leqq 1 \text{ für alle } \lambda, \ {}^k\psi(\lambda) = 1 \text{ für } \lambda \geqq \nu .$$

Nach Hilfsatz 8.

$$\varphi_{k-1}^{n}(\lambda) \leqq {}^{k}\psi_{k-1}^{k}(\lambda) \tag{10,18}$$

ist. Mit Rücksicht auf der Behauptung (10,15) (10,16) ist ${}^{k}\psi_{k-1}^{k}(\lambda)$ konvex für $\lambda \leqq \nu$ und die Ungleichung ${}^{k}\psi_{k-1}^{k}(\lambda) = \int {}^{k}\psi(\mu)\, d\bar{F}(\mu \mid \lambda) \leqq \int \varphi_k^*(\mu)\, d\bar{F}(\mu \mid \lambda)$ gilt. Die letzte Ungleichung ist nach (10,14) erfüllt. Nach (10,4) und (10,14) ist $\int \varphi_k^*(\mu)\, d\bar{F}(\mu \mid \lambda) \leqq$ $\leqq \int \varphi_k^*(\mu)\, d\hat{F}(\mu \mid \lambda) = \varphi_{k-1}^*(\lambda)$ und es gilt also

$$ {}^{k}\psi_{k-1}^{k}(\lambda) \leqq \varphi_{k-1}^*(\lambda) \tag{10,19}$$

Definieren wir jetzt ${}^{k-1}\psi(\lambda) = {}^{k}\psi_{k-1}^{k}(\lambda)$ für $\lambda \notin (\nu - 2Kd, \nu)$, ${}^{k-1}\psi(\lambda)$ ist linear in $\langle \nu - 2Kd, \nu \rangle$. Es gilt ${}^{k}\psi_{k-1}^{k}(\lambda) \leqq {}^{k-1}\psi(\lambda)$, weil ${}^{k}\psi_{k-1}^{k}$ konvex ist. Mit Rücksicht auf (10,19) und weil $\varphi_{k-1}^*(\lambda) = 1$ für $\lambda \geqq \nu - Kd$ ist, gilt (10,14) auch für $k - 1$. (10,15) folgt aus der Behauptung, (10,16) folgt aus der Definition der Funktion ${}^{k-1}\psi(\lambda)$ und (10,17) folgt aus (10,4) ($F(\mu \mid \lambda)$ ist die bedingte Distribution des Prozesses, der im ν beschränkt ist). Wir haben also

$$\varphi_k^n(\lambda) \leqq \varphi_k^*(\lambda) \quad \text{für jede } k \tag{10,20}$$

(s. (10,3), (10,4)). Die Funktion $\varphi_k^*(\lambda)$ entsteht dabei aus $\varphi_{k+1}^*(\lambda)$ mit Hilfe der Formel

$$\varphi_k^*(\lambda) = \int \varphi_{k+1}^*(\mu)\, d\hat{F}(\mu \mid \lambda)\,. \tag{10,21}$$

Wir müssen noch die Gleichung beweisen

$$\varphi_k^*(\lambda) = E(\varphi^*(y(t_n)) \mid y(t_k) = \lambda)\,. \tag{10,22}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &E(\varphi^*(y(t_n)) \mid y(t_{k-1}) = \lambda) = \\ &= E[E(\varphi^*(y(t_n)) \mid y(t_k), y(t_{k-1})) \mid y(t_{k-1}) = \lambda] = \\ &= E[E(\varphi^*(y(t_n)) \mid y(t_k)) \mid y(t_{k-1}) = \lambda]\,, \end{aligned} \tag{10,23}$$

weil y zu $X_{t_0,d}^*$ gehört. Wir erhalten aus (10,22) P-fast überall

$$E(\varphi^*(y(t_n, \omega)) \mid y(t_k, \omega)) = \varphi_k^*(y(t_k, \omega)) \tag{10,24}$$

gilt. Nach (10,21), (10,23), (10,24) erhalten wir $E(\varphi^*(y(t_n)) \mid y(t_{k-1}) = \lambda) = \varphi_{k-1}^*(\lambda)$. Also ist (10,22) für alle k bewiesen. Mit Rücksicht auf die Definition $\varphi_0^n(\lambda)$, (10,20) und (10,22) gilt

$$E(\varphi(x(t_n)) \mid x(t_0) = \lambda) \leqq \varphi_0^n(\lambda) \leqq \varphi_0^*(\lambda) = E(\varphi^*(y(t_n)) \mid y(t_0) = \lambda)\,.$$

Aus dem letzten Ungleichung beweist man leicht (10,1).

In Hilfsatz 11. suchen wir die Abschätzung für $\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x(\tau, \omega) \geqq \lambda)$ mit Hilfe des Ausdruckes $P(y(t_n, \omega) \geqq \nu)$ auf, wo y der Prozess aus Hilfsatz 10. ist.

Hilfsatz 11. *Es sei* $x \in X_{t_0,d}$, *y ist der im* $v - 2Kd$ *beschränkte Prozess der dem Prozess z entspricht, wo z im Hilfsatz* 10. *bestimmt ist. Es gilt*

$$\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x(\tau, \omega) \geqq v) \leqq P(y(t_n) \geqq v - 3Kd)\,. \tag{11,0}$$

Beweis. Wählen wir die Folge der Zahlen $\varepsilon_m \to 0 (m \to \infty,\ \varepsilon_m > 0)$ und der Funktionen $\varphi_m(\lambda) : \varphi_m(\lambda)$ ist konvex für $\lambda \leqq v - Kd$, $\varphi_m(\lambda) = 1$ für $\lambda \geqq v - Kd$, $\varphi_m(\lambda) \to \varphi(\lambda)$, wo $\varphi(\lambda) = 0$ für $\lambda < v - Kd$, $\varphi(\lambda) = 1$ für $\lambda \geqq v - Kd$. Die Funktionen $\varphi^*(\lambda)$ (s. Hilfsatz 10) konvergieren zu der Funktion $\varphi^*(\lambda) : \varphi^*(\lambda) = 0$ für $\lambda < v - 3Kd$, $\varphi^*(\lambda) = 1$ für $\lambda \geqq v - 3Kd$. Zum beliebigen Prozess $x \in X_{t_0,d}$ nehmen wir x_v (s. Definition 2). Nach Hilfsatz 1. ist $x_v \in X_{t_0,d}$ und nach Hilfsatz 2. haben wir

$$\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x(\tau, \omega) \geqq v) \leqq P(x_v(t_n) \geqq v - Kd)\,. \tag{11,1}$$

Wir konstruiren den Prozess $x^* \in X^*_{t_0,d}$ nach Hilfsatz 6. zum Prozess x_v (s. Definition 3.). Nach Bemerkung 1. gilt

$$P(x_v(t_n) \geqq v - Kd) = P(x^*(t_n) \geqq v - Kd)\,. \tag{11,2}$$

Es wird

$$E(\varphi_m(x^*(t_n))) \to E(\varphi(x^*(t_n))) = P(x^*(t_n) \geqq v - Kd) \tag{11,3}$$

erfüllt und auch

$$E(\varphi_m^*(y(t_n))) \to E(\varphi^*(y(t_n))) = P(y(t_n) \geqq v - 3Kd) \tag{11,4}$$

erfüllt, weil die Funktionen $\varphi_m(\lambda)$, $\varphi_m^*(\lambda)$ zu $\varphi(\lambda)$, $\varphi^*(\lambda)$ konvergieren. Mit Rücksicht auf Hilfsatz 10. gilt die Ungleichung

$$E(\varphi_m(x^*(t_n))) \leqq E(\varphi_m^*(y(t_n))) \tag{11,5}$$

(11,0) folgt aus (11,2) ... (11,5).

Jetzt wissen wir schon, welcher Prozess uns ein ungefähres Maximum im Ausdruck $\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t} x(\tau, \omega) \geqq v)$ gibt. Folgender Hilfsatz ermöglicht uns diesen Wert auszurechnen. Er überführt diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Spiegelungsprinzip auf die Wahrscheinlichkeit $P(z(t_n) \geqq v)$.

Hilfsatz 12. *Es sei z der im Hilfsatz* 10. *bestimmte Prozess mit dem Anfangswert* $z(t_0, \omega) = 0$ *und* $y(t)$ *ist der im Punkt v beschränkte Prozess, welcher z entspricht. Es sei* $v = sKd$, *wo s eine natürliche Zahl ist. Es gilt*

$$P(y(t_n) \geqq v) = 2P(z(t_n) \geqq v) - P(z(t_n) = v)\,. \tag{12,1}$$

Beweis. Für jedes ω, für welches die natürliche Zahl $k \leqq n$ existiert, so dass $z(t_k, \omega) = v$, können wir den symmetrischen Pfad nehmen $\tilde{z}(t_j, \omega) = 2v - z(t_j, \omega)$ für $k < j \leqq n$, $\tilde{z}(t_j, \omega) = z(t_j, \omega)$ für $j \leqq k$. Es gilt $P(\sup_{k \leqq n-1} z(t_k, \omega) \geqq v,\ z(t_n, \omega) <$

$< v) = P(z(t_n, \omega) > v)$, weil der Prozess z symmetrisch ist und weil die Zuwächse $z(t_{k+1}) - z(t_k)$ unabhängig sind ($P(A, B)$ ist die Wahrscheinlichkeit $A \cap B$). Weiter ist

$$P(y(t_n, \omega) \geqq v) = P(\sup_{k \leqq n} z(t_k \omega) \geqq v) =$$

$$P(\sup_{k \leqq n-1} z(t_k, \omega) \geqq v,\, z(t_n, \omega) < v) + P(z(t_n, \omega) \geqq v) =$$

$$P(z(t_n, \omega) > v) + P(z(t_n, \omega) \geqq v) =$$

$$= 2P(z(t_n, \omega) \geqq v) - P(z(t_n, \omega) = v)\,.$$

Wir werden die Ausrechnung $P(z(t_n) \geqq v - 3Kd)$ mit Hilfe des Satzes aus [6] durchführen. Wir müssen ihn für den Fall vebessern, dass die Gebiete G_n von n abhängen, aber speziell sind.

Setzen wir vouraus, dass wir das System von n unabhäningen Versuchen haben und bei jedem Versuch kann gerade eine der k disjunkten Erscheinungen entstehen. Jede Erscheinung hat die Wahrscheinlichkeit p_i, $0 \neq p_i \neq 1$, $i = 1, \ldots, k$, die unabhängig von n ist. m_i bezeichnet die Zahl, wievielmal die Erscheinung mit dem Index i realisiert worden ist. Setzen wir $x_i = (m_i - np_i)/\sqrt{(np_i q_i)}$, $q_i = 1 - p_i$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \sqrt{(p_i q_i)} = 0\,, \tag{13,1}$$

weil $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ ist.

Der Ausdruck (13,1) bezeichnet die Ebene im Euklidischen Raum mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_k$. Es sei in dieser Ebene die Folge der Gebiete gegeben $G_n : x_k \geqq \geqq x_1 + \mu_n$, wo die Zahlen μ_n zu μ konvergieren. Wir bezeichnen $P^{(n)}(G_n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt $[x_1, \ldots, x_k]$ zu G_n gehört.

Hilfsatz 13. *Es gilt*

$$P^{(n)}(G_n) \to P(G) = \sqrt{\left(\frac{q_1, \ldots, q_k}{(2\pi)^{k-1} \sum p_i q_i}\right)} \int_G e^{-\frac{1}{2}\sum_i q_i x_i^2}\, dv \tag{13,2}$$

gleichmässig nach μ und gleichmässig nach der Folge $\mu_n \to \mu^*$.[2]) *Im Integral integrieren wir über das Gebiet $G : x_k \geqq x_1 + \mu$ das in der Ebene* (13,1) *ist,* dv *ist das Lebesguesche Mass in der Ebene* (13,1).

B e w e i s. Zu einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ können wir n_0 so aufsuchen dass $\mu - \varepsilon < < \mu_n < \mu + \varepsilon$ für $n > n_0$ ist. Wir bezeichnen $G_{-\varepsilon}$ (und G_ε) das Gebiet, das in der Ebene (13,1) ist und die Ungleichung $x_k \geqq x_1 + \mu - \varepsilon$ ($x_k \geqq x_1 + \mu + \varepsilon$) erfüllt. Es gilt sicher

$$P^{(n)}(G_\varepsilon) \leqq P^{(n)}(G_n) \leqq P^{(n)}(G_{-\varepsilon})\,. \tag{13,3}$$

---

[2]) D.h. Zu beliebiger Zahl $\varepsilon > 0$ existiert n_0 und $\delta > 0$ so, dass $|P^{(n)}(G_n) - P(G)| < \varepsilon$ für $n > n_0$, wenn $|\mu_n - \mu| < \delta$ für $n \geqq n_0$ ist.

Mit Rücksicht auf den Satz in [6] gilt

$$P^{(n)}(G_\varepsilon) \to \sqrt{\left(\frac{q_1, \ldots, q_k}{(2\pi)^{k-1} \sum p_i q_i}\right)} \int_{G_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\sum_i q_i x_i^2} \, dv$$

und

$$P^{(n)}(G_{-\varepsilon}) \to \sqrt{\left(\frac{q_1, \ldots, q_k}{(2\pi)^{k-1} \sum p_i q_i}\right)} \int_{G_{-\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma q_i x_i^2} \, dv \, .$$

Es gilt also (s. (13,3))

$$\limsup_{n\to\infty} P^{(n)}(G_n) \leqq \sqrt{\left(\frac{q_1, \ldots, q_k}{(2\pi)^{k-1} \sum p_i q_i}\right)} \int_{G_{-\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma q_i x_i^2} \, dv \, , \tag{13,4}$$

$$\liminf_{n\to\infty} P^{(n)}(G_n) \geqq \sqrt{\left(\frac{q_1, \ldots, q_k}{(2\pi)^{k-1} \sum p_i q_i}\right)} \int_{G_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\Sigma q_i x_i^2} \, dv \, . \tag{13,5}$$

Es genügt

$$\int_{G_{-\varepsilon} - G_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\Sigma q_i x_i^2} \, dv \to 0$$

mit $\varepsilon \to 0$ zu bewiesen. $G_{-\varepsilon} - G_\varepsilon$ ist das Gebiet, das in der Ebene (13,1) ist und dabei die Ungleichung $x_1 + \mu + \varepsilon \geqq x_k \geqq x_1 + \mu - \varepsilon$ erfüllt. Es ist also das Gebiet in der Ebene (13,1), das zwischen den Ebenen $x_k = x_1 + \mu + \varepsilon$, $x_k = x_1 + \mu - \varepsilon$ ist. Nehmen wir weiter $q = \min q_i$. Selbverständlich gilt

$$\int_{G_{-\varepsilon} - G_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\Sigma q_i x_i^2} \, dv \leqq \int_{G_{-\varepsilon} - G_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2} q \Sigma x_i^2} \, dv \, . \tag{13,6}$$

Mit der Rotation können wir erzielen, dass die Ebene (13,1) in die Ebene $x_2 = 0$ überführt wird und dass die Ebene $x_k = x_1 + \mu + \varepsilon$, $x_k = x_1 + \mu$, $x_k = x_1 + \mu - \varepsilon$ in die Ebenen $x_k = l + f\varepsilon$, $x_k = l$, $x_k = l - f\varepsilon$ überführt werden, wo l die Entfernung der Schnittgerade der Ebenen (13,1) und $x_k = x_1 + \mu$ von Anfangspunkt ist und $f \neq 0$ ist der Koeffizient, der von den Koeffizienten der Ebene (13,1) abhängt. Es ist also

$$\int_{G_{-\varepsilon} - G_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2} q \Sigma x_i^2} \, dv = \int_{H_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2} q \Sigma x_i^2} \, dv \, , \tag{13,7}$$

wo H_ε das Gebiet $x_2 = 0$, $l - f\varepsilon \leqq x_k \leqq l + f\varepsilon$ ist. Weiter haben wir

$$\iint_{H_\varepsilon} \ldots \int e^{-\frac{1}{2} q \Sigma x_i^2} \, dv = \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{\frac{1}{2}(k-2)} \int_{l - f\varepsilon}^{l + f\varepsilon} e^{-\frac{1}{2} q x_k^2} \, dx_k \, . \tag{13,8}$$

Der letzte Ausdruck konvergiert zu Null für $\varepsilon \to 0$ gleichmässig nach l. Die bewiesene Ungleichung (13,2) folgt aus (13,4) ... (13,8).

Ein folgender Hilfsatz ermöglicht uns die Ausrechnung der Formel für

$$\lim P_1(\delta, K, v_n, d_n, t_n)$$

durchzuführen, wenn $t_n/d_n \to \infty$. Nach den Hilfsätze 9. und 10. handelt es sich um die Ausrechnung der Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess z im Moment t_n die Grenze v_n überschreitet.

Hilfsatz 14. *Es seien die Folgen positiver Zahlen t_n, d_n, v_n gegeben so, dass t_n/d_n, $v_n/(Kd_n)$ ganze Zahlen sind, $t_n/d_n \to \infty$, $v_n/\sqrt{(t_n d_n)} = \alpha_n \to \alpha$, $0 \leqq \alpha < \infty$ und wir setzen voraus, dass die Zahlen δ, K (s. (2), (3)) $0 < \delta < K$ erfüllen. Bezeichnen wir $P_n^+ = P(z(t_n) \geqq v_n)$, wo z in Hilfsatz 10. bestimmt ist. (Jedoch anstatt v, d, t nehmen wir jetzt v_n, d_n, t_n). Es gilt*

$$(14,1) \qquad \lim_{n\to\infty} P_n^+ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\alpha/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

gleichmässig nach α und $\alpha_n \to \alpha$.

Beweis. Wir können uns den Prozess zu folgendermassen vorstellen. Wir haben einen Punkt im Koordinatenanfang in der Zeit $t < t_0$. Im Moment $t = t_0$ springt dieser Punkt nach rechts (über die Entfernung Kd_n) mit der Wahrscheinlichkeit $\delta/2K$ oder er springt nach links mit derselben Wahrscheinlichkeit, oder er bleibt mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \delta/K$ unbeweglich. Im Moment $t = t_1$ müssen wir dasselbe wiederholen und so weiter. Wir können die Folgen t_n, d_n, v_n so verbessern, sodass $t_n/d_n = n$ gilt. Bezeichnen wir $m_1^{(n)}$ die Anzahl der Fälle (in allem Versuchen) in denen der Punkt nach links springt. Bezeichnen wir $m_2^{(n)}$ die Anzahl der Fälle in denen das Punkt auf der Stelle bleibt und $m_3^{(n)}$ die Anzahl der Fälle für die der Punkt nach rechts springt. Der Punkt wird am Schluss der ganzen Serie die Grenzen überschritten haben wenn und nur wenn $m_3^{(n)} - m_1^{(n)} \geqq s_n$ gilt, wo $s_n = v_n/Kd_n$. Jetzt nehmen wir die Formel $x_i = (m_i^{(n)} - np_i)/\sqrt{(np_i q_i)}$ an (s. Betrachtungen vor Hilfsatz 13). Wir bekommen

$$(14,2) \quad x_3 - x_1 \geqq \frac{s_n}{\sqrt{(np(1-p))}} = \frac{\alpha_n}{K\sqrt{(p(1-p))}} = \beta_n\,, \quad \beta = \frac{\alpha}{K\sqrt{(p(1-p))}}\,.$$

Aus der Beziehung $m_1^{(n)} + m_2^{(n)} + m_3^{(n)} = n$ erhalten wir die Gleichung der Ebene

$$(14,3) \qquad x_1\sqrt{(1-p)} + x_2\sqrt{(2-4p)} + x_3\sqrt{(1-p)} = 0\,.$$

Weil $P_n^+ = P^{(n)}(G_n)$ gilt (wo G_n das Gebiet $x_3 \geqq x_1 + \beta_n$ ist, das in der Ebene (14,3) ist – s. (14.2)), haben wir nach Hilfsatz 13.

$$(14,4)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n^+ = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}(G_n) = \frac{1-p}{2\pi\sqrt{(2-3p)}} \int_{x_3 \geqq x_1 + \beta} e^{-\frac{1}{2}[(1-p)x_1^2 + 2px_2^2 + (1-p)x_3^2]}\, dv\,,$$

wo $\mathrm{d}v$ das Lebesquesche Mass in der Ebene (14,3) bezeichnet und wir integrieren durch das Gebiet $x_3 \geqq x_1 + \beta$, das in der Ebene (14,3) ist. Ich werde nur die Ausrechnung des Integrals (14,4) andeuten. Wir nehmen zuerst die Funktion $\vartheta(x) \geqq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Wir setzen

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-\frac{1}{2}[(1-p)x_1^2 + p(x_1+x_3)^2(1-p)/(1-2p) + (1-p)x_3^2]}\,\vartheta(x_2)\,.$$

Das Gebiet $x_3 \geqq x_1 + \beta$, das im ganzen Raum x_1, x_2, x_3 ist, bezeichnen wir H. Das Gebiet $x_3 \geqq x_1 + \beta$, das in der Ebene (14,3) ist, bezeichnen wir G. Es gilt

(14,5)

$$\iiint_H f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \sqrt{\left(\frac{1-2p}{2-3p}\right)} \int_G e^{-\frac{1}{2}[(1-p)x_1^2 + 2px_2^2 + (1-p)x_3^2]}\,\mathrm{d}v\,.$$

Mit Hilfe der Transformation $x_i = \xi_i/\sqrt{(1-p)}$, $i = 1, 3$, $x_2 = \xi_2/\sqrt{(2p)}$ erhalten wir

(14,6)
$$\iiint_H f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 =$$
$$= \frac{1}{(1-p)\sqrt{(2p)}} \iiint_{H'} f\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{(1-p)}}, \frac{\xi_2}{\sqrt{(2p)}}, \frac{\xi_3}{\sqrt{(1-p)}}\right) \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3$$

wo H' das Gebiet $\xi_3 \geqq \xi_1 + \beta\sqrt{(1-p)}$ im ganzen Raum $\xi_1 \ldots \xi_3$ ist. Weiter verwenden wir die Beziehung

(14,7)
$$\iiint_{H'} f\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{(1-p)}}, \frac{\xi_2}{\sqrt{(2p)}}, \frac{\xi_3}{\sqrt{(1-p)}}\right) \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3 =$$
$$= \sqrt{(2p(1-2p))} \int_{G'} e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)}\,\mathrm{d}v^*\,,$$

wo G' das durch die Ungleichung $\xi_3 \geqq \xi_1 + \beta\sqrt{(1-p)}$ ausgedrückte ist und das in der Ebene

(14,8)
$$\xi_1\sqrt{p} + \xi_2\sqrt{(1-2p)} + \xi_3\sqrt{p} = 0$$

ist und $\mathrm{d}v^*$ ist das Lebesguesche Mass in der Ebene (14,8). Durch Anwendung der Rotation erreichnen wir, dass die Ebene (14,8) in die Ebene $\xi_2 = 0$ transformiert wird un dass die Schnittgerade der Ebenen $\xi_3 = \xi_1 + \beta\sqrt{(1-p)}$ mit (14,8) in die Gerade $\xi_3' = \beta\sqrt{(1-p)}/\sqrt{2}$, $\xi_2 = 0$ übergeht. Es gilt also die Beziehung

(14,9)
$$\int_{G'} e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)}\,\mathrm{d}v^* = \sqrt{(2\pi)} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sqrt{(1-p)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Aus (14,4) bis (14,9) erhalten wir die bewiesen Gleichung (14,1).

Jetzt haben wir schon alles zu der Formulation und zu dem Beweis der ersten (zweiten) Satzes vorbereitet. Dieser Satz behandelt den Ausdruckes P_1 mit der einfachen Anfangsbedingungen $x(t_0, \omega) = 0$.

Satz 1. *Es seien δ, K die vorgegebenen Zahlen $0 < \delta < K$. Es seien d_n, t_n, v_n die vorgegebenen Folgen positiver Zahlen so, dass*

$$\text{(I,0)} \qquad \frac{t_n}{d_n} \to \infty\,, \quad \alpha_n = \frac{v_n}{\sqrt{(t_n d_n)}} \to \alpha\,, \quad 0 \leqq \alpha < \infty\,,$$

dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_1(\delta, K, v_n, d_n, t_n) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x\,,$$

wo P_1 in (4) bestimmt ist. Der Grenzwert konvergiert gleichmässig mit Rücksicht auf α und $\alpha_n \to \alpha$.

Beweis. Wählen wir zuerst die Zahlen $t_n^*, t_n^{**}, v_n^*, v_n^{**}$ so, dass gilt

$$\text{(I,1)} \qquad \frac{t_n^*}{d_n}, \frac{t_n^{**}}{d_n}, \frac{v_n^*}{Kd_n}, \frac{v_n^{**}}{Kd_n}$$

sind die ganzen Zahlen und

$$\text{(I,2)} \qquad \begin{gathered} t_n^* \leqq t_n < t_n^{**}\,, \quad v_n^{**} \leqq v_n < v_n^*\,, \quad |t_n - t_n^*| < d_n \\ |t_n - t_n^{**}| < d_n\,, \quad |v_n - v_n^*| < Kd_n\,, \quad |v_n - v_n^{**}| < Kd_n \end{gathered}$$

gilt. Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\text{(I,3)} \qquad \frac{t_n^*}{d_n} \to \infty\,, \quad \frac{t_n^{**}}{d_n} \to \infty\,, \quad \frac{t_n^*}{t_n} \to 1\,, \quad \frac{t_n^{**}}{t_n} \to 1\,.$$

Aus den Ungleichungen (I,3) folgt

$$\text{(I,4)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{v_n^{**} - 4Kd_n}{\sqrt{(t_n^{**} \mathrm{d}_n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{\sqrt{(t_n d_n)}} = \alpha$$

und ähnlich

$$\text{(I,5)} \qquad \lim \frac{v_n^*}{\sqrt{(t_n^* d_n)}} = \alpha\,.$$

Es sei $x^{(n)}$ ein beliebiger Prozess $x^{(n)} \in X_{t_0, d_n}$ (d.h., die Bedingungen (1) ... (3) sind mit den Konstanten d_n erfüllt.) Bezeichnen wir $\tilde{P}(n) = \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x^{(n)}(\tau) \geqq v_n)$. Es sei $x_{v_n}^{(n)}$ der im Punkt v_n beschränkte Prozess, welcher dem Prozess $x^{(n)}$ entspricht. Nach dem Hilfsatz 2. gilt

$$\text{(I,6)} \qquad \tilde{P}(n) \leqq P(x_{v_n}^{(n)}(t_n) \geqq v_n - Kd_n)\,.$$

Nach Hilfsatz 3. gilt

$$(\mathrm{I},7)\qquad P(x_{v_n}^{(n)}(t_n) \geqq v_n - Kd_n) \leqq P(x_{v_n}^{(n)}(t_n^{**}) \geqq v_n - Kd_n)\,.$$

Ähnlich, haben wir nach Hilfsatz 4.

$$(\mathrm{I},8)\qquad P(x_{v_n}^{(n)}(t_n^{**}) \geqq v_n - Kd_n) \leqq P(x_{v_n^{**}}^{(n)}(t_n^{**}) \geqq v_n^{**} - Kd_n)\,.$$

Weiter konstruiren wir mit Hilfe Hilfsatz 6. den Prozess x^* zu $x_{v_n^{**}}^{(n)}$. Nach Bemerkung 1. gilt

$$(\mathrm{I},9)\qquad P(x_{v_n^{**}}^{(n)}(t_n^{**}) \geqq v_n^{**} - Kd_n) = P(x^*(t_n^{**}) \geqq v_n^{**} - Kd_n)\,.$$

Den Prozess, der im Hilfsatz 10. definiert wird, bezeichnen wir z_n und den im Punkte $v_n^{**} - 3Kd_n$ beschränkte Prozess, welcher z_n entspricht, bezeichnen wir y_n^{**}.

Nach Hilfsatz 11. ist

$$(\mathrm{I},10)\qquad P(x^*(t_n^{**}) \geqq v_n^{**} - Kd_n) \leqq P(y_n^{**}(t_n^{**}) \geqq v_n^{**} - 4Kd_n)\,.$$

Mit Rücksicht auf Hilfsatz 12. gilt

$$(\mathrm{I},11)\qquad P(y_n^{**}(t_n^{**}) \geqq v_n^{**} - 4Kd_n) \leqq 2P(z_n^{**}(t_n^{**}) \geqq v_n^{**} - 4Kd_n)\,.$$

Mit Rücksicht auf (I,3), (I,4) folgt aus Hilfsatz 14.

$$(\mathrm{I},12)\qquad \lim_{n\to\infty} P(z_n(t_n^{**}) \geqq v_n^{**} - 4Kd_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{\alpha/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Nach den Ungleichungen (I,6) … (I,12) gilt

$$(\mathrm{I},13)\qquad \limsup_{n\to\infty} P_1(\delta, K, v_n, d_n, t_n) \leqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\alpha/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Wir müssen noch die umgekehrte Ungleichung beweisen. Es ist sicher, dass

$$(\mathrm{I},14)\qquad \sup_{x\in X_{t_0,d_n}} \tilde{P}(n) \geqq P(y_n(t_n) \geqq v_n)$$

gilt, wo y_n der im Punkte $v_n + Kd_n$ beschränkte Prozess ist, welcher dem Prozess z_n entspricht (s. Hilfsatz 11). Nach den Hilfsätze 3. und 4. erhalten wir wieder

$$(\mathrm{I},15)\qquad P(y_n(t_n) \geqq v_n) \geqq P(y_n^*(t_n^*) \geqq v_n^*)\,,$$

wo y_n^* der im Punkt $v_n^* + Kd_n$ beschränkte Prozess ist, welcher dem Prozess z_n entspricht. Durch Anwendung des Hilfsatzes 12. bekommen wir

$$(\mathrm{I},16)\qquad P(y_n^*(t_n^*) \geqq v_n^*) = 2P(z_n(t_n^*) \geqq v_n^*) - P(z_n(t_n^*) = v_n^*)\,.$$

Nach (I,1), (I,3) und (I,5) folgt aus Hilfsatzes 14.

$$\lim_{n\to\infty} P(z(t_n^*) \geqq v_n^*) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\alpha/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi \,. \tag{I,17}$$

Aus (I,13) ... (I,17) und weil $\lim_{n\to\infty} P(z(t_n^*) = v_n^*) = 0$ haben wir

$$\liminf_{n\to\infty} P_1(\delta, K, v_n, d_n, t_n) \geqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi \,. \tag{I,18}$$

Die Ungleichungen (I,13) und (I,18) beweisen die Behauptung des Satzes.

Wir bleiben noch beim Fall, dass die Prozesse x die Anfangsbedingung $x(t_0, \omega) = 0$ erfüllen, aber werden uns mit dem Ausdruck (s. (5)) beschäftigen. Das Problem werden wir etwas allgemeiner formulieren. Wir bezeichnen

$$P(-v_1, v_2) = P(\delta, K, -v_1, v_2, d, t) =$$
$$= \sup_{x\in X_{t_0,d}} \bar{P}(\sup_{t_0\leqq\tau\leqq t} x(\tau, \omega) \geqq v_2 \,;\, \inf_{t_0\leqq\tau\leqq t} x(\tau, \omega) \leqq -v_1) \,,$$

wo $x(t, \omega)$ die Anfangsbedingung $x(t_0, \omega) = 0$ erfüllen. $\bar{P}(A; B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt. Wir können die Definition des in den Punkten $-v_1, v_2$ beschränkten Prozesses, welcher dem vorgeschriebenen Prozess entspricht, einführen. Wir definieren die Funktion $t(\omega)$ so, dass $t(\omega)$ das Minimum solcher Werte t_k ist, für welche $x(t_k, \omega) \geqq v_2 - Kd$ oder $x(t_k, \omega) \leqq -v_1 + Kd$ ist. Wenn für feste ω kein solcher t_k existiert, setzen wir $t(\omega) = \infty$. Der neue Prozess x_{v_1,v_2} ist: $x_{v_1,v_2}(t, \omega) = x_{v_1,v_2}(t(\omega), \omega) = x(t(\omega), \omega)$ für $t \geqq t(\omega)$, $x_{v_1,v_2}(t, \omega) = x(t, \omega)$ für $t \leqq t(\omega)$. Wir können folgender Hilfsatz auf gleiche Weise, wie Hilfsatz 10. beweisen.

Hilfsatz 15. *Wir setzen* $0 \leqq \varphi(\lambda) \leqq 1$, $\varphi(\lambda) = 1$ *für* $\lambda \geqq v_2$ *und* $\lambda \leqq -v_1$ *voraus, wo* $v_1 = s_1 Kd$, $v_2 = s_2 Kd$ *(*s_1, s_2 *die natürlichen Zahlen sind).* $\varphi(\lambda)$ *ist konvex für* $\lambda \in \langle -v_1, v_2 \rangle$. *Es gilt*

$$E(\varphi(x(t_n, \omega))) \leqq E(\varphi^*(y(t_n, \omega))) \tag{15,1}$$

für jeden Prozess $x \in X_{t_0,d}^*$ *für beliebige natürliche Zahl* n, *wo* $\varphi^*(\lambda) = 1$ *für* $\lambda \leqq -v_1 + 2Kd$ *und für* $\lambda \geqq v_2 - 2Kd$. *In dem Intervall* $\langle -v_1 + 2Kd + \varepsilon, v_2 - 2Kd - \varepsilon \rangle$ $\varphi^*(\lambda) = \varphi(\lambda)$ *ist und in* $\langle -v_1 + 2Kd, -v_1 + 2Kd + \varepsilon \rangle$, $\langle v_2 - 2Kd - \varepsilon, v_2 - 2Kd \rangle$ *ist* $\varphi^*(\lambda)$ *linear und* y *ist der in den Punkten* $-v_1 + Kd$, $v_2 - Kd$ *beschränkte Prozess (s. Hilfsatz* 10.*).*

Auch der Beweis des Hilfsatzes 16. ist ähnlich wie der Beweis des Hilfsatzes 11.

Hilfsatz 16. *Es sei* $x \in X_{t_0,d}$, y *ist der in den Punkten* $v_2 - 2Kd$, $-v_1 + 2Kd$ *beschränkte Prozess, welcher dem Prozess* z *entspricht. (s. Hilfsatz* 10.*). Es gilt*

$$\bar{P}(\sup_{t_0\leqq\tau\leqq t_n} x(\tau, \omega) \geqq v_2 \,;\, \inf_{t_0\leqq\tau\leqq t_n} x(\tau, \omega) \leqq -v_1) \leqq \tag{16,1}$$
$$\leqq P(y(t_n) \geqq v_2 - 3Kd \,;\, y(t_n) \leqq -v_1 + 3Kd) \,.$$

Der Hilfsatz 17., der dem Hilfsatz 14. entspricht, wird in Wirklichkeit komplizierter sein. Wir werden weiter über den Prozess z (s. Hilfsatz 10.) sprechen. Bezeichnen wir

$$A_k = \{\omega : (k-1)\,v_1 + kv_2 < z(t_n, \omega) < kv_1 + (k+1)\,v_2\}\,.$$

Hilfsatz 17. *Wenn der Prozess z die Bedingung $z(t_0) = 0$ erfüllt und $y(t)$ ist der in den Punkten $-v_1 + Kd$, $v_2 - Kd$ beschränkte Prozess, welcher z entspricht, $v_1 = s_1Kd$, $v_2 = s_2Kd$, wo s_1, s_2 die natürliche Zahlen sind, dann gilt*

$$(17{,}1) \qquad P(y(t_n) = v_2\,;\ \ y(t_n) = -v_1) = 1 - \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l\, P(A_l)\,.$$

Bemerkung 2. *In Wirklichkeit ist immer nur eine endliche Anzahl der Mengen A_l nichtleer.*

Beweis. Bezeichnen wir A die Teilmenge A_0 der ω für welche $\max\limits_{l\leq n} z(t_l, \omega) \geqq v_2$ oder $\min\limits_{l\leq n} z(t_l, \omega) \leqq -v_1$ und

$$B = \{\omega : z(t_n) \geqq v_2 \quad \text{oder} \quad z(t_n) \leqq -v_1\}\,.$$

Selbverständlich gilt

$$(17{,}2) \qquad P(y(t_n) = v_2\,;\ \ y(t_n) = -v_1) = P(A) + P(B)\,.$$

Für $\omega \in A$ existiert jedoch das erste $k < n$, sodass $z(t_k, \omega) = -v_1$ oder $z(t_k, \omega) = v_2$ und $z(t_n, \omega) \in (-v_1, v_2)$. Die Menge ω für welche der erste Fall eintritt ($z(t, \omega)$ berührt zuerst den Punkt $-v_1$), bezeichnen wir $A^{(1)}$ und den anderen Fall $A^{(2)}$. Es gilt

$$(17{,}3) \qquad P(A) = P(A^{(1)}) + P(A^{(2)})\,.$$

Für $\omega \in A^{(2)}$ bestimmen wir die Abbildung: den Pfad, der Punkt ω entspricht, bezeichnen wir $z(t, \omega)$. Wir definieren folgenderweise den neuen Pfad: $\bar{z}(t_s, \omega) = z(t_s, \omega)$ für $s \leqq k$, $(z(t_k, \omega) = v_2)$, $\bar{z}(t_s, \omega) = 2v_2 - z(t_s, \omega)$ für $s > k$. Weil der Prozess z symetrisch ist, ist $\bar{z}(t, \omega)$ auch der Pfad dieses Prozess und die Menge $\{\bar{\omega}\}$ existiert sodass $\bar{z}(t_s, \omega) = z(t_s, \bar{\omega})$. Dadurch haben wir $A^{(2)}$ in A_1 transformiert und das Mass wird selbverständlich beibehalten. Wir können ähnlich $A^{(1)}$ in A_{-1} Abbilden. Es ist also

$$(17{,}4) \qquad P(A) \leqq P(A_{-1}) + P(A_1)\,.$$

Die Gleichheit muss wirklich nicht gelten. Wir können die Menge A_1 wieder auf $A_1^{(1)}$ und $A_1^{(2)}$ zerlegen. Wenn der Pfad das erstemal den Punkt $-v_1$ durchgeht, geben wir ω in $A_1^{(1)}$ usw. Wir haben also wieder

$$(17{,}5) \qquad P(A_1) = P(A_1^{(1)}) + P(A_1^{(2)})\,, \quad P(A_{-1}) = P(A_{-1}^{(1)}) + P(A_{-1}^{(2)})\,.$$

Auf $A_1^{(2)}(A_{-1}^{(1)})$ können wir die inverse Abbildung definieren. Es ist also

$$P(A^{(2)}) = P(A_1^{(2)}), \quad P(A^{(1)}) = P(A_{-1}^{(1)}). \tag{17,6}$$

Wenn wir die Punkte aus $A_1^{(1)}$ ähnlich wie früher transformieren, aber symetrisch zum Punkt $-v_1$ ($A_{-1}^{(2)}$ symetrisch zum Punkt v_2) transformieren wir diese Punkten auf $A_{-2}^{(1)}$ ($A_{-1}^{(2)}$ transformieren wir auf $A_2^{(2)}$). Wir können so für alle k fortfahren. Wir haben also

$$P(A_k) = P(A_k^{(1)}) + P(A_k^{(2)}), \quad k \neq 0 \tag{17,7}$$

$$P(A_k^{(2)}) = P(A_{-k+1}^{(2)}), \quad P(A_k^{(1)}) = P(A_{-k-1}^{(1)}), \quad k \neq 0. \tag{17,8}$$

Aus (17,3) bis (17,8) folgt

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[P(A_k) + P(A_{-k})\right] = \sum_{l=-\infty, l\neq 0}^{\infty}(-1)^{l+1} P(A_l) \tag{17,9}$$

(17,1) leiten wir leicht mit Hilfe (17,2) und (17,9) ab. Der Hilfsatz 17. bestimmt uns den Ausdruck $P(\max_{k\leqq n} z(t_k) \geqq v_2; \min_{k\leqq n} z(t_k) \leqq -v_1)$ mit Hilfe der Ausdrücke $P(-v_1 < z(t_n) < v_2)$. Wir müssen auch den Hilfsatz 14. verbessern, wo anstatt einer Ungleichung wir zwei Ungleichungen nehmen müssen.

Hilfsatz 18. *Es seien die Folgen positiver Zahlen t_n, d_n, $v_1^{(n)}$, $v_2^{(n)}$ gegeben so, dass t_n/d_n, $v_i^{(n)}/Kd_n$ die ganzen Zahlen sind (wir bezeichnen wieder $t_n/d_n = n$, $v_i^{(n)}/Kd_n = s_i^{(n)}$) und so, dass $t_n/d_n \to \infty$, $v_i^{(n)}/\sqrt{(t_n d_n)} \to \alpha_i$, $0 \leqq \alpha_i < \infty$, $i = 1, 2$. Bezeichnen wir $P_n^0 = P(-v_1^{(n)} < z(t_n) < v_2^{(n)})$, wo z_n der bekannte Prozess ist. Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P_n^0 = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}}^{\alpha_2/\sqrt{(\delta K)}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \tag{18,1}$$

gleichmässig mit Rücksicht auf α_1, α_2 und $v_i^{(n)}/\sqrt{(t_n d_n)} \to \alpha_i$.

Dieser Hilfsatz bekommen wir einfach aus Hilfsatz 14. Wir können ihn analog dem Satz 1. beweisen.

Satz 2. *Es seien δ, K die vorgeschriebene Zahlen $0 < \delta < K$. Es seien d_n, t_n, $v_i^{(n)}$ die vorgeschriebenen Folgen positiver Zahlen so, dass $t_n/d_n \to \infty$, $\alpha_i^{(n)} = v_i^{(n)}/\sqrt{(t_n d_n)} \to \alpha_i$, $0 \leqq \alpha_i < \infty$, $i = 1, 2$, dann*

$$\lim_{n\to\infty} P(-v_1^{(n)}, v_2^{(n)}) = 1 - \sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{[(l-1)\alpha_1 + l\alpha_2]/\sqrt{(\delta K)}}^{[l\alpha_1 + (l+1)\alpha_2]/\sqrt{(\delta K)}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,\mathrm{d}\xi, \tag{II,1}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_2(\delta, K, v_1^{(n)}, d_n, t_n) = 1 - \sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{[(2l-1)\alpha_1]/\sqrt{(\delta K)}}^{[(2l+1)\alpha_1]/\sqrt{(\delta K)}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,\mathrm{d}\xi. \tag{II,2}$$

Die beiden Grenzwerte konvergieren gleichmässig mit Rücksicht auf α_1, α_2 und $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$.

Bemerkung 3. *Mit Hilfe des Satzes 2. können wir die Abschätzungen*

$$\lim_{n\to\infty} P_2 \leqq \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\left(\int_{\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi + \int_{\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}}^{3\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi\right)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} P_2 \geqq \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\left(\int_{\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi + \int_{\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}}^{3\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi - \int_{3\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}}^{5\alpha_1/\sqrt{(\delta K)}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi\right)$$

ableiten usw.

Ein folgender Satz wird die Ausdrücke P_1, P_2 angehen, wenn die Anfangsbedingung die Zufallsgrösse ist. Setzen wir voraus, dass wir die Folge der Distributionen $F_n(\lambda)$ haben, die die Bedingung $F_n(\nu_n - 0) = 1$ erfüllten. Bezeichnen wir $P_1(F_n) = \sup_x \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x(\tau) \geqq \nu_n)$, wo $x \in X_{t_0, d_n}$ und der Prozess $x(t)$ erfüllt die Anfangsbedingung $P(x(t_0, \omega) \leqq \lambda) = F_n(\lambda)$. Wir werden ähnlich für die Folge der Distributionen definieren $P_2(F_n) = \sup_x \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} |x(\tau)| \geqq \nu_n)$, wo $x \in X_{t_0, d_n}$, $P(x(t_0) \leqq \lambda) = F_n(\lambda)$, $F_n(-\nu_n) = 0$, $F_n(\nu_n - 0) = 1$.

Satz 3. *Es sei die Folge der Disributionen $F_n(\lambda)$, $n = 0, 1, \ldots$ gegeben, es seien die Bedingungen aus Satz 1. oder 2. erfüllen. Es sei die Menge M dicht auf $(-\infty, \infty)$, $F_n(\nu_n - 0) = 1$ so, dass für jede $\lambda \in M$, $\lim_{n\to\infty} F_n(\lambda\nu_n) = F_0(\lambda)$ gilt, dann*

$$\lim_{n\to\infty} P_1(F_n) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{[\alpha/\sqrt{(\delta K)}](1-\lambda)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi\,dF_0(\lambda)\,.$$

Wenn $F_n(\lambda)$ anstatt der höher angeführten Bedingungen $F_n(-\nu_n) = 0$, $F_0(-1) = 0$ erfüllt, dann

$$\lim_{n\to\infty} P_2(F_n) = 1 - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{[\alpha(2l-1-\lambda)]/\sqrt{(\delta K)}}^{[\alpha(2l+1-\lambda)]/\sqrt{(\delta K)}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi\,dF_0(\lambda)\,.$$

Der Beweis dieses Satzes können wir leicht durchführen, weil die Ausdrücke in den Sätzen 1, 2. gleichmässig konvergieren und durch Anwendung der Sätze von Helly.

Die vorhergehenden Ergebnisse werden wir auf die Differentialgleichung $\dot{x} = R(t, x, \omega)$ anwenden, wo $R(t, x, \omega)$ der Zufallsprozess ist, der im bestimmten Raum $\Omega(\Omega, \mathscr{F}, P)$ definiert wird. Wenn die Funktion $R(t, x, \omega)$ für feste ω in t, x die Bedingungen von Carathéodory erfüllt, dann hat die Differentialgleichung die Lösung $x(t, \omega)$ mit vorgeschriebener Anfangsbedingung, die der zufällige Prozess ist. Wir werden jetzt die verschiedenen Bedingungen über $R(t, x, \omega)$ voraussetzen.

1) $R(t, x, \omega)$ ist konstant in den Intervallen $\langle t_k, t_{k+1})$. Wir bezeichnen den Wert $R(t, x, \omega)$ für $t \in \langle t_k, t_{k+1})$ als $R_k(\omega)$. Wenn die Zufallsgrössen $R_k(\omega)$ miteinander unabhängig sind und $E(R_k(\omega)) = 0$, $E(|R_k(\omega)|) \leqq \delta$, $|R_k(\omega)| \leqq K$ ist, dann fällt die

Lösung $x(t, \omega)$, $x(t_0, \omega) = 0$ in $X_{t_0,d}$ und wir können Satz 1. anwenden. Wenn auch $x(t_0, \omega)$ eine Zufallsgrösse ist, müssen wir noch voraussetzen, dass die Zufallsgrössen $x(t_0, \omega), R_1(\omega), \ldots, R_n(\omega)$ unabhängig sind und dass $P(x(t_0, \omega) < v) = 1$ oder $P(-v_1 < x(t_0, \omega) < v_2) = 1$ ist (s. Satz 2.).

2) $R(t, x, \omega)$ hängt in den Intervallen $\langle t_k, t_{k+1})$ nur von t und ω ab. Wir werden nur $R(t, \omega)$ schreiben. Wir müssen jetzt etwas stärkere Bedingung über die Unabhängigkeit annehmen. Es sei $t_k = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m = t_{k+1}$. Wir bezeichnen $\mathscr{F}^{(k)}$ die kleinste σ-Algebra, die durch die Zufällsgrössen $R(\tau_1, \omega), \ldots, R(\tau_m, \omega)$ bestimmt ist. Wir müssen voraussetzen, dass $\mathscr{F}^{(0)}, \ldots, \mathscr{F}^{(n)}$ miteinander unabhängig sind d.h. $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$, wenn $A_i \in \mathscr{F}^{(i)}$. Ähnlich wie früher müssen wir voraussetzen $E(R(t, \omega)) = 0$, $E(|R(t, \omega)|) \leqq \delta$, $|R(t, \omega)| \leqq K$ (s. Satz 1.). Wenn $x(t_0, \omega)$ auch eine Zufallsgrösse ist, müssen wir noch voraussetzen, dass $\mathscr{F}^{(-1)}, \mathscr{F}^{(0)}, \ldots, \mathscr{F}^{(n)}$ miteinander unabhängig sind, wo $\mathscr{F}^{(-1)} = \{x(t_0, \omega)\}$ und dass $P(x(t_0, \omega) < v) = 1$ oder $P(-v_1 < x(t_0, \omega) < v_2) = 1$ ist.

3) Der allgemeine Fall, d.h. $R(t, x, \omega)$ kann von allen t, x, ω abhängen. In diesem Fall werden wir $|R(t, x, \omega) - R(t, y, \omega)| \leqq C|x - y|$ voraussetzen, wo C eine Konstante ist, die von n (s. Satz 1.) abhängen kann. Es sei weiter $\Phi^{(n)} = \{R(\tau_1, x_1, \omega), \ldots, \ldots, R(\tau_m, x_m, \omega)\}$, $t_0 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m < t_n$. Wir müssen die Bedingung (1) und $|R(t, x, \omega)| \leqq K$ annehmen und weiter $E(|R(t, x, \omega)| \,\|\, \Phi^{(n)}) \leqq \delta$ für alle $t_n < t < t_{n+1}$ und für beliebige x. Es ist möglich zu beweisen, dass $E(|x(t_{n+1}) - x(t_n)| \,\|\, x(t_n), \ldots, x(t_1)) \leqq \delta d(1 + \frac{1}{2}C(K/\delta)\, d)$, wo $x(t)$ die Lösung der Gleichung $\dot{x} = R(t, x, \omega)$, $x(t_0, \omega) = 0$ ist. Wenn $\lim_{n \to \infty} d_n C_n = 0$ (s. Satz 1.) ist, erhalten wir die zweite Bedingung. Wenn $x(t_0, \omega)$ von ω abhängt, müssen wir die $\overline{\Phi}^{(n)} = \{x(t_0, \omega), R(\tau_1, x_1, \omega), \ldots, R(\tau_m, x_m, \omega)\}$ betrachten. D.h. wir müssen $E(|R(t, x, \omega)| \,\|\, \overline{\Phi}^{(n)}) \leqq \delta$ für alle $t \in (t_n, t_{n+1})$ und alle x voraussetzen und noch $P(x(t_0) < v) = 1$ oder $P(-v_1 < x(t_0) < v_2) = 1$ annehmen.

In diesem dritten Fall ist es möglich andere Bedingungen zu fordern. Anstatt der Bedingung (1), $|R(t, x, \omega) - R(t, y, \omega)| \leqq C|x - y|$ und $|R(t, x, \omega)| \leqq K$ werden wir noch voraussetzen: $R(\tau, y(\omega), \omega)$ ist unabhängig von $\Phi^{(n)}$ (oder $\overline{\Phi}^{(n)}$) für $\tau \in (t_n, t_{n+1})$, wo $y \in \Phi^{(n)}(\overline{\Phi}^{(n)})$ und $E(|R(t, y(\omega), \omega)|) \leqq \delta$ für beliebige $y(\omega) \in \Phi^{(n)}$ (oder $\overline{\Phi}^{(n)}$).

Wir kehren jetzt zu dem Fall 2) (d.h. R hängt nicht von x ab) zurück. In diesem Fall können wir über $P_3(\delta, K, v_n, d_n, t_n) = \sup_{x_n} P(x_n(t_n) \geqq v_n)$ und $P_4(\delta, K, v_n, d_n, t_n) = \sup_{x_n} P(|x_n(t_n)| \geqq v_n)$, sprechen, wo x_n der Prozess $x_n(t, \omega) = \int_{t_0}^{t} R(\tau, \omega)\, d\tau$ ist und $R(t, \omega)$ die Bedingungen aus Punkt 2) erfüllt. Es ist nämlich klar, dass in allgemeinen Fall 3) $P_3 = P_1$, $P_4 = P_2$ gilt. Wir werden noch voraussetzen, dass $R(t, \omega)$ ein symetrischer Prozess ist.

Satz 4.

a) *Wir werden voraussetzen, dass die Bedingungen des Satzes* 1. *erfüllt sind und dass die höher angeführte Beschränkung gilt, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P_3(\delta, K, v_n, d_n, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\alpha/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi\,.$$

b) *Wir werden voraussetzen, dass die Bedingungen des Satzes* 2. *erfüllt sind und dass die höher angeführte Beschränkung von R gilt, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P_4(\delta, K, v_n, d_n, t_n) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha/\sqrt{(\delta K)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi\,.$$

Wir könnten auch den Satz, der dem Satz 3. entspricht formulieren.

Beispiel. Als ω bezeichnen wir die Folge der n Zahlen. Diese Zahlen können Eins oder Null sein. Der Raum Ω ist die Menge aller ω, ω_k ist das k-te Glied der Folge ω. Als Wahrscheinlichkeitmass nehmen wir $P(\omega) = (\delta/2\lambda)^s (1 - \delta/2\lambda)^{n-s}$, wo s die Anzahl der Komponenten $\omega_k = 0$ und λ eine gewisse Zahl $\lambda > \delta/2$ bedeutet. Den Prozess $x_\lambda(t, \omega)$ werden wir auf Gebiet $\langle 0, T\rangle \times (-\infty, \infty)$ definieren. $x_\lambda(t, \omega) - x_\lambda(t_k, \omega) = -\lambda(t - t_k)$ für $t_k \leqq t < t_{k+1}$ und für alle ω, für die $\omega_k = 0$, $x_\lambda(t, \omega) - x_\lambda(t_k, \omega) = \lambda\delta(t - t_k)/(2\lambda - \delta)$ für $t_k \leqq t < t_{k+1}$ und für alle ω, für die $\omega_k = 1$.

Der Process x_λ erfüllt die Voraussetzungen (1), (2) und dabei $P(x_\lambda(t, \omega) = t\lambda\delta/(2\lambda - \delta)) = (1 - \delta/2\lambda)^{k+1}$, wo $t_k \leqq t < t_{k+1}$ ist. Daraus folgt für $\lambda \to \infty$, dass der Prozess x_λ sich dem Unzufälligkeitsprozess $x(t) = (\delta/2)\, t$ nähert. In diesem Fall ist der Einfluss der Störungen in der Richtung der positiven Achse x grösser als in der umgekehrten Richtung. In diesem Beispiel ist das wichtigste, dass $x_\lambda(t_{k+1}, \omega) - x_\lambda(t_k, \omega)$ nicht beschränkt ist.

Literatur

[1] *Dinges H.:* Ein verallgemeinertes Spiegelungsprinzip für den Prozess der Brownischen Bewegung. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 1962, B. *1*, H 2, 177–195.

[2] *Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н.:* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 1957, Т. *21*, в. 6, 769–774.

[3] *Кац И. Я., Красовский Н. Н.:* Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, Т. *24*, в. 5, 809–823.

[4] *Красовский Н. Н., Лидский Е. А.:* Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющево воздействия. ПММ, 1961, Т. *25*, в. 3, 420–432.

[5] *Иржина М.:* Условные вероятности на σ-алгебрах со счётным базисом. Чех. мат. ж. 1954, *79*, в. 4, 372–380.

[6] *Гнеденко Б. В.:* Курс теории вероятности. Москва, 1950.

Výtah

O JISTÉ TŘÍDĚ NÁHODNÝCH PROCESŮ S POHLCUJÍCÍMI BARIÉRAMI

IVO VRKOČ, Praha

V článku jsou nalezeny limitní výrazy pro $n \to \infty$

$$\sup_{x_n} \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x_n(\tau, \omega) \geqq v_n), \quad \sup_{x_n} \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} |x_n(\tau, \omega)| \geqq v_n),$$

kde $\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x_n(\tau, \omega) \geqq v_n)$, $\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} |x_n(\tau, \omega)| \geqq v_n$ (viz str. 402) znamená pravděpodobnost, že proces x_n nebo $|x_n|$ překročí aspoň jednou hranici v_n v intervalu $\langle t_0, t_n \rangle$, přičemž x_n probíhá třídu náhodných procesů X_{t_0, d_n}, která jest určena vztahy (1) ... (3), (kde $d = d_n$). Limitní vzorce jsou určeny jak za předpokladu, že $x(t_0) = 0$ – viz věta 1, tak za předpokladu, že $x(t_0)$ je náhodná veličina – viz věta 2. V závěru práce jsou tyto výsledky aplikovány na diferenciální rovnici $\dot{x} = R(t, x, \omega)$, kde $R(t, x, \omega)$ jest náhodný proces, který má význam poruch. Jsou uvedeny podmínky na $R(t, x, \omega)$, při kterých jest možno použít věty 1–4.

Резюме

ОБ ОПРЕДЕЛЕННОМ КЛАССЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОГЛОЩАЮЩИМИ СТЕНКАМИ

ИВО ВРКОЧ, Прага

В работе находятся предельные выражения для

$$\sup_{x_n} \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x_n(\tau, \omega) \geqq v_n), \quad \sup_{x_n} \bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} |x_n(\tau, \omega)| \geqq v_n),$$

где $\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} x_n(\tau, \omega) \geqq v_n)$, $\bar{P}(\sup_{t_0 \leqq \tau \leqq t_n} |x_n(\tau, \omega)| \geqq v_n)$ (см. стр. 402) значат вероятности, с которыми процесс x_n или $|x_n|$ переходит по крайной мере один раз границу v_n в интервале $\langle t_0, t_n \rangle$, и x_n пробегает группу случайных процессов X_{t_0, d_n}, которая определена выражениями (1) ... (3) (где $d = d_n$). Предельные формулы определяются как при предположении, что $x(t_0) = 0$ – см. Теорема 1, так при предположении, что $x(t_0)$ – случайная величина – см. Теорема 2. В самом конце работы используются эти результаты для дифференциального уравнения $\dot{x} = R(t, x, \omega)$, причем $R(t, x, \omega)$ – случайный процесс, которой выражает возмущения. Приведены условия, при которых можно здесь использовать теоремы 1–4.