Jan Mařík
O reálných polynomech 4. stupně

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 1, 33–42

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117537`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

O REÁLNÝCH POLYNOMECH 4. STUPNĚ

JAN MAŘÍK, Praha

(Došlo dne 9. 9. 1963)

Hlavním výsledkem práce je věta 2, která udává nutnou a postačující podmínku, aby daný reálný polynom 4. stupně byl nezáporný.

Cílem této práce je určit „typ" daného reálného polynomu 4. stupně; to znamená zjistit, kolik má tento polynom reálných a imaginárních kořenů a jaké jsou jejich násobnosti. Pro zjištění těchto údajů jsou známy různé metody; např. ve Schwarzově knize „Základy náuky o riešení rovníc" (str. 127) je vyšetřen reálný polynom 4. stupně s vesměs jednoduchými kořeny a s nulovým koeficientem u 3. mocniny proměnné. Příslušné podmínky jsou velmi jednoduché. Provedeme-li však v „obecném" polynomu 4. stupně takovou lineární transformaci, aby se koeficient u 3. mocniny anuloval, dostaneme pomocí těchto podmínek vzorce již poněkud nepřehledné. Vzorce, které nyní odvodíme, jsou jednodušší a snad přehlednější, protože každá z dále uvedených podmínek pro polynom $f(x)$ je totožná s příslušnou podmínkou pro polynom $x^4 f(x^{-1})$. To je jistě přirozené, protože tyto polynomy jsou zřejmě téhož „typu", pokud $f(0) \neq 0$.

Pro jednoduchost vyjadřování a označení zavedeme tuto úmluvu: Buď f reálný polynom. Řekneme, že polynom f je kladný (značka $f > 0$), když pro každé reálné x je $f(x) > 0$. Význam slov „polynom f je nezáporný" a symbolu $f \geqq 0$ je jistě zřejmý.

Je známo (a snadno se zjistí), že diskriminant reálného polynomu 4. stupně je záporný právě tehdy, když tento polynom má 2 kořeny reálné a 2 kořeny imaginární. Podrobnějším rozborem čtenář snadno dokáže následující větu o „klasifikaci":

Věta 1. *Buď f reálný polynom 4. stupně s nejvyšším koeficientem kladným a buď D jeho diskriminant. Potom platí:*

1) *Je-li $D > 0$ a $f \geqq 0$, má f čtyři imaginární kořeny.*

2) *Je-li $D = 0$ a $f \geqq 0$, pak buďto je f dvojmoc kvadratického polynomu nebo má f jeden dvojnásobný reálný kořen a dva kořeny imaginární.*

3) *Je-li $D \geqq 0$ a není-li $f \geqq 0$, má f jen reálné kořeny; je-li $D > 0$, jsou čtyři jednoduché, je-li $D = 0$, je buď jeden dvojnásobný a dva jednoduché nebo jeden trojnásobný a jeden jednoduchý.*

4) *Je-li $D < 0$, má f dva kořeny reálné a dva imaginární.*

Abychom tedy určili „typ“ polynomu f, můžeme postupovat takto: a) Určíme sgn D. b) Je-li $D \geqq 0$, zjistíme, zda $f \geqq 0$. c) Je-li $D = 0$ a není-li $f \geqq 0$, zjistíme, zda f má trojnásobný kořen. d) Je-li $D = 0$ a $f \geqq 0$, zjistíme, zda f je dvojmocí kvadratického polynomu g, a v takovém případě najdeme „typ“ g.

O tom, jak poznáme, zda $f \geqq 0$, zda f má trojnásobný kořen, zda f je dvojmocí kvadratického polynomu a jaké kořeny má tento polynom, nás poučují věty 2, 3 a 4. Ve větách 2 a 4 předpokládáme, že nula není vícenásobným kořenem polynomu f; to zřejmě není žádné podstatné omezení.

K důkazu věty 2 budeme potřebovat několik pomocných vět.

Lemma 1. *Nechť polynom*

(1) $$f(x) = x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + 1 \quad (A, B, C \text{ reálná čísla})$$

má jen reálné kořeny a nechť $|A| \neq |C|$. *Položme*

(2) $$p(x) = x^4 - \tau x^3 + Bx^2 - \tau x \operatorname{sgn} AC + 1\,, \quad \text{kde} \quad \tau = |AC|^{\frac{1}{2}}\,.$$

Potom polynom p není nezáporný.

Důkaz. Protože polynomy $g(x) = x^4 f(1/x)$, $g(-x)$ mají také jen reálné kořeny a je jim popsaným způsobem přiřazen týž polynom (2), můžeme předpokládat, že $A > |C|$. Je-li $C \leqq 0$, je

(3a) $$p(x) = x^4 - \tau x^3 + Bx^2 + \tau x + 1\,.$$

Polynom f má v tomto případě aspoň jeden záporný kořen α a je $p(\alpha) = p(\alpha) - f(\alpha) = (A - \tau)\,\alpha^3 + (\tau + C)\,\alpha \leqq (A - \tau)\,\alpha^3 < 0$.

Buď tedy $C > 0$. Potom

(3b) $$p(x) = x^4 - \tau x^3 + Bx^2 - \tau x + 1\,.$$

Buďte α_j kořeny polynomu f; označení volme tak, aby platilo $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \alpha_4$. Kdyby bylo $\alpha_1 = 1$, bylo by též $\alpha_4 = 1$ a měli bychom $A = C\,(=4)$ proti předpokladu; je tedy $\alpha_1 < 1$. Je-li $\alpha_1 > 0$, je $C = \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \geqq \alpha_1^2(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) = \alpha_1^2 A > \alpha_1^4 A$, $C^{\frac{1}{2}} > \alpha_1^2 A$, $p(\alpha_1) = p(\alpha_1) - f(\alpha_1) = (A - \tau)\,\alpha_1^3 - (\tau - C)\,\alpha_1 = \alpha_1(A^{\frac{1}{2}} - C^{\frac{1}{2}})\,(\alpha_1^2 A^{\frac{1}{2}} - C^{\frac{1}{2}}) < 0$.

Buď nyní $\alpha_1 < 0$. Zřejmě $\alpha_2 < 0 < \alpha_3$. Položme $\gamma = ((\tau - C)/(A - \tau))^{\frac{1}{2}}$, $r(x) = -(A - \tau)\,x(x^2 - \gamma^2)$. Je-li $x < -\gamma$ nebo $0 < x < \gamma$, je $r(x) > 0$; dále je $f = p + r$. Předpokládejme, že je $p \geqq 0$. Potom $-\gamma \leqq \alpha_1$, $\gamma \leqq \alpha_3$, tedy $\alpha_2^{-1} \leqq \alpha_1^{-1} \leqq -\gamma^{-1}$, $\alpha_4^{-1} \leqq \alpha_3^{-1} \leqq \gamma^{-1}$, $C = \sum \alpha_j^{-1} \leqq 0$; tím jsme došli ke sporu. Vidíme, že v žádném případě není $p \geqq 0$.

Lemma 2. *Buďte f, p polynomy* (1), (2) *a buď* $|A| = |C|$. *Potom je buďto $p(x) = f(x)$ nebo $p(x) = f(-x)$.*

Důkaz. Je-li $A > 0$, je $\tau = A = |C|$, $\operatorname{sgn} AC = \operatorname{sgn} C$ a tedy $\tau \operatorname{sgn} AC = |C| \operatorname{sgn} C = C$, $p = f$. Je-li $A \leqq 0$, je $\tau = -A$, $\operatorname{sgn} AC = -\operatorname{sgn} C$ a tedy $\tau \operatorname{sgn} AC = -C$, $p(x) = f(-x)$.

Lemma 3. *Buďte f, p polynomy* (1), (2); *nechť p má reálný kořen. Potom má též f reálný kořen.*

Důkaz. Stačí vyšetřit případ, kdy $A \geqq |C|$. Buď napřed $C \leqq 0$. Potom má p tvar (3a). Je-li $p(\alpha) = 0$, je též $p(-1/\alpha) = 0$; polynom p má tedy kladný kořen β a je $f(\beta) = f(\beta) - p(\beta) = -(A - \tau)\beta^3 - (\tau + C)\beta \leqq 0$.

Buď nyní $C > 0$. Potom platí (3b). Předpokládejme, že p nemá kladný kořen; odvodíme spor. Protože p nemůže mít samé záporné kořeny, má dva záporné kořeny α_1, α_2 a dva imaginární kořeny α_3, α_4. Snadno se zjistí, že $\alpha_1\alpha_2 = 1 = \alpha_3\alpha_4 = |\alpha_3^2|$, $\alpha_1 + \alpha_2 \leqq -2$, $\alpha_3 + \alpha_4 < 2$. Odtud plyne, že $\tau = \sum \alpha_j < 0$, což je spor; p má tedy kladný kořen α a zřejmě také $1/\alpha$. Vidíme, že p má kořen $\beta \geqq 1$; protože $\beta^2(A - \tau) \geqq A - \tau = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}} - C^{\frac{1}{2}}) \geqq C^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}} - C^{\frac{1}{2}}) = \tau - C$, je $f(\beta) = f(\beta) - p(\beta) = (\tau - C)\beta - (A - \tau)\beta^3 = \beta((\tau - C) - (A - \tau)\beta^2) \leqq 0$.

Lemma 4. *Buď D diskriminant polynomu* (1). *Potom je polynom* (1) *nezáporný právě tehdy, když je $D \geqq 0$ a když je polynom* (2) *nezáporný.*

Důkaz. Buď $f \geqq 0$; položme $f_n(x) = f(x) + x^2/n$. Způsobem, popsaným v lemmatu 1, je polynomu f_n přiřazen polynom $p_n(x) = p(x) + x^2/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Protože $f_n > 0$, je podle lemmatu 3 též $p_n > 0$ a tedy $p \geqq 0$. Zřejmě je $D \geqq 0$.

Buď nyní $p \geqq 0$ a $D \geqq 0$. Je-li $|A| = |C|$, je podle lemmatu 2 též $f \geqq 0$. Je-li $|A| \neq |C|$, má f podle lemmatu 1 imaginární kořen a podle tvrzení 3) z věty 1 je $f \geqq 0$.

Lemma 5. Definujme funkci φ předpisem $\varphi(t) = -t - 1$ pro $t \leqq 0$, $\varphi(t) = -1 + (8t)^{\frac{1}{2}}$ pro $0 < t < 2$, $\varphi(t) = t + 1$ pro $t \geqq 2$. Buďte α, β, γ reálná čísla, $|\alpha| = |\gamma|$; položme $g(x) = x^4 + 4\alpha x^3 + 6\beta x^2 + 4\gamma x + 1$. Potom je $g \geqq 0$ právě tehdy, když $3\beta \geqq \varphi(2\alpha\gamma)$.

Důkaz. Buď napřed $\alpha\gamma \leqq 0$; položme $h(y) = y^2 + 4\alpha y + 6\beta + 2$. Potom je $g(x) = x^2 \,.\, h(x - x^{-1})$; vztah $g \geqq 0$ platí právě tehdy, když diskriminant polynomu h je nekladný, což je zřejmě ekvivalentní se vztahem $3\beta \geqq \varphi(2\alpha\gamma)$.

Buď dále $\alpha\gamma > 0$; položme $k(y) = y^2 + 4\alpha y + 6\beta - 2$. Potom je $g(x) = x^2 \,.\, k(x + x^{-1})$; vztah $g \geqq 0$ platí právě tehdy, když k nemá žádný jednoduchý reálný kořen o prosté hodnotě > 2, když je tedy buďto

$$4\alpha^2 - 6\beta + 2 \leqq 0 \tag{4}$$

nebo

$$4\alpha^2 - 6\beta + 2 > 0\,, \quad |2\alpha| + (4\alpha^2 - 6\beta + 2)^{\frac{1}{2}} \leqq 2\,. \tag{5}$$

Je-li $|\alpha| < 1$, je $\varphi(2\alpha\gamma) = -1 + 4|\alpha|$; je-li $|\alpha| \geqq 1$, je $\varphi(2\alpha\gamma) = 1 + 2\alpha^2$. Platí-li (4), je $3\beta \geqq 1 + 2\alpha^2 = -1 + 4|\alpha| + 2(1 - |\alpha|)^2 \geqq -1 + 4|\alpha|$ a tedy $3\beta \geqq \varphi(2\alpha\gamma)$.

Platí-li (5), je $|\alpha| < 1$ a $4\alpha^2 - 6\beta + 2 \leqq 4(1 - |\alpha|)^2$, takže $3\beta \geqq -1 + 4|\alpha| = \varphi(2\alpha\gamma)$.

Buď naopak $3\beta \geqq \varphi(2\alpha\gamma)$. Je-li $|\alpha| \geqq 1$, platí zřejmě (4); je-li $|\alpha| < 1$ a neplatí-li (4), zjistíme snadno, že platí (5).

Lemma 6. *Buďte a, b, c reálná čísla a buď D diskriminant polynomu*

$$f(x) = x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + 1 . \tag{6}$$

Buď φ funkce z lemmatu 5. Potom je $f \geqq 0$ právě tehdy, když je $D \geqq 0$ a $3b \geqq \varphi(2ac)$.

Důkaz. Položme $\alpha = -|ac|^{\frac{1}{4}}$, $\beta = b$, $\gamma = \alpha \,.\, \operatorname{sgn} ac$, $g(x) = x^4 + 4\alpha x^3 + 6\beta x^2 + 4\gamma x + 1$. Podle lemmatu 4 je $f \geqq 0$ právě tehdy, když je $D \geqq 0$ a $g \geqq 0$; podle lemmatu 5 je $g \geqq 0$ právě tehdy, když $3b = 3\beta \geqq \varphi(2\alpha\gamma) = \varphi(2ac)$.

Poznámka. Je známo, že diskriminant D polynomu $x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4$ je dán rovností

$$\begin{aligned} 27D = {} & 4(12b_4 + b_2^2 - 3b_1b_3)^3 - \\ & - (27b_3^2 + 27b_1^2b_4 + 2b_2^3 - 72b_2b_4 - 9b_1b_2b_3)^2 . \end{aligned} \tag{7}$$

Každý reálný polynom 4. stupně lze zřejmě psát také ve tvaru

$$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \quad (a_0 \neq 0) . \tag{8}$$

Když v (7) položíme $b_j = \binom{4}{j} a_j a_0^{-1}$, dostaneme pro diskriminant D_f polynomu f vztah

$$a_0^6 \,.\, 2^{-8} \,.\, D_f = E^3 - 27F^2 , \tag{9}$$

kde

$$E = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3 , \quad F = a_0a_3^2 + a_1^2a_4 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3 . \tag{10}$$

Lemma 7. *Buď D diskriminant polynomu (6). Nechť $D \geqq 0$, $b \leqq 1$. Potom $16ac \leqq (3b + 1)^2$.*

Důkaz. Položme $v = -2ac$, $w = a^2 + c^2$. Zřejmě $w \geqq -v$. Protože $D \geqq 0$, je podle (9) a (10) $(1 + 3b^2 + 2v)^3 \geqq 27(w + bv + b^3 - b)^2$ a tedy

$$(\tfrac{1}{3}(2v + 1 + 3b^2))^{\frac{3}{2}} \geqq w + bv + b^3 - b \geqq (b - 1)\, v + b^3 - b . \tag{11}$$

Položme $v_0 = -\frac{1}{8}(3b + 1)^2$, $J = \langle -\frac{1}{2}(1 + 3b^2), \infty)$ a pro $t \in J$ definujme

$$\psi(t) = (\tfrac{1}{3}(2t + 1 + 3b^2))^{\frac{3}{2}} + t(1 - b) + b - b^3 .$$

Funkce ψ zřejmě roste. Dále je $4(1 + 3b^2 + 2v_0) = 4 + 12b^2 - 9b^2 - 6b - 1 =$

$= 3(1 - b)^2$, $8(v_0(1 - b) + b - b^3) = (9b^2 + 6b + 1)(b - 1) - 8(b^2 + b)\,.$
$.\,(b - 1) = (b - 1)^3$. Vidíme, že $8\psi(v_0) = (1 - b)^3 + (b - 1)^3 = 0$. Protože podle (11) je $\psi(v) \geqq 0$, je $-2ac = v \geqq v_0$ a tedy $16ac \leqq (3b + 1)^2$.

Lemma 8. *Buď D diskriminant polynomu* (6). *Potom je $f \geqq 0$ právě tehdy, když $D \geqq 0$ a když platí některá z následujících dvou podmínek* (12), (13):

(12) $$|2ac + 1| \leqq 3b\,;$$

(13) $$|3b| \leqq 2ac + 1\,, \quad ac < 1\,.$$

Důkaz. Položme $t = 2ac$. Buď napřed $f \geqq 0$. Potom je podle lemmatu 6 $D \geqq 0$ a $3b \geqq \varphi(t)$. Je-li $t \leqq -1$, je $3b \geqq -t - 1 \geqq 0$, takže platí (12). Je-li $t \geqq 2$, je $3b \geqq$ $\geqq t + 1 \geqq 0$, takže (12) opět platí. Nechť nyní $-1 < t < 2$ a nechť neplatí (12). Potom $-t - 1 \leqq \varphi(t) \leqq 3b < |t + 1| = t + 1$, takže $|3b| \leqq t + 1$. Platí tedy (13).

Buď dále $D \geqq 0$. Platí-li (12) nebo (13), je zřejmě $3b \geqq -1 - t$; je-li tedy $t \leqq 0$, je

(14) $$3b \geqq \varphi(t)\,.$$

Buď nyní $t > 0$. Potom je buďto $\varphi(t) = -1 + (8t)^{\frac{1}{2}}$ nebo $\varphi(t) = 1 + t$ a zřejmě $1 + t = -1 + (8t)^{\frac{1}{2}} + 2(1 - (\frac{1}{2}t)^{\frac{1}{2}})^2 \geqq -1 + (8t)^{\frac{1}{2}}$, takže $1 + t \geqq \varphi(t)$. Platí-li (12), dostáváme opět (14). Nechť tedy platí (13). Zřejmě $b \leqq 1$ a podle lemmatu 7 je

(15) $$(8t)^{\frac{1}{2}} \leqq |3b + 1|\,.$$

Protože $0 < t < 2 < 8$, je $t < (8t)^{\frac{1}{2}}$, $|3b| \leqq t + 1 < 1 + (8t)^{\frac{1}{2}}$, $-(3b + 1) < (8t)^{\frac{1}{2}}$ a tedy podle (15) $3b + 1 \geqq (8t)^{\frac{1}{2}}$, $3b \geqq -1 + (8t)^{\frac{1}{2}} = \varphi(t)$. Vidíme, že ve všech případech platí (14), a podle lemmatu 6 je $f \geqq 0$.

Poznámka. Má-li polynom (6) nezáporný diskriminant a je-li $ac = 1$, $|3b| \leqq$ $\leqq 2ac + 1$ $(= 3)$, je podle (15) $b = 1$ a platí (12); polynom (6) je tedy nezáporný. Vidíme, že podmínku (13) můžeme nahradit podmínkou

$$|3b| \leqq 2ac + 1\,, \quad ac \leqq 1\,.$$

Věta 2. *Nechť $a_0 > 0$, $|a_3| + |a_4| > 0$; buď D diskriminant polynomu* (8). *Položme*

(16) $$R = (a_0a_4 + 2a_1a_3)^2 - 9a_0a_4a_2^2\,.$$

Potom je $f \geqq 0$ právě tehdy, když $D \geqq 0$ a když je splněna některá z následujících dvou podmínek (17), (18):

(17) $$R \leqq 0\,, \quad a_2 \geqq 0\,;$$

(18) $$R \geqq 0\,, \quad -\tfrac{1}{2}a_0a_4 \leqq a_1a_3 < a_0a_4\,.$$

Důkaz. Je-li $f \geqq 0$, je ovšem $a_4 \geqq 0$. Kdyby však bylo $a_4 = 0$, bylo by podle předpokladu $a_3 \neq 0$ a neplatilo by $f \geqq 0$. Je-li tedy $f \geqq 0$, je $a_4 > 0$.

Buď naopak $D \geqq 0$ a nechť platí (17) nebo (18). Platí-li (18), je zřejmě $a_4 > 0$. Nechť tedy platí (17); dokážeme, že je opět $a_4 > 0$. Předpokládejme proto, že $a_4 \leqq 0$. Protože $R \leqq 0$, je $a_0a_4 + 2a_1a_3 = a_2a_4 = 0$. Je-li $a_4 = 0$, je $a_1a_3 = 0$; protože $a_3 \neq 0$, je $a_1 = 0$ a tedy $E = 3a_2^2$, $F = a_0a_3^2 + a_2^3 > a_2^3 \geqq 0$ (viz (9), (10)), takže $(\frac{1}{3}E)^3 - F^2 < 0$ proti předpokladu. Je-li $a_4 < 0$, je $a_2 = 0$, $-2a_1a_3 = a_0a_4 < 0$, $E < 0$ a tedy opět $D < 0$ proti předpokladu.

Můžeme tedy předpokládat, že $a_4 > 0$; položme $\delta = (a_0^{-1}a_4)^{\frac{1}{4}}$, definujme čísla a, b, c předpisem $a_4a = a_1\delta^3$, $a_4b = a_2\delta^2$, $a_4c = a_3\delta$ a utvořme polynom $g(y) = y^4 + 4ay^3 + 6by^2 + 4cy + 1$. Zřejmě je

$$(19) \qquad f(y\delta) = a_4\, g(y)\,, \quad ac = a_1a_3(a_0a_4)^{-1}\,, \quad b^2 = a_2^2(a_0a_4)^{-1}\,.$$

Místo (12) můžeme psát $(2ac + 1)^2 \leqq 9b^2$, $b \geqq 0$ neboli $(2a_1a_3 + a_0a_4)^2 \leqq 9a_0a_4a_2^2$, $a_2 \geqq 0$, což je (17); místo (13) můžeme psát $(2ac + 1)^2 \geqq 9b^2$, $2ac + 1 \geqq 0$, $ac < 1$ neboli $(2a_1a_3 + a_0a_4)^2 \geqq 9a_0a_4a_2^2$, $2a_1a_3 + a_0a_4 \geqq 0$, $a_1a_3 < a_0a_4$, což je (18). Naše tvrzení nyní snadno plyne z lemmatu 8.

Poznámka. Buď diskriminant polynomu (8) nezáporný; buď $a_4 \neq 0$ a buď

$$(18') \qquad R \geqq 0\,, \quad -\tfrac{1}{2}a_0a_4 \leqq a_1a_3 \leqq a_0a_4\,.$$

Z poznámky k lemmatu 8 a z důkazu věty 2 snadno plyne, že je za těchto předpokladů polynom (8) opět nezáporný. Polynom $x^4 - 7x^2 + 6x = x(x-1)(x-2)(x+3)$ však ukazuje, že ve větě 2 nelze podmínku (18) nahradit podmínkou (18').

Věta 3. *Polynom* (8) *má kořen o násobnosti aspoň* 3 *právě tehdy, když čísla* E, F, *definovaná vztahy* (10), *splňují podmínku*

$$(20) \qquad E = F = 0\,.$$

Tento kořen má násobnost 3 *právě tehdy, když* (*kromě* (20)) *platí*

$$(21) \qquad a_1^2 \neq a_0a_2\,,$$

a je potom dán výrazem $\frac{1}{2}[(a_0a_3 - a_1a_2)/(a_1^2 - a_0a_2)]$.

Důkaz. Buď napřed $E = F = 0$ a $a_1^2 = a_0a_2$. Potom $0 = a_0^3F = a_0^4a_3^2 + a_0^3a_2^3 - 2a_0^3a_1a_2a_3 = (a_0^2a_3 - a_1^3)^2$, $0 = a_0^2E = a_0^3a_4 + 3a_0^2a_2^2 - 4a_0^2a_1a_3 = a_0^3a_4 - a_1^4$ a tedy $a_0^2a_3 = a_1^3$, $a_0^3a_4 = a_1^4$. Vidíme, že $f(x) = a_0(x + a_1a_0^{-1})^4$.

Předpokládejme nyní, že platí (20) a (21), a definujme čísla ω, α, β předpisy

$$(22) \qquad 2\omega(a_0a_2 - a_1^2) = a_0^2a_3 + 2a_1^3 - 3a_0a_1a_2\,,$$

$$(23) \qquad a_0\alpha = a_1 + \omega\,, \quad a_0\beta = a_1 - 3\omega\,.$$

Snadno se zjistí, že

(24) $a_0F - (a_1^2 - a_0a_2)E = a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3$;

odtud a z (20) plyne, že

$$a_0^4a_3^2 + 2a_0^2a_3(2a_1^3 - 3a_0a_1a_2) = 3a_0^2a_1^2a_2^2 - 4a_0^3a_2^3 .$$

Přičteme-li k oběma stranám $(2a_1^3 - 3a_0a_1a_2)^2$, dostaneme rovnost

(25) $$(a_0^2a_3 + 2a_1^3 - 3a_0a_1a_2)^2 = 4(a_1^2 - a_0a_2)^3 .$$

Podle (22) je tedy

(26) $$\omega^2 = a_1^2 - a_0a_2 .$$

Použijeme-li tohoto vztahu, zjistíme snadno, že

(27) $(a_1 + \omega)(a_1 - \omega) = a_0a_2$,

(28) $(a_1 + \omega)^2(a_1 - 2\omega) = -2a_1^3 + 3a_0a_1a_2 + 2\omega(a_0a_2 - a_1^2)$,

(29) $(a_1 + \omega)^3(a_1 - 3\omega) = 12a_0a_1^2a_2 - 3a_0^2a_2^2 - 8a_1^4 + 8a_1\omega(a_0a_2 - a_1^2)$.

Když do pravých stran rovností (28) a (29) dosadíme podle (22), dostaneme vztahy

(30) $$(a_1 + \omega)^2(a_1 - 2\omega) = a_0^2a_3 ,$$

(31) $$(a_1 + \omega)^3(a_1 - 3\omega) = a_0^2(4a_1a_3 - 3a_2^2) .$$

Protože $E = 0$, je

(32) $$4a_1a_3 - 3a_2^2 = a_0a_4 .$$

Dále je podle (23)

(33) $$a_0^2(\alpha^2 + \alpha\beta) = 2(a_1 + \omega)(a_1 - \omega) ,$$

(34) $$a_0^3(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta) = 4(a_1 + \omega)^2(a_1 - 2\omega) ,$$

(35) $$a_0^4\alpha^3\beta = (a_1 + \omega)^3(a_1 - 3\omega) .$$

Zřejmě $a_0(3\alpha + \beta) = 4a_1$; podle (33) a (27) je $a_0(\alpha^2 + \alpha\beta) = 2a_2$; podle (34) a (30) je $a_0(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta) = 4a_3$; podle (35), (31) a (32) je $a_0\alpha^3\beta = a_4$. Vidíme, že

(36) $$f(x) = a_0(x + \alpha)^3(x + \beta) .$$

Podle (21) a (26) je $\omega \neq 0$ a podle (23) je $\alpha \neq \beta$; f má tedy trojnásobný kořen $-\alpha$. Z (22), (23) snadno plyne, že $\alpha = \frac{1}{2}[(a_1a_2 - a_0a_3)/(a_1^2 - a_0a_2)]$.

Jestliže naopak má f kořen o násobnosti aspoň 3, existují taková α, β, že platí (36). Když pak do E, F dosadíme $a_1 = \frac{1}{4}a_0(3\alpha + \beta), \dots, a_4 = a_0\alpha^3\beta$, zjistíme snadno, že $E = F = 0$. Tím je vše dokázáno.

Poznámka 1. Platí-li (36), je $\frac{1}{16}\alpha^4(\alpha - \beta)^2 = a_3^2 - a_2a_4 = \frac{1}{2}\alpha(a_2a_3 - a_1a_4) = \alpha^2(a_2^2 - a_1a_3) = \frac{1}{4}\alpha^2(a_2^2 - a_0a_4) = \frac{1}{3}\alpha^2(a_1a_3 - a_0a_4) = \frac{1}{2}\alpha^3(a_1a_2 - a_0a_3) = \alpha^4(a_1^2 - a_0a_2)$, jak se snadno přesvědčíme. Je-li $0 \neq \alpha \neq \beta$, lze odtud odvodit různé vzorce pro α.

Poznámka 2. Hodnota výrazů E, F se nezmění, píšeme-li v nich a_{4-k} místo a_k; podmínka (21) však není v tomto smyslu „symetrická". To je způsobeno „nesymetrií" vztahu $a_0 \neq 0$. Předpokládáme-li, že $a_4 \neq 0$ (stačí zřejmě předpoklad, že nula je nejvýš dvojnásobným kořenem polynomu f), můžeme podle předešlé poznámky podmínku (21) nahradit např. podmínkou $a_0a_4 \neq a_2^2$ (která je již „symetrická").

Věta 4. *Nechť $a_0 > 0$, $|a_3| + |a_4| > 0$. Definujme polynom f a číslo R vztahy* (8) *a* (16). *Potom je f dvojmocí kvadratického polynomu právě tehdy, když*

$$R = 0\,, \quad a_0a_3^2 = a_1^2a_4\,, \tag{37}$$

$$a_1a_2a_3(2a_1a_3 + a_0a_4) \geqq 0\,. \tag{38}$$

Polynom f je dvojmocí kladného kvadratického polynomu právě tehdy, když platí vztahy (37) *a*

$$a_2 > 0\,, \quad 0 \leqq a_1a_3 < a_0a_4\,.$$

Polynom f je čtvrtou mocninou lineárního polynomu právě tehdy, když platí vztahy (37) *a*

$$a_2 > 0\,, \quad a_1a_3 = a_0a_4\,.$$

Důkaz. Platí-li

$$f(x) = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^2\,, \tag{39}$$

je zřejmě $a_4 > 0$ a dosazením $a_0 = \alpha^2$, $a_1 = \alpha\beta$, ... zjistíme ihned, že platí (37) a (38). Předpokládejme naopak, že tyto vztahy jsou splněny. Kdyby bylo $a_4 \leqq 0$, bylo by $a_3 = 0$, $a_4 < 0$, $a_1 = 0$ a tedy $R > 0$ ve sporu s (37); je tedy $a_4 > 0$. Je-li $a_1 \neq 0$, položme $\varepsilon = \operatorname{sgn} a_1a_3$; je-li $a_1 = 0$, položme $\varepsilon = \operatorname{sgn} a_2$. Snadno se zjistí viz (37)), že $\varepsilon \neq 0$. Položme ještě $S = a_0a_4 + 2a_1a_3$. Dokážeme, že

$$S = 3a_2\varepsilon(a_0a_4)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{40}$$

Protože $R = 0$, je

$$|S| = 3|a_2|\,(a_0a_4)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{41}$$

Je-li $a_1 = 0$, je $S > 0$ a (40) plyne z (41); je-li $a_2 = 0$, je podle (41) $S = 0$ a (40) opět platí. Nechť tedy $a_1a_2 \neq 0$. Potom podle (38) a (41) je $0 < a_1a_2a_3S = 3|a_1a_3a_2^2| \,.\, (a_0a_4)^{\frac{1}{2}} = 3a_1a_3\varepsilon a_2^2(a_0a_4)^{\frac{1}{2}}$. Odtud plyne ihned (40).

Položme nyní $\alpha = a_0^{\frac{1}{2}}$, $\beta = a_1a_0^{-\frac{1}{2}}$, $\gamma = \varepsilon a_4^{\frac{1}{2}}$. Ze vztahu $a_0a_3^2 = a_1^2a_4$ vidíme, že $\beta = \varepsilon a_3a_4^{-\frac{1}{2}}$; je tedy $2\beta^2 + \alpha\gamma = 2a_1a_0^{-\frac{1}{2}}\varepsilon a_3a_4^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon(a_0a_4)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon S(a_0a_4)^{-\frac{1}{2}}$ a podle

(40) dostáváme rovnost $2\beta^2 + \alpha\gamma = 3a_2$. Zřejmě $\alpha^2 = a_0$, $\alpha\beta = a_1$, $\beta\gamma = a_3$, $\gamma^2 = a_4$; tím je dokázáno, že platí (39).

Položme konečně $\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma$. Je $(a_0a_4)^{\frac{1}{4}} \Delta = \varepsilon(a_1a_3 - a_0a_4)$. Je-li tedy $a_1a_3 < 0$ nebo $a_1a_3 > a_0a_4$, je $\Delta > 0$; je-li $0 < a_1a_3 < a_0a_4$, je $\Delta < 0$; je-li $a_1a_3 = a_0a_4$, je $\Delta = 0$; je-li $a_1a_3 = 0$, je sgn $\Delta = -\text{sgn } a_2$. Odtud vše snadno plyne.

Poznámka 1. Je-li $a_3 = a_4 = 0$, jsou vztahy (37) a (38) triviálně splněny.

Poznámka 2. Snadno se zjistí, že polynom (8) má čtyřnásobný kořen právě tehdy, když $a_0, a_1, \ldots, a_4$ je geometrická posloupnost.

Poznámka 3. Je-li $a_0a_3^2 = a_1^2a_4$, můžeme řešení rovnice $f(x) = 0$ snadno převést na řešení kvadratických rovnic. Je-li totiž $a_1a_4 = 0$, je též $a_3 = 0$ a je to zřejmé; jinak položíme $t = a_1^2/a_0 (= a_3^2/a_4)$, $g(y) = y^2 + 4ty + 6a_2t - 2a_1a_3$ a máme $f(x) = x^2t^{-1}\, g(a_1x + a_3/x)$.

Věta 5. *Nechť* $a_0 > 0$; *buď* D *diskriminant polynomu* (8). *Definujme číslo* R *vztahem* (16). *Potom je polynom* f *kladný právě tehdy, když platí některá z následujících tří podmínek* (42)–(44):

$$R \leqq 0,\ D > 0,\ a_2 \geqq 0; \tag{42}$$

$$R \geqq 0,\ D > 0,\ -\tfrac{1}{2}a_0a_4 \leqq a_1a_3 < a_0a_4\,; \tag{43}$$

$$R = 0,\ a_2 > 0,\ 0 \leqq a_1a_3 < a_0a_4,\ a_0a_3^2 = a_1^2a_4\,. \tag{44}$$

Důkaz. Buď napřed $f > 0$. Zřejmě je $a_4 > 0$. Je-li $D > 0$, platí podle věty 2 buď (42) nebo (43); je-li $D = 0$, je f dvojmoc kladného kvadratického polynomu a podle věty 4 platí (44).

Jestliže naopak platí (44), je $a_4 \neq 0$ a podle věty 4 je $f > 0$. Platí-li (42) nebo (43), nemůže být $a_3 = a_4 = 0$ (v takovém případě by bylo $D = 0$) a podle věty 2 je $f \geqq 0$. Protože $D \neq 0$, nemůže mít f reálný kořen a je tedy $f > 0$.

Резюме

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЛИНОМАХ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага

Пусть $a_0, \ldots, a_4$ – вещественные числа; пусть $a_0 > 0$, $|a_3| + |a_4| > 0$. Положим $E = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3$, $F = a_0a_3^2 + a_1^2a_4 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3$, $S = a_0a_4 + 2a_1a_3$, $D = E^3 - 27F^2$, $R = S^2 - 9a_0a_4a_2^2$ и для каждого действительного x определим $f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$. **В** таком случае f является неотрицательной функцией тогда и только тогда, если $D \geqq 0$ и либо $R \leqq 0$, $a_2 \geqq 0$, либо $R \geqq 0$, $-\frac{1}{2}a_0a_4 \leqq a_1a_3 < a_0a_4$; f имеет корень

кратности по крайней мере 3 точно тогда, когда $E = F = 0$; f является квадратом (квадратичного) многочлена тогда и только тогда, когда $R = 0$, $a_0a_3^2 = a_1^2a_4$, $a_1a_2a_3S \geqq 0$; f является квадратом положительного многочлена точно тогда, когда $R = 0$, $a_0a_3^2 = a_1^2a_4$, $a_2 > 0$, $0 \leqq a_1a_3 < a_0a_4$.

Summary

ON REAL BIQUADRATIC POLYNOMIALS

JAN MAŘÍK, Praha

Let $a_0, \ldots, a_4$ be real numbers, $a_0 > 0$, $|a_3| + |a_4| > 0$. Put $E = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3$, $F = a_0a_3^2 + a_1^2a_4 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3$, $S = a_0a_4 + 2a_1a_3$, $D = E^3 - 27F^2$, $R = S^2 - 9a_0a_4a_2^2$ and for each real x define $f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$. Then f is non-negative if and only if $D \geqq 0$ and either $R \leqq 0$, $a_2 \geqq 0$ or $R \geqq 0$, $-\frac{1}{2}a_0a_4 \leqq a_1a_3 < a_0a_4$; f has a root of multiplicity $\geqq 3$ if and only if $E = F = 0$; f is a second power of a (quadratic) polynomial if and only if $R = 0$, $a_0a_3^2 = a_1^2a_4$, $a_1a_2a_3S \geqq 0$; f is a second power of a positive polynomial if and only if $R = 0$, $a_0a_3^2 = a_1^2a_4$, $a_2 > 0$, $0 \leqq a_1a_3 < a_0a_4$.