Ilja Černý

O existenci homeomorfního zobrazení Gaussovy roviny na sebe převádějícím danou elementární křivku na křivku po částech lineární

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 4, 426--478

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117672`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

O EXISTENCI HOMEOMORFNÍHO ZOBRAZENÍ GAUSSOVY ROVINY NA SEBE PŘEVÁDĚJÍCÍM DANOU ELEMENTÁRNÍ KŘIVKU NA KŘIVKU PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ

ILJA ČERNÝ, Praha

(Došlo dne 25. března 1968)

1,1. V celém článku budeme užívat terminologie a označení z [1]. $\mathbf{E}_1$ resp. $\mathbf{E}$ resp. $\mathbf{S}$ bude množina všech konečných reálných čísel resp. množina všech konečných komplexních čísel (*otevřená Gausssova rovina*) resp. množina $\mathbf{E}$ zvětšená o bod ∞ (*uzavřená Gaussova rovina*).

V $\mathbf{S}$ zavádíme topologii pomocí okolí $U(z, \varepsilon)$ jednotlivých bodů z: Pro $z \in \mathbf{E}$ znamená $U(z, \varepsilon)$ otevřený kruh o středu z a poloměru ε, $U(\infty, \varepsilon)$ je vnějšek kruhu o středu 0 a poloměru $1/\varepsilon$ (k němuž ovšem počítáme bod ∞); předpokládáme přitom (v obou případech), že $\varepsilon \in (0, \infty)$. $\mathbf{S}$ je pak metrisovatelný topologický prostor; metrikou v $\mathbf{S}$, která indukuje zavedenou topologii, je např. metrika ϱ^* z [1], str. 24.

Omezenou nazýváme takovou množinu $M \subset \mathbf{S}$, která je obsažena v jistém $U(0, \varepsilon)$.

1,2. *Křivkou* budeme rozumět každé spojité zobrazení φ (libovolného) kompaktního intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle \subset \mathbf{E}_1$ do $\mathbf{S}$. Body $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ nazýváme *krajními body* křivky φ; bod $\varphi(\alpha) = \text{p.b.}\,\varphi$ resp. $\varphi(\beta) = \text{k.b.}\,\varphi$ je přitom *počáteční* resp. *koncový* bod této křivky. Množině

$$\langle\varphi\rangle = \varphi(\langle\alpha, \beta\rangle) \tag{1}$$

budeme říkat *geometrický obraz* křivky φ; dále zavedeme označení

$$\langle\varphi) = \varphi(\langle\alpha, \beta)), \quad (\varphi\rangle = \varphi((\alpha, \beta\rangle), \quad (\varphi) = \varphi((\alpha, \beta)). \tag{2}$$

Je-li $\langle\varphi\rangle \subset M$, budeme říkat, že φ je *křivkou v M*.

Je-li φ jako dosud, bude $\dot{-}\varphi$ křivka definovaná v $\langle -\beta, -\alpha\rangle$ předpisem

$$(\dot{-}\varphi)(t) = \varphi(-t). \tag{3}$$

Je-li ještě ψ křivka definovaná v $\langle\gamma, \delta\rangle$, pro niž je $\text{p.b.}\,\psi = \text{k.b.}\,\varphi$, bude $\omega = \varphi \dot{+} \psi$ křivka definovaná v $\langle\alpha, \beta + \delta - \gamma\rangle$ předpisem

$$(4) \qquad \omega(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in \langle\alpha, \beta\rangle, \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro } t \in \langle\beta, \beta + \delta - \gamma\rangle. \end{cases}$$

Analogicky se definuje $\varphi_1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_n$ (za předpokladu, že $n \geqq 2$ a že p. b. $\varphi_i =$ = k. b. φ_{i-1} pro $i = 2, \ldots, n$). Je-li $\varphi = \varphi_1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_n$, nazýváme každou z křivek φ_i *částí* φ. Místo $\varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$ píšeme krátce $\varphi \dot{-} \psi$.

1,3. Je-li φ křivka definovaná v $\langle\alpha, \beta\rangle$ a je-li $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, říkáme, že φ je *uzavřená* křivka; jsou-li kromě toho obě parciální zobrazení $\varphi \mid \langle\alpha, \beta)$, $\varphi \mid (\alpha, \beta\rangle$ prostá, nazýváme φ *Jordanovou* křivkou. Geometrický obraz Jordanovy křivky se nazývá *topologická kružnice*. Je-li hranicí nějaké oblasti (tj. souvislé otevřené množiny) Ω topologická kružnice, říkáme, že Ω je *Jordanova oblast*.

Jordanovu větu (sr. s [1], str. 108) lze vyslovit také takto: *Je-li φ Jordanova křivka, má $\mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$ právě dvě komponenty; jsou to Jordanovy oblasti, jejichž společnou hranicí je $\langle\varphi\rangle$.*

Je-li φ Jordanova křivka v $\mathbf{E}$, obsahuje jedna z komponent množiny $\mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$ bod ∞, druhá je omezená. První z uvedených komponent značíme Ext φ nebo Ext $\langle\varphi\rangle$ a nazýváme *vnějškem* φ nebo $\langle\varphi\rangle$, druhou značíme Int φ nebo Int $\langle\varphi\rangle$ a nazýváme *vnitřkem* φ nebo $\langle\varphi\rangle$.

V [1] (str. 214) je zavedena definice indexu bodu $z_0 \in \mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$ vzhledem k uzavřené křivce φ v $\mathbf{E}$; označení: $\text{ind}_\varphi z_0$. V [1] jsou také dokázány základní vlastnosti funkce ind_φ, z nichž některé budeme potřebovat: *Funkce ind_φ je konstantní v každé komponentě množiny $\mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$; v neomezené komponentě je přitom $\text{ind}_\varphi = 0$. Je-li φ Jordanova křivka v $\mathbf{E}$, je ind_φ v Int φ roven buď $+1$ nebo -1*; v prvním (ve druhém) případě říkáme, že křivka φ je *kladně* (*záporně*) *orientována*.

1,4. *Obloukem* (sr. s [1], str. 95) rozumíme geometrický obraz libovolné prosté křivky, tj. obraz libovolného kompaktního intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle \subset \mathbf{E}_1$ při libovolném prostém spojitém (tedy homeomorfním) zobrazení do $\mathbf{S}$. Je-li φ prostá po částech lineární křivka, nazýváme $\langle\varphi\rangle$ *prostou lomenou čarou*.

Je-li φ prostá křivka definovaná v $\langle\alpha, \beta\rangle$, pro niž je $\langle\varphi\rangle = L$, lze ukázat, že množina $\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$ nezávisí na bližší volbě křivky φ (sr. s [1], str. 95); body $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ nazýváme *krajními body* oblouku L. Jestliže pro každou dvojici různých bodů z_1, z_2 z L položíme $z_1 \prec z_2$, když $\varphi_{-1}(z_1) < \varphi_{-1}(z_2)$, stane se L uspořádanou množinou, v níž je $\varphi(\alpha)$ prvním, $\varphi(\beta)$ posledním bodem. Lze ukázat, že totéž uspořádání bychom dostali, kdybychom vyšli od jiné prosté křivky ψ, pro niž je $\langle\psi\rangle = L$, p. b. ψ = p. b. φ. (Sr. s [1], str. 96.) Zavedeme-li popsaným způsobem v L uspořádání, budeme říkat, že jsme oblouk L *orientovali*; bod $\varphi(\alpha)$ resp. $\varphi(\beta)$ nazveme *počátečním* resp. *koncovým bodem orientovaného oblouku* L a označíme p. b. L resp. k. b. L. Je-li L oblouk s krajními body a, b, existuje (právě jedna) orientace oblouku L, při níž je a = p. b. L (a b = k. b. L).

Otevřeným obloukem příslušným k L nazveme množinu $\tilde{L}$, která vznikne z L odstraněním obou jeho krajních bodů.

Je-li C topologická kružnice, $a \neq b$ dva její body, existují právě dva různé oblouky L_1, L_2 s krajními body a, b obsažené v C; je pro ně $L_1 \cup L_2 = C$, $\tilde{L}_1 \cap L_2 = L_1 \cap \tilde{L}_2 = \emptyset$. (Sr. s [1], str. 175.) Nastane-li pro oblouky L_1, L_2 právě popsaná situace, nazveme L_2 *obloukem komplementárním k L_1 v C*.

1,5. Úvahy o „θ – křivkách" z [1] (str. 182–185) doplníme třemi větami, které budeme v dalším často potřebovat.

Věta 1. *Nechť*

(5) λ_j $(j = 1, 2, 3)$ *jsou prosté křivky v* $\mathbf{E}$,

pro něž je

(6) $\text{p.b.}\,\lambda_j = a\,, \quad \text{k.b.}\,\lambda_j = b \quad \textit{pro} \quad j = 1, 2, 3\,,$

přičemž

(7) *množiny* (λ_j) $(j = 1, 2, 3)$ *jsou disjunktní.*

Nechť (Jordanova) křivka $\lambda_1 \dotplus \lambda_2$ *je kladně orientována a nechť* $(\lambda_3) \subset \operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2)$.

Pak jsou i křivky $\lambda_1 \dotplus \lambda_3$, $\lambda_3 \dotplus \lambda_2$ *kladně orientovány a je*

(8) $\operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2) - (\lambda_3) = \operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_3) \cup \operatorname{Int}(\lambda_3 \dotplus \lambda_2)$,

kde Jordanovy oblasti vpravo jsou disjunktní.

Důkaz. (8) plyne ihned z věty 113 a jejího dodatku (viz [1], str. 182–183); zbývá dokázat tvrzení o orientaci křivek $\lambda_1 \dotplus \lambda_3$ a $\lambda_3 \dotplus \lambda_2$. Podle známých vět o indexu bodu vzhledem ke křivce (viz [1]) je

(9) $$\operatorname{ind}_{\lambda_1 \dotplus \lambda_2} = \operatorname{ind}_{\lambda_1 \dotplus \lambda_3} + \operatorname{ind}_{\lambda_3 \dotplus \lambda_2}\ [1]\,.$$

Zvolme libovolně bod $z_1 \in \operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_3)$; podle (8) je pak $z_1 \in \operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2)$, takže vzhledem ke kladné orientaci křivky $\lambda_1 \dotplus \lambda_2$ je na levé straně (9) (po dosazení z_1) $+1$. Vzhledem k (8) je $z_1 \in \operatorname{Ext}(\lambda_3 \dotplus \lambda_2)$, takže druhý člen vpravo je 0; první člen vpravo je tedy $+1$, takže křivka $\lambda_1 \dotplus \lambda_3$ je kladně orientována.

Zcela analogicky se dokáže kladná orientace křivky $\lambda_3 \dotplus \lambda_2$.

---

[1]) Pokud budeme psát rovnost mezi indexy bodu vzhledem ke křivce, budeme tím vždy rozumět rovnost v průniku definičních oborů příslušných indexů; v případě (9) se tedy jedná o rovnost v $\mathbf{S} - (\langle\lambda_1\rangle \cup \langle\lambda_2\rangle \cup \langle\lambda_3\rangle)$.

Věta 2. *Nechť platí* (5), (6) a (7). *Nechť křivka* $\lambda_1 \dotplus \lambda_2$ *je kladně orientována a nechť* $(\lambda_3) \subset \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2)$. *Pak jsou jen tyto dvě možnosti:*

1. *Křivky* $\lambda_1 \dotplus \lambda_3$, $\lambda_2 \dotplus \lambda_3$ *jsou kladně orientovány a zároveň*

$$(10)_1 \qquad (\lambda_1) \subset \operatorname{Ext}(\lambda_2 \dotplus \lambda_3)\,, \quad (\lambda_2) \subset \operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_3)\,,$$

$$(11)_1 \qquad \operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_3) - (\lambda_2) = \operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2) \cup \operatorname{Int}(\lambda_2 \dotplus \lambda_3),$$

kde množiny vpravo jsou disjunktní,

$(12)_1$ *množina* $\boldsymbol{S} - (\langle\lambda_1\rangle \cup \langle\lambda_2\rangle \cup \langle\lambda_3\rangle)$ *má komponenty*

$$\operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2),\ \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dotplus \lambda_3),\ \operatorname{Int}(\lambda_2 \dotplus \lambda_3).$$

2. *Křivky* $\lambda_3 \dotplus \lambda_1$, $\lambda_3 \dotplus \lambda_2$ *jsou kladně orientovány a zároveň*

$$(10)_2 \qquad (\lambda_1) \subset \operatorname{Int}(\lambda_3 \dotplus \lambda_2)\,, \quad (\lambda_2) \subset \operatorname{Ext}(\lambda_3 \dotplus \lambda_1)\,,$$

$$(11)_2 \qquad \operatorname{Int}(\lambda_3 \dotplus \lambda_2) - (\lambda_1) = \operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2) \cup \operatorname{Int}(\lambda_3 \dotplus \lambda_1),$$

kde množiny vpravo jsou disjunktní,

$(12)_2$ *množina* $\boldsymbol{S} - (\langle\lambda_1\rangle \cup \langle\lambda_2\rangle \cup \langle\lambda_3\rangle)$ *má komponenty*

$$\operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2),\ \operatorname{Int}(\lambda_3 \dotplus \lambda_1),\ \operatorname{Ext}(\lambda_3 \dotplus \lambda_2).$$

Důkaz. Podle důsledku 1 věty 113 z [1] (str. 183) plyne z podmínky $(\lambda_3) \subset \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2)$, že $\operatorname{Int}(\lambda_1 \dotplus \lambda_2)$ je jednou z komponent množiny $\boldsymbol{S} - \Lambda$, kde $\Lambda = \langle\lambda_1\rangle \cup \langle\lambda_2\rangle \cup \langle\lambda_3\rangle$. Jsou jen tyto dvě možnosti: Komponentami $\boldsymbol{S} - \Lambda$ jsou

1. $\operatorname{Ext}(\lambda_1 \dotplus \lambda_3)$, $\operatorname{Int}(\lambda_2 \dotplus \lambda_3)$,
2. $\operatorname{Int}(\lambda_3 \dotplus \lambda_1)$, $\operatorname{Ext}(\lambda_3 \dotplus \lambda_2)$.

Z citovaného důsledku ihned plyne, že v případě 1 resp. 2 platí $(10)_1-(12)_1$ resp. $(10)_2-(12)_2$. Zbývá tedy dokázat tvrzení o orientaci křivek $\lambda_1 \dotplus \lambda_3$, $\lambda_2 \dotplus \lambda_3$; k tomu stačí užít (9), $(11)_1$ resp. $(11)_2$ a téže metody jako v důkazu věty 1.

Snadným důsledkem věty 2 je toto tvrzení:

Věta 3. *Nechť Jordanovy křivky* χ *a* ω *jsou kladně orientovány, nechť* $\omega = \omega_1 \dotplus \omega_2$ *nebo* $\omega = \omega_2 \dotplus \omega_1$, *kde* ω_1 *je část* χ, $(\omega_2) \cap \langle\chi\rangle = \emptyset$. *Jestliže existuje část* χ_1 *křivky* χ *tak, že* $(\chi_1) \subset \operatorname{Ext}\omega$, *je* $\operatorname{Int}\omega \subset \operatorname{Int}\chi$.

Důkaz. Protože index vzhledem ke křivce $\omega_1 \dotplus \omega_2$ je roven indexu vzhledem ke křivce $\omega_2 \dotplus \omega_1$, můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že $\omega = \omega_1 \dotplus \omega_2$ a že p . b . χ = p . b . ω_1. Pak je $\chi = \omega_1 \dotplus \chi_2$ pro vhodnou křivku χ_2. Vzhledem k tomu, že

$$(\chi_2) \cap \langle\omega\rangle = (\chi_2) \cap (\langle\omega_1\rangle \cup (\omega_2)) = \emptyset\,,$$

mají křivky

$$\lambda_1 = \omega_1\,, \quad \lambda_2 = \dot{-}\omega_2\,, \quad \lambda_3 = \dot{-}\chi_2$$

týž počáteční a týž koncový bod, přičemž množiny (λ_j) $(j = 1, 2, 3)$ jsou disjunktní. Zřejmě je $(\chi_1) \subset (\chi_2)$, takže (vzhledem k tomu, že $(\chi_2) \cap \langle\omega\rangle = \emptyset$ a že $(\chi_1) \subset \operatorname{Ext}\omega$) je $(\chi_2) \subset \operatorname{Ext}\omega$.

Podle věty 2 – vzhledem k tomu, že křivky $\omega = \lambda_1 \dot{-} \lambda_2$, $\chi = \lambda_1 \dot{-} \lambda_3$ jsou kladně orientovány – je

$$\operatorname{Int}\omega = \operatorname{Int}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_2) \subset \operatorname{Int}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_3) = \operatorname{Int}\chi$$

(viz $(11)_1$).

2,1. *Elementární křivkou* budeme nazývat uzavřenou křivku φ definovanou v $\langle\alpha, \beta\rangle$, je-li množina

(13) $$T = \{t \in \langle\alpha, \beta\rangle;\ \text{existuje } t' \in \langle\alpha, \beta\rangle \text{ tak, že } t' \neq t,\ \varphi(t') = \varphi(t)\}$$

konečná.

Buďte

(14) $$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = \beta\ ^{2})$$

právě všechny body množiny T a označme

(15) $$\varphi_i = \varphi \mid \langle t_{i-1}, t_i\rangle \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, M\,.$$

Je zřejmé, že každá křivka φ_i je buď prostá (je-li $\varphi(t_{i-1}) \neq \varphi(t_i)$) nebo Jordanova (je-li $\varphi(t_{i-1}) = \varphi(t_i)$) a že množiny

(16) $$(\varphi_1), (\varphi_2), \ldots, (\varphi_M) \quad \text{jsou disjunktní.}$$

2,2. V odst. 2,2–2,4 provedeme jistý „rozklad" křivky φ; jeho vlastnosti jsou popsány ve větě 4. Křivka φ bude jako v odst. 2,1 a budeme užívat téhož označení; z technických důvodů jsme však nuceni psát $\varphi(i)$ místo φ_i.

Položme $i_1^1 = 1$. Je-li křivka $\varphi(i_1^1)$ prostá, je k . b . $\varphi(i_1^1) \neq$ p . b . $\varphi(i_1^1) = k\,.\,b\,.$ $\varphi(M)$, takže $i_1^1 \neq M$, a existují čísla j tak, že k . b . $\varphi(i_1^1) =$ p . b . $\varphi(j)$. [3]) Buď i_2^1 největší takové j. Je-li křivka $\varphi(i_1^1) \dotplus \varphi(i_2^1)$ prostá, je opět $i_2^1 < M$, a existuje největší i_3^1 tak, že k . b . $\varphi(i_2^1) =$ p . b . $\varphi(i_3^1)$, atd.

V konstrukci pokračujeme tak dlouho, až dojdeme k indexu $i_{K_1}^1$ $(K_1 \geqq 1)$, pro který křivka

(17) $$\psi_1 = \varphi(i_1^1) \dotplus \ldots \dotplus \varphi(i_{K_1}^1)$$

není prostá.

[2]) Body α, β patří do T, neboť $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

[3]) Např. $j = i_1^1 + 1$.

Dokažme, že takto definovaná křivka ψ_1 je Jordanova: To je zřejmé, když $K_1 = 1$ (takže $\psi_1 = \varphi(i_1^1)$); buď tedy $K_1 > 1$. Ze způsobu konstrukce plyne, že křivka

$$\psi_1^* = \varphi(i_1^1) + \ldots + \varphi(i_{K_1-1}^1)$$

je pak prostá; protože $\psi_1 = \psi_1^* + \varphi(i_{K_1}^1)$ není prostá, je nutně k . b . $\varphi(i_{K_1}^1) \in \langle\psi_1^*\rangle$. Odtud plyne existence nejmenšího j, pro něž je $1 \leqq j \leqq K_1$, k . b . $\varphi(i_{K_1}^1) =$ p . b . $\varphi(i_j^1)$. Kdyby bylo $1 < j \leqq K_1$, nebylo by $i_{K_1}^1 = M$ (protože by bylo k . b . $\varphi(i_{K_1}^1) \neq$ $\neq$ p . b . $\varphi(i_1^1) =$ k . b . $\varphi(M)$), a $i_{K_1}^1 + 1$ by bylo číslo větší než i_j^1 a nejvýše rovné M, pro které by bylo

$$\text{p . b . } \varphi(i_{K_1}^1 + 1) = \text{k . b . } \varphi(i_{K_1}^1) = \text{p . b . } \varphi(i_j^1) = \text{k . b . } \varphi(i_{j-1}^1)\,;$$

to by však odporovalo pravidlu, podle kterého mělo být i_j^1 zvoleno. Je tedy $j = 1$ a ψ_1 je v důsledku toho Jordanova křivka.

2,3. Není-li $\{i_1^1, \ldots, i_{K_1}^1\} = \{1, \ldots, M\}$ [4]), buď i_1^2 nejmenší číslo množiny $\{1, \ldots$ $\ldots, M\} - \{i_1^1, \ldots, i_{K_1}^1\}$. Pak je p . b . $\varphi(i_1^2) =$ k . b . $\varphi(i_1^2 - 1) \in \langle\psi_1\rangle$, neboť $i_1^2 - 1 =$ $= i_j^1$ pro vhodné j. Není-li k . b . $\varphi(i_1^2) \in \langle\psi_1\rangle$, je $i_1^2 < M$ (neboť k . b . $\varphi(M) =$ $=$ p . b . $\varphi(i_1^1) \in \langle\psi_1\rangle$) a existuje největší číslo i_2^2, pro něž je p . b . $\varphi(i_2^2) =$ k . b . $\varphi(i_1^2)$. Není-li ani k . b . $\varphi(i_2^2) \in \langle\psi_1\rangle$, existuje největší číslo i_3^2 tak, že p . b . $\varphi(i_3^2) =$ $=$ k . b . $\varphi(i_2^2)$, atd. V konstrukci pokračujeme tak dlouho, až dostaneme křivku $\varphi(i_{K_2}^2)$, která má koncový bod na $\langle\psi_1\rangle$. Položíme pak

$$\psi_2 = \varphi(i_1^2) + \ldots + \varphi(i_{K_2}^2)\,, \tag{18}$$

načež je p . b . $\psi_2 \in \langle\psi_1\rangle$, k . b . $\psi_2 \in \langle\psi_1\rangle$, $(\psi_2) \cap \langle\psi_1\rangle = \emptyset$.

Tvrdíme dále, že

$$\{i_1^1, \ldots, i_{K_1}^1\} \cap \{i_1^2, \ldots, i_{K_2}^2\} = \emptyset\,. \tag{19}$$

Z definice indexu i_1^2 ihned plyne, že $i_1^2 \neq i_j^1$, je-li $1 \leqq j \leqq K_1$. Z podmínky $i_q^2 = i_p^1$, kde $1 < q \leqq K_2$, $1 \leqq p \leqq K_1$, by plynulo, že k . b . $\varphi(i_{q-1}^2) =$ p . b . $\varphi(i_q^2) =$ $=$ p . b . $\varphi(i_p^1) \in \langle\psi_1\rangle$, což není možné, neboť konstrukce křivek $\varphi(i_j^2)$ by musela skončit nejpozději u $\varphi(i_{q-1}^2)$. Je tedy skutečně $i_q^2 \neq i_p^1$ (pro kterákoliv dvě čísla p, q, pro něž je $1 \leqq p \leqq K_1$, $1 \leqq q \leqq K_2$).

Dokažme, že křivka ψ_2 je buď prostá nebo Jordanova: Není-li ψ_2 prostá, existuje nejmenší j tak, že k . b . $\varphi(i_j^2) =$ p . b . $\varphi(i_k^2)$ pro vhodné $k \leqq j$. Je-li $j = 1$, je $\psi_2 =$ $= \varphi(i_1^2)$ Jordanova křivka a jsme hotovi. Buď tedy $j > 1$; z toho, jak bylo j definováno, plyne, že křivka

$$\psi_2^* = \varphi(i_1^2) + \ldots + \varphi(i_{j-1}^2)$$

je prostá; přitom $(\psi_2^*) \cap \langle\psi_1\rangle = \emptyset$. Kdyby bylo k . b . $\varphi(i_j^2) =$ p . b . $\varphi(i_k^2)$, $1 <$

---

[4]) Jak snadno nahlédneme, může tato rovnost nastat jen tehdy, když φ je Jordanova křivka, $K_1 = M = 1$.

$< k \leqq j$, bylo by k. b. $\varphi(i_j^2) \in (\psi_2^*\rangle$, tedy k. b. $\varphi(i_j^2) \notin \langle\psi_1\rangle$, takže by bylo $i_j^2 < < M$ [5]), p. b. $\varphi(i_j^2 + 1) = $ k. b. $\varphi(i_j^2) = $ p. b. $\varphi(i_k^2) = $ k. b. $\varphi(i_{k-1}^2)$, což by odporovalo pravidlu, podle něhož mělo být nalezeno číslo i_k^2. Z podmínek k. b. $\varphi(i_j^2) = $ p. b. $\varphi(i_k^2)$, $1 \leqq k \leqq j$ tedy plyne, že $k_1 = 1$. Protože k. b. $\varphi(i_j^2) = $ p. b. $\varphi(i_1^2) \in \langle\psi_1\rangle$, nepokračovala konstrukce dále než k indexu i_j^2, tj. je $j = K_2$. Křivka ψ_2 je tedy Jordanova.

2,4. Není-li

$$\{i_1^1, \ldots, i_{K_1}^1\} \cup \{i_1^2, \ldots, i_{K_2}^2\} = \{1, \ldots, M\}, \tag{20}$$

existuje nejmenší z čísel $1, \ldots, M$, nepatřící do množiny na levé straně (20); označme je i_1^3. Analogicky, jako jsme sestrojili křivku ψ_2, definujme nyní křivku

$$\psi_3 = \varphi(i_1^3) \dotplus \ldots \dotplus \varphi(i_{K_3}^3) \quad (\text{kde } K_3 \geqq 1); \tag{21}$$

ψ_3 bude opět prostá nebo Jordanova, přičemž její krajní body budou ležet v $\langle\psi_1\rangle \cup \langle\psi_2\rangle$, zatímco (ψ_3) bude s touto množinou disjunktní. Kromě toho budou disjunktní i množiny

$$\{i_1^1, \ldots, i_{K_1}^1\}, \{i_1^2, \ldots, i_{K_2}^2\}, \{i_1^3, \ldots, i_{K_3}^3\}.$$

V konstrukci křivek $\psi_1, \psi_2, \ldots$ pokračujme tak dlouho, dokud $\{i_1^1, \ldots, i_{K_1}^1\} \cup \{i_1^2, \ldots, i_{K_2}^2\} \cup \ldots$ není rovno množině $\{1, \ldots, M\}$.

Je patrné, že platí toto tvrzení:

Věta 4. *Je-li φ elementární křivka definovaná v $\langle\alpha, \beta\rangle$, jsou-li (14) právě všechny body množiny (13) a znamená-li $\varphi(i)$ zobrazení $\varphi \mid \langle t_{i-1}, t_i\rangle$, existují křivky $\psi_1, \ldots, \psi_P$ $(P \geqq 1)$ s těmito vlastnostmi:*

1. *Každé ψ_m má tvar $\varphi(i_1^m) \dotplus \ldots \dotplus \varphi(i_{K_m}^m)$, kde $K_m \geqq 1$; každé z čísel $1, \ldots, M$ je přitom rovno právě jednomu číslu i_j^m, kde $1 \leqq m \leqq P$, $1 \leqq j \leqq K_m$.*
2. *Křivka ψ_1 je Jordanova, každá z křivek $\psi_2, \ldots, \psi_P$ je buď prostá nebo Jordanova.*
3. *Je-li $1 < m \leqq P$, jsou krajní body křivky ψ_m obsaženy v množině $\langle\psi_1\rangle \cup \ldots \cup \langle\psi_{m-1}\rangle$, kdežto (ψ_m) je s touto množinou disjunktní.*

3,1. Buď $\mathfrak{M}$ neprázdný konečný systém topologických kružnic obsažených v $\mathbf{E}$. Předpokládejme, že $\mathfrak{M}$ lze rozložit na disjunktní sjednocení $\bigcup_{Q=0}^{R} \mathfrak{M}_Q$ (kde $R \geqq 0$) a že prvky z $\mathfrak{M}$ lze sestavit do prosté posloupnosti $C_0, C_1, \ldots, C_N$ (kde $N \geqq 0$) tak, aby platilo:

I. $\mathfrak{M}_0 = \{C_0\}$, $\mathfrak{M}_R \neq \emptyset$.

II. Při vhodné volbě bodů $a_n \in C_n$ platí: Je-li $C_n \in \mathfrak{M}_{Q_1}$, $C_m \in \mathfrak{M}_{Q_2}$, $Q_1 \geqq Q_2$,

[5]) k. b. $\varphi(M) \in \langle\psi_1\rangle$.

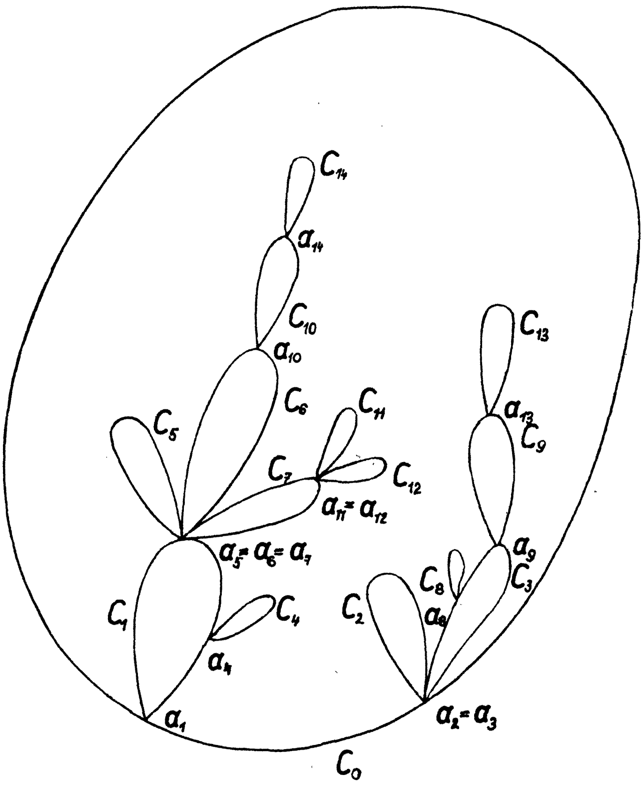
$C_n \cap C_m \neq \emptyset$, $n \neq m$, je buď $Q_1 = Q_2$ a $C_n \cap C_m = \{a_n\} = \{a_m\}$, nebo $Q_1 = Q_2 + 1$ a $C_n \cap C_m = \{a_n\} \neq \{a_m\}$.[6])

III. Je-li $C_n \in \mathfrak{M}_Q$, $1 \leqq Q \leqq R$, existuje právě jedno $C_m \in \mathfrak{M}_{Q-1}$ tak, že $C_n \cap C_m \neq \emptyset$.[7])

IV. Množiny $\operatorname{Int} C_1, \ldots, \operatorname{Int} C_N$ jsou disjunktní a množina

$$(22) \qquad \bigcup_{C_n \in \mathfrak{M}_1} (\overline{\operatorname{Int} C_n} - \{a_n\}) \cup \bigcup_{Q=2}^{R} \bigcup_{C_n \in \mathfrak{M}_Q} \overline{\operatorname{Int} C_n}$$

je obsažena v jedné komponentě Ω_0 množiny $\mathbf{S} - C_0$.[8])



Obr. 1. Příklad elementárního systému. (C_0 patří do $\mathfrak{M}_0$, C_1, C_2, C_3 do $\mathfrak{M}_1$, $C_4, \ldots, C_9$ do $\mathfrak{M}_2$, $C_{10}, \ldots, C_{13}$ do $\mathfrak{M}_3$, C_{14} do $\mathfrak{M}_4$; $\Omega_0 = \operatorname{Int} C_0$.)

Pak řekneme, že $\mathfrak{M}$ je *elementární systém* (topologických kružnic); číslo N (o jedničku zmenšený počet prvků $\mathfrak{M}$) nazveme *stupněm* systému $\mathfrak{M}$, topologickou kružnici C_0 (jediný prvek podsystému $\mathfrak{M}_0$) jeho *basí*.

[6]) Je tedy $a_0 \neq a_n$ pro každé $n = 1, \ldots, N$.

[7]) Z toho a z podmínky $\mathfrak{M}_R \neq \emptyset$ ihned plyne, že $\mathfrak{M}_Q \neq \emptyset$ pro každé $Q = 0, \ldots, R$.

[8]) Je tedy buď $\Omega_0 = \operatorname{Int} C_0$ nebo $\Omega_0 = \operatorname{Ext} C_0$.

Poznámka 1. Buď $\mathfrak{M} = \{C_n\}_{n=0}^N$ elementární systém s basí C_0. Jak snadno nahlédneme, lze body $a_n \in C_n$, kde $n = 1, \ldots, N$ zvolit jen jedním způsobem tak, aby splňovaly shora uvedené podmínky II–IV. Je-li totiž $a_n \in C_n$, kde $C_n \in \mathfrak{M}_Q$, $Q \geqq 1$, existuje podle III právě jedno $C_m \in \mathfrak{M}_{Q-1}$ tak, že $C_n \cap C_m \neq \emptyset$, přičemž podle II je nutně $\{a_n\} = C_n \cap C_m$.

Dále snadno nahlédneme, že $\{a_1, \ldots, a_N\}$ je množinou všech bodů, obsažených alespoň ve dvou různých topologických kružnicích z $\mathfrak{M}$. Z toho je patrné, že množina $\{a_1, \ldots, a_N\}$ závisí pouze na systému $\mathfrak{M}$; nezávisí na očíslování prvků z $\mathfrak{M}$ ani na volbě base systému $\mathfrak{M}$. Dále je z toho patrné, že množiny C_0, $C_1 - \{a_1\}, \ldots, C_N - \{a_N\}$ jsou disjunktní.

Poznámka 2. Ukažme, že platí: Obsahuje-li elementární systém $\mathfrak{M}$ dva různé prvky A, B, pro něž je $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \neq \emptyset$, má jen jednu basi; označíme-li ji C_0 a jsou-li $C_1, \ldots, C_N$ ostatní prvky z $\mathfrak{M}$, je $\bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Int} C_0$ (tj. množina Ω_0 z podmínky IV je rovna $\operatorname{Int} C_0$).

Důkaz. Za uvedených předpokladů o A a B musí být jedna z těchto množin basí $\mathfrak{M}$, neboť vnitřky dvou různých topologických kružnic z $\mathfrak{M}$, z nichž žádná není basí $\mathfrak{M}$, jsou podle IV disjunktní.

Buď tedy např. $C_0 = A$ basí $\mathfrak{M}$; z podmínky $\operatorname{Int} C_0 \cap \operatorname{Int} B \neq \emptyset$ a ze IV ihned plyne, že komponentou množiny $\mathbf{S} - C_0$, která obsahuje $\bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{Int} C_n$, je $\operatorname{Int} C_0$.

Předpokládejme, že některá z topologických kružnic $C \in \mathfrak{M}$, $C \neq C_0$, je také basí $\mathfrak{M}$. Pak by muselo být buď $\operatorname{Int} C_0 \subset \operatorname{Int} C$ nebo $\operatorname{Int} C_0 \subset \operatorname{Ext} C$; jak jsme již dokázali, je přitom $\operatorname{Int} C \subset \operatorname{Int} C_0$. Protože $C \neq C_0$, nemůže být zároveň $\operatorname{Int} C_0 \subset \operatorname{Int} C$. Kdyby bylo $\operatorname{Int} C_0 \subset \operatorname{Ext} C$, dostali bychom z inkluse $\operatorname{Int} C \subset \operatorname{Int} C_0$ inklusi $\overline{\operatorname{Ext} C_0} \subset \overline{\operatorname{Ext} C}$, tedy celkem vztah $\mathbf{S} = \operatorname{Int} C_0 \cup \overline{\operatorname{Ext} C_0} \subset \overline{\operatorname{Ext} C}$, což je nemožné. Topologická kružnice C_0 je tedy skutečně jedinou basí systému $\mathfrak{M}$.

Dále platí: Je-li $\mathfrak{M}$ elementární systém kladného stupně, C_0 jeho base a obsahuje-li $\operatorname{Int} C_0$ vnitřky všech ostatních topologických kružnic $C_1, \ldots, C_N$ z $\mathfrak{M}$ je (podle IV) např. $\operatorname{Int} C_0 \cap \operatorname{Int} C_1 \neq \emptyset$, takže podle toho, co jsme již dokázali, je C_0 jedinou basí systému $\mathfrak{M}$.

Z toho, co jsme řekli, tedy plyne, že má-li mít elementární systém $\mathfrak{M}$ více než jednu basi, musí být jeho stupeň kladný a vnitřky topologických kružnic z $\mathfrak{M}$ musí být disjunktní. Označíme-li C_0 (kteroukoliv) basi systému $\mathfrak{M}$, $C_1, \ldots, C_N$ ostatní prvky z $\mathfrak{M}$, je tedy podle IV $\Omega_0 = \operatorname{Ext} C_0$, $\bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Ext} C_0$.

Nechť $\mathfrak{M}$ je elementárním systémem kladného stupně N s basí C_0; Ω_0 nechť znamená totéž jako v podmínce IV. V dalším budeme studovat množinu

$$(23) \qquad \Omega = \Omega_0 - \bigcup_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{Int} C_n}\,.$$

V případě, že $\Omega_0 = \operatorname{Int} C_0$, má systém $\mathfrak{M}$ – podle toho, co jsme řekli nahoře – jen jednu basi C_0 a

$$\Omega = \operatorname{Int} C_0 - \bigcup_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{Int} C_n}\,.$$

V případě, že $\Omega_0 = \operatorname{Ext} C_0$, může mít systém $\mathfrak{M}$ sice více basí, ale množina

$$\Omega = \bigcap_{n=0}^{N} \operatorname{Ext} C_n$$

je zřejmě na bližší volbě base nezávislá.

Z toho je patrné, že množina (23) je v případě, že stupeň systému $\mathfrak{M}$ je kladný, závislá pouze na tomto systému – není závislá na volbě base systému $\mathfrak{M}$.

Dokažme toto tvrzení o množině (23):

Věta 5. *Je-li $\mathfrak{M} = \{C_n\}_{n=0}^{N}$ elementární systém s basí C_0 a je-li Ω_0 ta komponenta množiny $\mathbf{S} - C_0$, která obsahuje $\bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{Int} C_n$, je množina (23) jednoduše souvislá oblast s hranicí $H(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{N} C_n$.*

Důkaz provedeme indukcí podle stupně N elementárního systému $\mathfrak{M}$. Je-li $N = 0$, je $\Omega = \Omega_0$ Jordanova oblast s hranicí C_0; tvrzení tedy platí.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro každý elementární systém stupně $N - 1$ (kde $N > 0$) a nechť $\mathfrak{M}$ je elementární systém stupně N jako nahoře. Označení můžeme volit ještě tak, že bude $C_N \in \mathfrak{M}_R$. Je zřejmé, že $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ je elementární systém stupně $N - 1$. Podle indukčního předpokladu je tedy

$$\Omega^* = \Omega_0 - \bigcup_{n=0}^{N-1} \overline{\operatorname{Int} C_n}$$

jednoduše souvislá oblast. Souvislost množiny Ω^* je ekvivalentní s podmínkou, že množina

$$\mathbf{S} - \Omega^* = (\mathbf{S} - \Omega_0) \cup \bigcup_{n=1}^{N-1} \overline{\operatorname{Int} C_n}$$

neroztíná $\mathbf{S}$.[9]) Protože množina $\overline{\operatorname{Int} C_N}$ také neroztíná $\mathbf{S}$ ($\mathbf{S} - \overline{\operatorname{Int} C_N} = \operatorname{Ext} C_n$ je souvislá množina), protože $\mathbf{S} - \Omega^*$, $\overline{\operatorname{Int} C_n}$ jsou uzavřené množiny a protože průnik

$$(\mathbf{S} - \Omega^*) \cap \overline{\operatorname{Int} C_N} = \{a_n\} \tag{24}$$

[9]) Definici viz v [1], str. 108.

je souvislý, neroztíná $\boldsymbol{S}$ podle známé Janiszewského věty[10]) ani množina

$$(25)\qquad \boldsymbol{S} - \Omega = (\boldsymbol{S} - \Omega^*) \cup \overline{\operatorname{Int} C_N} = (\boldsymbol{S} - \Omega_0) \cup \bigcup_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{Int} C_n}\,.$$

To znamená, že Ω je souvislá množina, tedy oblast.

Protože indukční předpoklad zaručuje souvislost množiny $\boldsymbol{S} - \Omega^*$, je (v důsledku toho, že (24) je neprázdná množina) souvislá i množina (25); oblast Ω je tedy jednoduše souvislá.

Dále je

$$(26)\qquad \boldsymbol{S} = \Omega \cup \bigcup_{n=0}^{N} C_n \cup (\tilde{\Omega} \cup \bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{Int} C_n)\,,$$

kde $\tilde{\Omega}$ je komponenta množiny $\boldsymbol{S} - C_0$, různá od Ω_0. Buď $z \in \bigcup_{n=0}^{N} C_n - \{a_1, \ldots, a_N\}$, takže je $z \in C_n$ pro vhodné n $(0 \leqq n \leqq N)$; číslo n je přitom určeno jednoznačně, neboť množiny C_0, $C_1 - \{a_1\}, \ldots, C_N - \{a_N\}$ jsou – jak jsme viděli nahoře – disjunktní.

Je-li $z \in C_0$, je každé dost malé jeho okolí $U(z)$ disjunktní s $\bigcup_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{Int} C_n}$, neboť toto sjednocení je uzavřená množina neobsahující z; kromě toho je (podle Jordanovy věty) $U(z) \cap \Omega_0 \neq \emptyset$ pro každé okolí $U(z)$ bodu z. Z toho plyne, že $z \in \bar{\Omega}$.

Je-li $z \in C_n$ pro některé $n > 0$, je $z \in \Omega_0$, takže každé dost malé okolí $U(z)$ je obsaženo v Ω_0; protože sjednocení všech $\overline{\operatorname{Int} C_n}$, kde $1 \leqq m \leqq N$, $m \neq n$, je uzavřená množina neobsahující bod z, je s ním každé dost malé okolí $U(z)$ disjunktní. Každé okolí $U(z)$ bodu z však protíná $\operatorname{Ext} C_n$; z toho opět plyne, že $z \in \bar{\Omega}$.

Dokázali jsme tedy, že $\bigcup_{n=0}^{N} C_n - \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \bar{\Omega}$; protože $\bar{\Omega}$ je uzavřená množina, je dokonce $\bigcup_{n=0}^{N} C_n \subset \bar{\Omega}$. Protože množina $\tilde{\Omega} \cup \bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{Int} C_n$ je otevřená a disjunktní s Ω, je částí $\boldsymbol{S} - \bar{\Omega}$. Z toho zřejmě podle (26) plyne, že

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \bigcup_{n=0}^{N} C_n\,,$$

a tedy

$$H(\Omega) = \bar{\Omega} - \Omega = \bigcup_{n=0}^{N} C_n\,,$$

jak jsme měli dokázat.

Definice. Buď $\mathfrak{M}$ jako ve větě 5, buď N stupeň $\mathfrak{M}$. Je-li $N = 0$, tj. $\mathfrak{M} = \{C_0\}$, nazveme každou z množin $\operatorname{Int} C_0$, $\operatorname{Ext} C_0$ *elementární oblastí určenou systémem* $\mathfrak{M}$. Je-li $N > 0$, nazveme *elementární oblastí určenou systémem* $\mathfrak{M}$ množinu (23)

[10]) Viz [1], str. 172.

(která – jak víme z pozn. 2 – nezávisí na bližší volbě base systému $\mathfrak{M}$, ale jen na systému $\mathfrak{M}$).

Stupněm (resp. *basí*) oblasti určené systémem $\mathfrak{M}$ budeme rozumět stupeň (resp. kteroukoliv basi) systému $\mathfrak{M}$.

Poznámka 3. Každá omezená elementární oblast má podle pozn. 2 zřejmě jen jednu basi.

Bylo by možné dokázat, že každá neomezená elementární oblast Ω stupně N má právě $N + 1$ basí – právě všechny topologické kružnice ze systému $\mathfrak{M}$, který oblast Ω určuje, jsou totiž basemi $\mathfrak{M}$ i Ω.

V dalším dokážeme, že komponentami množiny $\boldsymbol{S} - \langle\varphi\rangle$, kde φ je elementární křivka v $\boldsymbol{E}$, jsou elementární oblasti. Před tím však musíme zavést ještě některé další pojmy a dokázat několik netriviálních tvrzení.

3,2. Předpokládejme, že $\mathfrak{M} = \{C_n\}_{n=0}^N$ je elementární systém s basí C_0 a že

$$\Omega_0 = \operatorname{Int} C_0\,, \tag{27}$$

takže $\mathfrak{M}$ má jen jednu basi; užívejme označení z odst. 3,1. Pro každé $n = 0, \ldots, N$ existuje kladně orientovaná Jordanova křivka ω_n definovaná v $\langle\alpha_n, \beta_n\rangle$, pro niž je $\langle\omega_n\rangle = C_n$, $a_n = \text{p. b.}\ \omega_n$.

Položme

$$\mathfrak{S}_Q = \{\omega_n; \langle\omega_n\rangle \in \mathfrak{M}_Q\}\ (0 \leqq Q \leqq R)\,, \quad \mathfrak{S} = \bigcup_{Q=0}^{R} \mathfrak{S}_Q\,. \tag{28}$$

Jak ihned nahlédneme[11]), existuje pro každé $\omega_n \in \mathfrak{S}_Q$, kde $1 \leqq Q \leqq R$, právě jedno $\omega_m \in \mathfrak{S}$ tak, že $\text{p. b.}\ \omega_n \in (\omega_m)$; toto ω_m patří do $\mathfrak{S}_{Q-1}$. Platí-li pro ω_n, ω_m to, co jsme právě řekli, budeme psát $\omega_n \gg \omega_m$ (nebo $\omega_m \ll \omega_n$).

Jsou-li ω_m, ω_n dvě křivky z $\mathfrak{S}$, budeme psát $\omega_m < \omega_n$ (nebo $\omega_n > \omega_m$), právě když budou existovat indexy $m_0 = m, m_1, \ldots, m_k = n$ $(k > 0)$ tak, že bude

$$\omega_m = \omega_{m_0} \ll \omega_{m_1} \ll \ldots \ll \omega_{m_k} = \omega_n\,. \tag{29}$$

Je-li buď $\omega_m < \omega_n$ nebo $\omega_m = \omega_n$, budeme psát $\omega_m \leqq \omega_n$ (nebo $\omega_n \geqq \omega_m$).

Vztah $\omega_m \ll \omega_n$ určuje při daném ω_n křivku ω_m jednoznačně; je-li tedy $\omega_m < \omega_n$, jsou i indexy m_i v (29) určeny jednoznačně.

Je-li $\omega_m, \omega_n \in \mathfrak{S}_Q$ pro jisté $Q \geqq 1$, přičemž $a_m = a_n$, existuje r tak, že $\omega_r \ll \omega_m$, $\omega_r \ll \omega_n$: Zvolíme-li totiž r a s tak, že $\omega_r \ll \omega_m$, $\omega_s \ll \omega_n$, musí být $r = s$, neboť bod $a_m = a_n$ patří do (ω_r) i do (ω_s) a množiny $(\omega_0), (\omega_1), \ldots, (\omega_N)$ jsou disjunktní.

Pro každé $n = 1, \ldots, N$ existuje (jednoznačně určená) posloupnost $\omega_{n_0}, \omega_{n_1}, \ldots$

[11]) Viz vlastnosti II a III elementárního systému $\mathfrak{M}$.

$\ldots, \omega_{n_p}$ tak, že

$$\omega_n = \omega_{n_0} \gg \omega_{n_1} \gg \ldots \gg \omega_{n_p} = \omega_0 \; ; \tag{30}$$

přitom je $p > 0$. Z (30) plyne, že $\omega_n \in \mathfrak{S}_p$.

Ukažme, že platí:

Věta 6. *Nechť* $\mathfrak{M} = \{C_n\}_{n=0}^N$ *je elementární systém s basí* C_0; *užívejme dosavadního označení. Pak platí:*

1. *Je-li* $\omega_m < \omega_n$, *takže (zvolíme-li vhodně indexy* m_i*) platí* (29), *roztíná*[12]) *každý z bodů* $a_{m_i} = \mathrm{p.b.}\,\omega_{m_i}$, *kde* $i = 1, \ldots, k$, *množinu* $H(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{N} C_n$ *mezi kterýmikoliv body* $a \in (\omega_n)$, $b \in \langle\omega_m\rangle - \{a_{m_i}\}$.

2. *Je-li* $n \neq m$, $a_n = a_m$ *(takže* ω_n, ω_m *patří do téhož* $\mathfrak{S}_Q$*), roztíná bod* $a_n = a_m$ *množinu* $H(\Omega)$ *mezi kterýmikoliv body* $a \in (\omega_n)$, $b \in (\omega_m)$.

3. *Je-li* $a \neq a_n$ *pro* $n = 1, \ldots, N$, *neroztíná bod* a *množinu* $H(\Omega)$.

Důkaz. 1. Nechť platí (29), nechť $1 \leqq i \leqq k$ a nechť $a \in (\omega_n)$, $b \in \langle\omega_m\rangle - \{a_{m_i}\}$ jsou libovolné dva body. Položme

$$\mathscr{X} = \{j;\ \omega_j > \omega_{m_i}\}\,, \quad \mathscr{Y} = \{j;\ \text{není } \omega_j \geqq \omega_{m_i}\}\,, \tag{31}$$

$$X = \bigcup_{j \in \mathscr{X}} C_j \cup (\omega_{m_i})\,, \quad Y = \bigcup_{j \in \mathscr{Y}} C_j - \{a_{m_i}\}\,,$$

pak je zřejmě $\mathscr{X} \cup \mathscr{Y} = \{0, \ldots, N\}$, $X \cup Y = H(\Omega) - \{a_{m_i}\}$, $a \in X$, $b \in Y$. Zbývá ještě ukázat, že X, Y jsou oddělené. Protože je $\overline{X} = X \cup \{a_{m_i}\}$, $\overline{Y} = Y \cup \{a_{m_i}\}$ (a protože množiny X, Y neobsahují bod a_{m_i}), stačí dokázat, že X, Y jsou disjunktní.

Buď $j \in \mathscr{X}$; je-li $p \neq j$, $C_p \cap C_j \neq \emptyset$, je buď $\omega_p \gg \omega_j$ nebo $\omega_p \ll \omega_j$ nebo ω_p, ω_j patří do téhož $\mathfrak{S}_Q$ a je $a_p = a_j$. Protože $\omega_j > \omega_{m_i}$, je v prvním případě $\omega_p > \omega_{m_i}$, takže $p \notin \mathscr{Y}$; ve druhém případě plyne ze vztahů $\omega_j > \omega_{m_i}$, $\omega_j \gg \omega_p$ vztah $\omega_p \geqq \omega_{m_i}$, takže opět $p \notin \mathscr{Y}$; ve třetím případě existuje r tak, že $\omega_r \ll \omega_p$, $\omega_r \ll \omega_j$, z podmínek $\omega_j > \omega_{m_i}$, $\omega_j \gg \omega_r$ plyne, že $\omega_r \geqq \omega_{m_i}$, takže (vzhledem k tomu, že $\omega_p \gg \omega_r$) opět $\omega_p > \omega_{m_i}$ a $p \notin \mathscr{Y}$. Tím jsme dokázali, že

$$\bigcup_{j \in \mathscr{X}} C_j \cap \bigcup_{j \in \mathscr{Y}} C_j = \emptyset\,. \tag{32}$$

Množinu všech j, pro něž je $j \neq m_i$, $C_j \cap C_{m_i} \neq \emptyset$, můžeme rozdělit na dvě podmnožiny: Do první patří ta j, pro něž je $\omega_j \gg \omega_{m_i}$ (takže je $j \in \mathscr{X}$), do druhé patří m_{i-1} (přičemž $C_{m_i} \cap C_{m_{i-1}} = \{a_{m_i}\}$) a právě ta j, pro něž C_j leží v témže $\mathfrak{M}_Q$ jako C_{m_i} a pro něž je $a_j = a_{m_i}$. Z toho je patrné, že

$$(\omega_{m_i}) \cap \Big(\bigcup_{j \in \mathscr{Y}} C_j - \{a_{m_i}\}\Big) = \emptyset\,. \tag{33}$$

Z (32) a (33) ihned plyne, že $X \cap Y = \emptyset$.

---

[12]) Definici viz v [1], str. 108.

2. Nechť platí předpoklady 2. části věty 6. Položíme-li

$$\mathscr{X} = \{j;\, \omega_j > \omega_n\}\,, \quad \mathscr{Y} = \{j;\ \text{není } \omega_j \geqq \omega_n\}\,,$$

$$X = \bigcup_{j \in \mathscr{X}} C_j \cup (\omega_n)\,, \quad \mathscr{Y} = \bigcap_{j \in \mathscr{Y}} C_j - \{a_n\}\,,$$

je $a \in X$, $b \in Y$, $X \cup Y = H(\Omega) - \{a_n\}$, přičemž X, Y jsou oddělené množiny; důkaz je zcela analogický důkazu 1. části věty 6.

3. Nechť $a \neq a_n$ pro $n = 1, \ldots, N$; abychom dokázali, že bod a neroztíná $H(\Omega)$, stačí zřejmě dokázat, že zvolíme-li pevně bod $b \in C_0 - \{a, a_1, \ldots, a_N\}$, existuje pro každý bod $c \in H(\Omega) - \{a, b\}$ oblouk M s krajními body b, c obsažený v $H(\Omega) - \{a\}$.

Je-li $c \in C_0$, je to zřejmé; za M stačí vzít oblouk s krajními body b, c obsažený v C_0 a neobsahující bod a. Není-li $c \in C_0$, existuje (právě jedno) n tak, že $c \in (\omega_n)$. Nechť

$$\omega_n = \omega_{n_0} \gg \omega_{n_1} \gg \ldots \gg \omega_{n_p} = \omega_0\,;$$

jistě existují oblouky $M_j \subset C_{n_j} - \{a\}$ $(j = 0, \ldots, p)$ tak, že platí: M_0 má krajní body c, a_{n_0}, M_j $(j = 1, \ldots, p - 1)$ krajní body $a_{n_{j-1}}$, a_{n_j}, M_p krajní body a_{n_p}, b. Stačí položit $M = \bigcup_{j=0}^{p} M_j$.

Tím je věta 6 dokázána.

Poznámka 4. Buď Ω elementární oblast; pak existuje elementární systém $\mathfrak{M} = \{C_n\}_{n=0}^{N}$, který oblast Ω určuje. (Důkaz tvrzení, že takový systém $\mathfrak{M}$ existuje jen jeden, není zcela triviální; příslušné tvrzení však nebudeme nikde potřebovat.)

Je pak $H(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{N} C_n$ a podle toho, co jsme ukázali ve větě 6, je $\{a_1, \ldots, a_N\}$ množinou všech bodů, které roztínají $\bigcup_{n=0}^{N} C_n$, tj. $H(\Omega)$. Z této charakteristiky množiny $\{a_1, \ldots, a_N\}$ je patrná její nezávislost na volbě systému $\mathfrak{M}$ (a jeho base — to jsme však již konstatovali v pozn. 1). V dalším budeme množinu $\{a_1, \ldots, a_N\}$ značit $\mathbf{V}(\Omega)$.

Je zřejmé, že množina $\mathbf{V}(\Omega)$ obsahuje právě N bodů, je-li N stupeň oblasti Ω.

3,3. Následující čtyři věty jsou sice pomocné, ale mají v dalších úvahách základní úlohu.

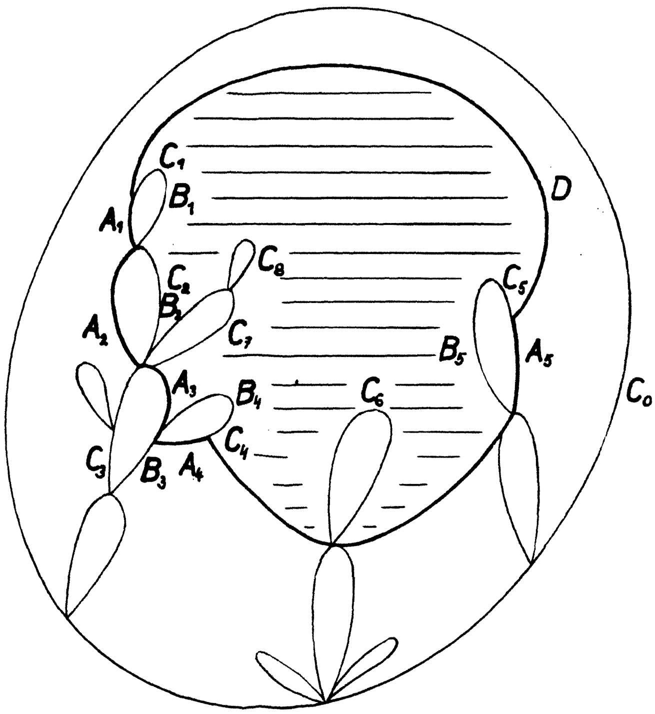
Věta 7. *Nechť* $\mathfrak{M} = \{C_n\}_{n=0}^{N}$ *je elementární systém s basí* C_0, *nechť* $\bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Int} C_0$, $\Omega = \operatorname{Int} C_0 - \bigcup_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{Int} C_n}$; *užívejme označení z odst.* 3,1 *a* 3,2.

Nechť $D \subset \bar{\Omega}$ *je topologická kružnice, která není rovna žádnému* C_n *z* $\mathfrak{M}$.[13])

[13]) Protože žádná topologická kružnice neobsahuje jinou topologickou kružnici jako pravou část, není ovšem také $C_n \subset D$ pro žádné n.

Nechť platí:

(34) *Jsou-li $a \in D \cap C_i$, $b \in D \cap C_j$ dva různé body a je-li $\omega_i \leqq \omega_j$, tedy $\omega_i = \omega_{i_0} \lessdot \omega_{i_1} \lessdot \ldots \lessdot \omega_{i_k} = \omega_j$ pro vhodné $k \geqq 0$ a vhodné indexy i_m $(0 \leqq m \leqq k)$, existuje oblouk $Z \subset D \cap \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m}$ s krajními body a, b.*



Obr. 2. K situaci z věty 7. ($\mathfrak{B} = \{C_1, \ldots, C_5\}$, $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \{C_6, \ldots, C_8\}$, vyčárkovaná oblast je Ω_1, $\mathfrak{N}_0 = \{D_0\}$, $\mathfrak{N}_1 = \{C_6, C_7\}$, $\mathfrak{N}_2 = \{C_8\}$.)

Označme

(35) $$\mathfrak{A} = \{C_n \in \mathfrak{M};\ \text{Int}\, C_n \subset \text{Int}\, D\}\,,$$

(36) $$\mathfrak{B} = \{C_n \in \mathfrak{A};\ C_n \cap D \textit{ je oblouk}\}\,,$$

(37) $$A_n = C_n \cap D\,, \quad \textit{je-li} \quad C_n \in \mathfrak{B}\,,$$

a nechť

(38) *B_n je oblouk komplementární k A_n v C_n.*

Pak je

$$D_0 = (D - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} \tilde{A}_n) \cup \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} \tilde{B}_n = (D - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} A_n) \cup \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} B_n \tag{39}$$

topologická kružnice, pro niž je

$$\operatorname{Int} D_0 = \operatorname{Int} D - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} \overline{\operatorname{Int} C_n}\,; \tag{40}$$

$$\mathfrak{N} = \{D_0\} \cup (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \tag{41}$$

je elementární systém s basí D_0, který určuje elementární oblast

$$\Omega_1 = \operatorname{Int} D_0 - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}} \overline{\operatorname{Int} C_n} = \operatorname{Int} D - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A}} \overline{\operatorname{Int} C_n} \tag{42}$$

s hranicí

$$H(\Omega_1) = D_0 \cup \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}} C_n\,. \tag{43}$$

Důkaz. 1. Poznamenejme především, že pro každé n $(0 \leqq n \leqq N)$ je průnik $C_n \cap D$ souvislý. Je-li totiž $a, b \in C_n \cap D$, $a \neq b$, existuje podle (34) oblouk $Z \subset C_n \cap D$ s krajními body a, b. Protože rovnost $C_n \cap D = C_n$ je vyloučena, je tedy $C_n \cap D$ buď prázdná nebo jednobodová množina nebo oblouk.

Poznamenejme dále, že vzhledem k souvislosti množin $\operatorname{Int} C_n$ a vztahům $D \subset \bar{\Omega}$, $\operatorname{Int} C_n \subset \mathbf{S} - \bar{\Omega}$ pro $m = 1, \ldots, N$ je pro každé $n = 1, \ldots, N$ buď $\operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Int} D$ nebo $\operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Ext} D$. Protože $D \subset \overline{\operatorname{Int} C_0}$, $D \neq C_0$, je $\operatorname{Int} D \subsetneqq \operatorname{Int} C_0$.

2. Dokažme, že platí:

$$C_n \in \mathfrak{A}\,, \; C_n \cap D \neq \emptyset \Rightarrow a_n \; (= \text{p}\,.\,\text{b}\,.\,\omega_n) \in D\,. \tag{44}$$

Předpokládejme, že $C_n \in \mathfrak{A}$, že existuje bod $a \in C_n \cap D$, ale že $a_n \notin D$. Protože $C_n \subset \overline{\operatorname{Int} C_n} \subset \overline{\operatorname{Int} D} = \operatorname{Int} D \cup D$, je tedy $a_n \in \operatorname{Int} D$. Nechť

$$\omega_n = \omega_{n_0} \gg \omega_{n_1} \gg \ldots \gg \omega_{n_p} = \omega_0\,; \tag{45}$$

množina $\bigcup_{i=1}^{p} C_{n_i}$ je souvislá a obsahuje bod $a_n \in \operatorname{Int} D$. Protože obsahuje i body z $\operatorname{Ext} D$ (je $C_0 \cap \operatorname{Ext} D \neq \emptyset$), existuje jistě bod $b \in \bigcup_{i=1}^{p} C_{n_i} \cap D$. Bod b je různý od bodu a (který leží v (ω_{n_0})), takže podle (34) existuje oblouk $Z \subset D \cap \bigcup_{i=0}^{p} C_{n_i}$ s krajními body a, b. Protože bod a_n podle věty 6 roztíná množinu $H(\Omega)$ mezi body a, b, je nutně $a_n \in Z$, což je spor, neboť $a_n \in \operatorname{Int} D$, $Z \subset D$. Tím je (44) dokázáno.

3. Nechť $m \neq n$, $C_n \in \mathfrak{A}$, $C_m \in \mathfrak{B}$. Předpokládejme, že existuje bod $a \in C_n \cap \tilde{A}_m$; protože B_m je oblouk mající oba krajní body na D, přičemž $\tilde{B}_m \subset \operatorname{Int} D$ [14]), je

$$\operatorname{Int} D - \tilde{B}_m = \operatorname{Int} C_n \cup \operatorname{Int} D^*\,,$$

[14]) Je $\operatorname{Int} C_m \subset \operatorname{Int} D$, tedy $\overline{\operatorname{Int} C_m} \subset \operatorname{Int} D \cup D$; protože $\tilde{B}_m = C_m - A_m = C_m - D$, je $\tilde{B}_m \subset \operatorname{Int} D$.

kde množiny vpravo jsou disjunktní a kde

$$D^* = (D - \tilde{A}_m) \cup \tilde{B}_m \,.^{15})$$

Bod a nepatří do $\overline{\text{Int } D^*}$, takže pro všechna dost malá jeho okolí $U(a)$ je

$$U(a) \cap \text{Int } D = U(a) \cap \text{Int } C_m \,.$$

Je však $a \in C_n = H(\text{Int } C_n)$, takže pro všechna dost malá $U(a)$ je

$$\emptyset \neq U(a) \cap \text{Int } C_n \subset U(a) \cap \text{Int } D = U(a) \cap \text{Int } C_m \,.$$

Z toho plyne, že $\text{Int } C_n \cap \text{Int } C_m \neq \emptyset$, což je spor.

Platí tedy:

(46) $$C_n \in \mathfrak{A} \,, \; C_m \in \mathfrak{B} \,, \; m \neq n \Rightarrow C_n \cap \tilde{A}_m = \emptyset \,.$$

Je-li $m \neq n$, $C_n \in \mathfrak{A}$, $C_m \in \mathfrak{B}$, $C_n \cap D \neq \emptyset$, je buď $C_n \cap C_m = \emptyset$, načež ovšem tím spíše $C_n \cap \tilde{B}_m = \emptyset$, nebo je $C_n \cap C_m \neq \emptyset$; pak je $C_n \cap C_m$ jednobodová množina, která se rovná buď $\{a_n\}$ nebo $\{a_m\}$. Protože jak a_n tak a_m leží podle (44) v D a protože $\tilde{B}_m \subset \text{Int } D$, je i nyní $C_n \cap \tilde{B}_m = \emptyset$. Tedy:

(47) $$C_n \in \mathfrak{A} \,, \; C_m \in \mathfrak{B} \,, \; m \neq n \,, \; C_n \cap D \neq \emptyset \Rightarrow C_n \cap \tilde{B}_m = \emptyset \,.$$

4. Je-li $\mathfrak{B} = \emptyset$, je ovšem $D_0 = D$; dokážeme, že D_0 je topologickou kružnicí i v případě, že $\mathfrak{B} \neq \emptyset$: Buď $C_{i_1}, \ldots, C_{i_q}$ prostá posloupnost obsahující právě všechny prvky množiny $\mathfrak{B}$. Podle již citované věty o „θ-křivkách" (viz pozn. [15]) pod čarou) je

(48) $\text{Int } D - \tilde{B}_{i_1} = \text{Int } C_{i_1} \cup \text{Int } D_{q-1}$, kde vpravo jsou disjunktní Jordanovy oblasti

a kde

(49) $$D_{q-1} = (D - \tilde{A}_{i_1}) \cup \tilde{B}_{i_1} \,.$$

Množina $\tilde{B}_{i_2}$ je podle (47) disjunktní s C_{i_1}, tedy i s $\overline{\text{Int } C_{i_1}}$, a je obsažena v $\text{Int } D$. Ze (48) plyne, že tedy je $\tilde{B}_{i_2} \subset \text{Int } D_{q-1}$; přitom krajní body oblouku B_{i_2} leží v $A_{i_2} \subset D - \tilde{A}_{i_1} \subset D_{q-1}$ (sr. s (46)). Je tedy dále:

(50) $\text{Int } D_{q-1} - \tilde{B}_{i_2} = \text{Int } C_{i_2} \cup \text{Int } D_{q-2}$, kde vpravo jsou disjunktní Jordanovy oblasti

a kde

(51) $$D_{q-2} = (D_{q-1} - \tilde{A}_{i_2}) \cup \tilde{B}_{i_2} = (D - \bigcup_{m=1}^{2} \tilde{A}_{i_m}) \cup \bigcup_{m=1}^{2} \tilde{B}_{i_m} \,.$$

[15]) Aplikujeme známou větu o „θ-křivkách" — viz [1], str. 184 (důsledek 2 věty 113).

Ze (48) a (50) vyplývá, že

(52) $\operatorname{Int} D - \bigcup_{m=1}^{2} \tilde{B}_{i_m} = \bigcup_{m=1}^{2} \operatorname{Int} C_{i_m} \cup \operatorname{Int} D_{q-2}$, kde sjednocení vpravo je disjunktní.

Po celkem q krocích dojdeme k tomu, že

(53) $\operatorname{Int} D - \bigcup_{m=1}^{q} \tilde{B}_{i_m} = \bigcup_{m=1}^{q} \operatorname{Int} C_{i_m} \cup \operatorname{Int} D_0$, kde sjednocení vpravo je disjunktní

a kde

$$D_0 = (D - \bigcup_{m=1}^{q} \tilde{A}_{i_m}) \cup \bigcup_{m=1}^{q} \tilde{B}_{i_m} \tag{54}$$

je topologická kružnice. Z (53) plyne ihned (40).

5. Dokažme, že platí:

$$C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,,\; C_n \cap D_0 \neq \emptyset \Rightarrow C_n \cap D_0 = \{a_n\}\,. \tag{55}$$

Pro $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ není $C_n \cap D$ oblouk, takže pokud je $C_n \cap D \neq \emptyset$, je (podle (44)) $C_n \cap D = \{a_n\}$. Z toho plyne, že (pro každé $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$) je $(\omega_n) \subset \operatorname{Int} D$.

Kdyby bylo $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, $C_{i_m} \in \mathfrak{B}$, $(\omega_n) \cap C_{i_m} \neq \emptyset$, bylo by (vzhledem k disjunktnosti množin $(\omega_1), \ldots, (\omega_N)$) nutně $a_{i_m} \in (\omega_n)$, což není možné, neboť $(\omega_n) \subset \operatorname{Int} D$ a $a_{i_m} \in D$ podle (44). Tedy:

$$C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \Rightarrow (\omega_n) \cap \bigcup_{m=1}^{q} C_{i_m} = \emptyset\,. \tag{56}$$

Protože ovšem $(\omega_n) \cap \bigcup_{m=1}^{q} \operatorname{Int} C_{i_m} = \emptyset$, je

$$(\omega_n) \subset \operatorname{Int} D - \bigcup_{m=1}^{q} \overline{\operatorname{Int} C_{i_m}} = \operatorname{Int} D_0\,.$$

Je-li tedy $C_n \cap D_0 \neq \emptyset$, je skutečně $C_n \cap D_0 = \{a_n\}$.

Dokažme dále, že platí:

$$C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,,\; C_n \cap D_0 \neq \emptyset\,,\; \omega_m > \omega_n \Rightarrow \overline{\operatorname{Int} C_m} \subset \operatorname{Int} D_0\,. \tag{57}$$

Nechť

$$\omega_m = \omega_{m_s} \gg \omega_{m_{s-1}} \gg \ldots \gg \omega_{m_0} = \omega_n\,; \tag{58}$$

tvrdíme především, že všechna C_{m_i} patří do $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, existovalo by nejmenší j tak, že $C_{m_j} \notin \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$; protože $C_{m_0} \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, je $j > 0$, a $C_{m_{j-1}} \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ podle definice čísla j. Podle (56) (kde místo n píšeme m_{j-1}) není $C_{m_j} \in \mathfrak{B}$, neboť $C_{m_{j-1}} \cap C_{m_j} \neq \emptyset$. Z podmínky $C_{m_j} \notin \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, $C_{m_j} \notin \mathfrak{B}$ plyne, že $C_{m_j} \notin \mathfrak{A}$, tedy $\operatorname{Int} C_{m_j} \not\subset \operatorname{Int} D$. Protože $\operatorname{Int} C_{m_{j-1}} \subset \operatorname{Int} D$, $C_{m_{j-1}} \cap C_{m_j} \neq \emptyset$, je nutně $a_{m_j} \in D$. Z podmínky (34) pak plyne, že existuje oblouk Z s krajními body a_n, a_{m_j}, obsažený v $D \cap \bigcup_{i=0}^{j-1} C^{\cdot}_{m_i}$. Vzhledem k větě 6 by pak bylo $a_{m_1} \in Z \subset D$, což je ve sporu s tím, že $a_{m_1} \in (\omega_m) \subset \text{Int } D$.

Tím je dokázáno, že $C_{m_i} \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ pro $i = 0, \ldots, s$. Předpokládejme, že $\bigcup_{i=1}^{s} C_{m_i} \cap \cap D_0 \neq \emptyset$; pak existuje nejmenší kladné j tak, že $C_{m_j} \cap D_0 \neq \emptyset$, načež podle (55) $a_{m_j} \in D_0$. Podle definice j a vzhledem k tomu, že $(\omega_n) \subset \text{Int } D_0$, by zároveň bylo $a_{m_j} \in (\omega_{m_{j-1}}) \subset \text{Int } D_0$, což je spor.

Je tedy $\bigcup_{i=1}^{s} C_{m_i} \cap D_0 = \emptyset$. Protože souvislá množina $(\omega_{m_0}) \cup \bigcup_{i=1}^{s} C_{m_i}$, disjunktní s D_0, protíná Int D_0, je $\bigcup_{i=1}^{s} C_{m_i} \subset \text{Int } D_0$, takže i $\bigcup_{i=1}^{s} \overline{\text{Int } C_{m_i}} \subset \text{Int } D_0$; speciálně ovšem $\overline{\text{Int } C_m} = \overline{\text{Int } C_{m_s}} \subset \text{Int } D_0$.

Poznamenejme konečně, že platí:

$$1 \leqq n \leqq N \Rightarrow \text{ buď Int } C_n \subset \text{Int } D_0 \text{ nebo Int } C_n \subset \text{Ext } D_0 \,.$$

Pro každé $n = 1, \ldots, N$ je totiž buď Int $C_n \subset$ Ext D, načež také Int $C_n \subset$ Ext D_0, nebo Int $C_n \subset$ Int D, načež buď $C_n \in \mathfrak{B}$ a Int $C_n \subset$ Ext D_0, nebo $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ a Int $C_n \subset$ Int D_0.

6. Nechť $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ a

$$\omega_n = \omega_{n_0} \gg \omega_{n_1} \gg \ldots \gg \omega_{n_p} = \omega_0 \,; \tag{59}$$

protože $C_0 = C_{n_p} \notin \mathfrak{A}$, existuje nejmenší j tak, že $C_{n_j} \notin \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. Ukažme, že

$$a_{n_{j-1}} \in D_0 \,. \tag{60}$$

Je-li $j = p$, je $a_{n_{j-1}} \in C_0 \subset \overline{\text{Ext } D_0}$; z podmínky $C_{n_{j-1}} \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ plyne, že $C_{n_{p-1}} \subset \subset \overline{\text{Int } D_0}$. Z toho plyne (60). Nechť $j < p$ a předpokládejme, že $C_{n_{j-1}} \subset \text{Int } D_0$; protože $a_{n_{j-1}} \in (\omega_{n_j})$, plynulo by z toho, že Int $\omega_{n_j} \cap$ Int $D_0 \neq \emptyset$, tedy – vzhledem k tomu, že $n_j > 0$ – Int $\omega_{n_j} \subset$ Int D_0, což odporuje tomu, že $C_{n_j} \notin \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. Není tedy $C_{n_{j-1}} \subset \text{Int } D_0$, tj. je $C_{n_{j-1}} \cap D_0 \neq \emptyset$; podle (55) platí pak (60).

Jestliže každému n, pro něž je $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ (a pro něž platí (59)) přiřadíme nejmenší index $j = j(n)$, pro který je $C_{n_{j(n)}} \notin \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, je patrné, že je vždy $j(n) \geqq 1$. Dále platí:

$$C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \,, \; \omega_m \gg \omega_n \Rightarrow C_m \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \,, \; j(m) = j(n) + 1 \,. \tag{61}$$

Abychom to nahlédli, poznamenejme především, že když $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ a $\omega_m \gg \omega_n$, je $\omega_m > \omega_{j(n)-1}$, přičemž $C_{j(n)-1} \cap D_0 \neq \emptyset$, takže $C_m \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ podle (57). Protože

$$\omega_m \gg \omega_n = \omega_{n_0} \gg \omega_{n_1} \gg \ldots \gg \omega_{j(n)} \gg \ldots \gg \omega_{n_p} = \omega_0 \,,$$

je z definice indexů $j(n)$ a $j(m)$ ihned patrné, že $j(m) = j(n) + 1$.

7. Ukažme nyní, že systém $\mathfrak{N}$ definovaný rovností (40) je elementárním systémem. Definujme:

$$\mathfrak{N}_0 = \{D_0\}\,, \quad \mathfrak{N}_i = \{C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B};\ j(n) = i\} \quad \text{pro} \quad i \geqq 1\,.$$

Buď ještě q maximem všech i, pro něž je $\mathfrak{N}_i \neq \emptyset$. Je patrné, že

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \cup \mathfrak{N}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{N}_q\,,$$

kde množiny vpravo jsou disjunktní. Ověřme ostatní vlastnosti, kterými je charakterisován elementární systém:

I. Je zřejmé, že $\mathfrak{N}_0 = \{D_0\}$, $\mathfrak{N}_q \neq \emptyset$.

II. Zvolme $d_0 \in D - \{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$ libovolně. Je-li $C_n \in \mathfrak{N}$, $C_n \cap D_0 \neq \emptyset$, je $j(n) = 1$, takže $C_n \in \mathfrak{N}_1$, a podle (55) zároveň $C_n \cap D_0 = \{a_n\} \neq \{d_0\}$.

Nechť za druhé $C_n \in \mathfrak{N}_{i_1}$, $C_m \in \mathfrak{N}_{i_2}$, $n \neq m$, $i_1 \geqq 1$, $i_2 \geqq 1$, $C_n \cap C_m \neq \emptyset$. Z vlastností systému $\mathfrak{M}$ pak plyne, že buď $\omega_n \lessdot \omega_m$ nebo $\omega_m \lessdot \omega_n$ nebo $\omega_m, \omega_n \in \mathfrak{S}_Q$ pro vhodné Q. V prvním případě je $C_n \cap C_m = \{a_m\} \neq \{a_n\}$ a podle (61) zároveň $i_2 = i_1 + 1$; případ $\omega_m \lessdot \omega_n$ vznikne jen záměnou m a n z případu předešlého. Ve třetím případě je $a_m = a_n$ a $Q \geqq 1$, takže existuje r tak, že $\omega_r \lessdot \omega_m$, $\omega_r \lessdot \omega_n$. Jsou dvě možnosti: 1. $C_r \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, 2. $C_r \notin \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. Je-li $C_r \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, je $C_r \in \mathfrak{N}_i$ pro vhodné $i \geqq 1$, načež podle (61) patří C_m i C_n do $\mathfrak{N}_{i+1}$. Není-li $C_r \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, je $a_m = a_n \in D_0$ [16]), takže C_m i C_n patří do $\mathfrak{N}_1$.

III. Je-li $C_n \in \mathfrak{N}_1$, je $C_n \cap D_0 \neq \emptyset$. Je-li $C_n \in \mathfrak{N}_i$, kde $i > 1$, je $C_n \in \mathfrak{M}_Q$ pro vhodné $Q \geqq 1$ a existuje právě jedno $C_m \in \mathfrak{M}_{Q-1}$ tak, že $C_n \cap C_m \neq \emptyset$. Podle definice vztahu $\lessdot$ je $\omega_m \lessdot \omega_n$. Protože $j(n) > 1$, je – jak snadno nahlédneme – $C_m \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, načež podle (61) je $C_m \in \mathfrak{N}_{i-1}$.

IV. Je-li $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, je buď $C_n \cap D_0 \neq \emptyset$, načež $C_n \in \mathfrak{N}_1$ a podle (55) $C_n \cap D_0 = \{a_n\}$, takže $\overline{\operatorname{Int} C_n} - \{a_n\} \subset \operatorname{Int} D_0$, nebo je $C_n \cap D_0 = \emptyset$, načež $C_n \in \mathfrak{N}_i$ pro jisté $i > 1$ a $\overline{\operatorname{Int} C_n} \subset \operatorname{Int} D_0$. Je tedy

$$\bigcup_{C_n \in \mathfrak{N}_1} (\overline{\operatorname{Int} C_n} - \{a_n\}) \cup \bigcup_{i=2}^{q} \bigcup_{C_n \in \mathfrak{N}_i} \overline{\operatorname{Int} C_n} \subset \operatorname{Int} D_0\,.$$

Tím je dokázáno, že $\mathfrak{N}$ je elementární systém; je přitom zřejmé, že D_0 je jeho basí a že $\mathfrak{N}$ určuje elementární oblast (42), která má hranici (43).

Věta 7 je dokázána.

Následující věta ukazuje, kdy je na příklad splněna podmínka (34) z věty 7.

Věta 8. *Nechť $\mathfrak{M}$ je elementární systém jako ve větě 7; D nechť je topologická kružnice obsažená v $\bar{\Omega}$, pro niž je $D \cap H(\Omega)$ oblouk. Pak je splněna podmínka* (34) *z věty 7.*

---

[16]) $\overline{\operatorname{Int} C_m} \subset \overline{\operatorname{Int} D_0}$, $C_r \subset \overline{\operatorname{Ext} D_0}$, $a_m \in \overline{\operatorname{Int} C_m} \cap C_r \subset D_0$.

Důkaz. 1. Předpokládáme jinými slovy, že existuje prostá křivka λ, definovaná např. v $\langle 0,1 \rangle$, pro niž je $\langle \lambda \rangle = D \cap H(\Omega)$. Ukažme především, že platí:

(62) Jsou-li a, b dva různé body z $\langle \lambda \rangle$ patřící do jistého C_p, existuje interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0, 1 \rangle$ tak, že oblouk $\lambda(\langle \alpha, \beta \rangle)$ je částí C_p a body a, b jsou jeho krajními body.

Buďte splněny předpoklady tvrzení (62); pak existují $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že $\lambda(\alpha) = a$, $\lambda(\beta) = b$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha < \beta$; chceme dokázat, že $\lambda(\langle \alpha, \beta \rangle) \subset C_p$. Označme

$$X = \{t \in \langle \alpha, \beta \rangle;\ \lambda(t) \notin C_p\}\ ; \tag{63}$$

ukažme, že X je uzavřená množina. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by konvergentní posloupnost bodů $t_k \in X$, pro niž $t_0 = \lim t_k \notin X$. Body $\lambda(t_k)$ nepatří do C_p; protože množin C_n je jen konečný počet, musí existovat $q(\neq p)$ tak, že $t_k \in C_q$ pro nekonečně mnoho indexů k. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $t_k \in C_q$ pro všechna k. Dále: $t_k \in X$, $t_0 = \lim t_k \notin X$; z toho plyne, že z posloupnosti $\{t_k\}$ lze vybrat posloupnost ryze monotonní. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že již $\{t_k\}$ je ryze monotonní, např. rostoucí (pro klesající posloupnost jsou další úvahy analogické).

Předpokládáme tedy celkem, že $\{t_k\}$ je rostoucí posloupnost bodů z X, pro niž je $t_0 = \lim t_k \notin X$, $\lambda(t_k) \in C_q$ (pro všechna k), $\lambda(t_0) \in C_p$. Označíme-li $\{c\} = C_p \cap C_q$, je zřejmě $\lambda(t_0) = c$.

Kdyby bylo $c = a$, bylo by $\lambda(\alpha) = a = c = \lambda(t_0)$, což je spor, neboť λ je prosté zobrazení a $\alpha \neq t_0$.

Je tedy $c \neq a$, takže $\lambda(\alpha) = a \in C_p - \{c\}$, $\lambda(t_1) \in C_q - \{c\}$. Protože C_p, C_q mají společný (právě jeden) bod, je buď $\omega_p \gg \omega_q$ nebo $\omega_p \ll \omega_q$ nebo ω_p, ω_q leží v témže $\mathfrak{S}_Q$. Bod c roztíná podle věty 6 ve všech případech $H(\Omega)$ mezi $\lambda(\alpha)$ a $\lambda(t_1)$. Z toho plyne, že v $\langle \alpha, t_1 \rangle$ musí existovat bod t^*, pro který je $\lambda(t^*) = c$; to však je opět spor, neboť vzhledem k tomu, že $t^* < t_0$, nemůže být $\lambda(t^*) = \lambda(t_0)$.

Tím je uzavřenost množiny X dokázána; je zřejmé, že X je otevřená v $\langle \alpha, \beta \rangle$. Kdyby byla neprázdná, byl by $X \cup (\langle \alpha, \beta \rangle - X)$ rozklad intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ na dvě neprázdné množiny, které jsou obě uzavřené i otevřené v $\langle \alpha, \beta \rangle$; to však není možné, neboť $\langle \alpha, \beta \rangle$ je souvislá množina. Je tedy $X = \emptyset$, takže skutečně $\lambda(\langle \alpha, \beta \rangle) \subset C_p$.

2. Nechť $a \in \langle \lambda \rangle \cap C_i$, $b \in \langle \lambda \rangle \cap C_j$, $a \neq b$, $\omega_i \leqq \omega_j$, takže

$$\omega_i = \omega_{i_0} \ll \omega_{i_1} \ll \ldots \ll \omega_{i_k} = \omega_j\ ,$$

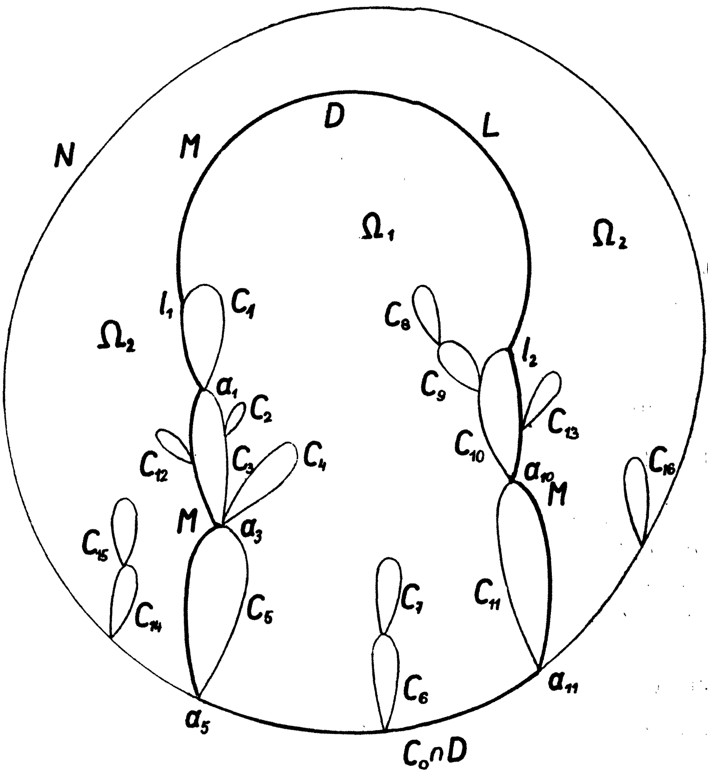
kde $k \geqq 0$ a kde i_m jsou vhodné indexy. Máme ukázat, že existuje oblouk $Z \subset \subset \langle \lambda \rangle \cap \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m}$ mající krajní body a, b.

Rozeznávejme dva případy: 1) lze volit $k = 0$, tj. a, b patří do C_i; 2) nelze volit $k = 0$, tj. a, b patří do dvou různých topologických kružnic z $\mathfrak{M}$.

Ad 1): Podle (62) ihned dostáváme existenci hledaného oblouku Z.

Ad 2): Můžeme předpokládat, že $a \in C_{i_0} - \{a_{i_1}\}$, neboť jinak místo C_i můžeme mluvit o C_{i_1}; podobně lze předpokládat, že $b \in (\omega_{i_k})$. Protože pak podle věty 6 roztíná každý z bodů $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ množinu $H(\Omega)$ mezi body a, b, musí být $a_{i_m} \in \langle \lambda \rangle$ pro každé $m = 1, \ldots, k$.

Podle (62) existuje oblouk $Z_0 \subset \langle \lambda \rangle \cap C_{i_0}$ s krajními body a, a_1, oblouky Z_m ($m = 1, \ldots, k - 1$) obsažené v $\langle \lambda \rangle \cap C_{i_m}$ s krajními body $a_{i_m}, a_{i_{m+1}}$ a oblouk $Z_m \subset \langle \lambda \rangle \cap C_{i_k}$ s krajními body a_{i_k}, b; $Z = Z_0 \cup \ldots \cup Z_m$ je hledaný oblouk.



Obr. 3. K situaci z věty 9. ($\mathfrak{A}_1 = \{C_1, \ldots, C_{11}\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{C_{12}, \ldots, C_{16}\}$, $\mathfrak{B}_1 = \{C_1, C_3, C_5, C_{10}, C_{11}\}$, L má krajní body l_1, l_2, M, N a $C_0 \cap D$ mají krajní body a_5, a_{11}, $K = \{a_1, a_3, a_5, a_{10}, a_{11}\}$.)

3,4. Věta 9. *Nechť $\mathfrak{M}$ je elementární systém jako ve větě 7; nechť $D \subset \bar{\Omega}$ je topologická kružnice, pro niž je jak $H(\Omega) \cap D$, tak $C_0 \cap D$ oblouk. Dále předpokládejme, že platí:*

(64) $$C_n \cap D \text{ je oblouk}, \ n > 0 \Rightarrow \operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Int} D\,.$$ [17])

[17]) Věta 9 platí i bez předpokladu (64). Bez něj ji však nebudeme potřebovat a při jeho platnosti se situace poněkud zjednoduší. Bude také podobnější situaci z věty 10, která je značně jednodušší s předpokladem (64) než bez něho.

Označme L oblouk komplementární k $H(\Omega) \cap D$ v D.
Pak je

$$\Omega - D = \Omega - L = \Omega_1 \cup \Omega_2 , \tag{65}$$

kde Ω_1, Ω_2 jsou disjunktní elementární oblasti, pro něž je

$$H(\Omega_1) \cup H(\Omega_2) = H(\Omega) \cup L, \tag{66}$$

$$H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2) = L \cup K , \tag{67}$$

kde

$$K \subset \mathbf{V}(\Omega) \tag{68}$$

je jistá (konečná) množina.

Důkaz. Označme M resp. N oblouk komplementární k $C_0 \cap D$ v D resp. v C_0 a buď ještě $D_1 = D$, $D_2 = M \cup N$; pak je D_2 topologická kružnice. Je zřejmé (viz větu 8), že na $\mathfrak{M}$ a D_1 můžeme aplikovat větu 7; dokažme totéž o $\mathfrak{M}$ a D_2:

Nechť $a \in D_2 \cap C_i$, $b \in D_2 \cap C_j$ jsou dva různé body, přičemž

$$\omega_j = \omega_{j_s} \gg \omega_{j_{s-1}} \gg \ldots \gg \omega_{j_0} = \omega_i \tag{69}$$

pro vhodné $s \geqq 0$ a vhodné indexy j_m. Máme dokázat existenci oblouku $Z \subset D_2 \cap \cap \bigcup_{m=0}^{s} C_{j_m}$ s krajními body a, b.

Rozeznávejme tyto tři případy: a) $i > 0$, b) $j = 0$, c) $j > i = 0$.

Ad a): Je $a \in M \cap C_i$, $b \in M \cap C_j$, takže vzhledem k tomu, co jsme předpokládali o D a vzhledem k větě 8 oblouk Z s žádanými vlastnostmi existuje.

Ad b): Je a, $b \in N$ a protože N je oblouk, oblouk $Z \subset N$ s krajními body a, b opět existuje.

Ad c): Podle toho, co jsme již dokázali pro případ a), existuje oblouk $Z_1 \subset D_2 \cap \cap \bigcup_{m=1}^{s} C_{j_m}$ s krajními body a_{j_1}, b. Kdyby a_{j_1} nebyl krajním bodem oblouku $C_0 \cap D$, bylo by $C_0 \cap D = K_1 \cup K_2$, kde K_1, K_2 jsou dva oblouky mající společný jen svůj krajní bod a_{j_1}. Potom by však byly K_1, K_2, Z_1 tři oblouky, které mají společný jen svůj krajní bod a_{j_1} a které jsou obsaženy v topologické kružnici D, což je nemožné.[18]) Je tedy a_{j_1} skutečně krajním bodem oblouku $C_0 \cap D$, tedy i krajním bodem oblouku N. Je-li $a = a_{j_1}$, je Z_1 hledaným obloukem Z; je-li $a \neq a_{j_1}$, existuje oblouk $Z_2 \subset N$ s krajními body a, a_{j_1}, a hledaným obloukem je $Z = Z_1 \cup Z_2$.

Aplikujme větu 7: Označme pro $k = 1, 2$

$$\mathfrak{A}_k = \{C_n \in \mathfrak{M};\ \text{Int}\ C_n \subset \text{Int}\ D_k\} , \tag{70}$$

$$\mathfrak{B}_k = \{C_n \in \mathfrak{A}_k;\ C_n \cap D_k \text{ je oblouk}\} , \tag{71}$$

[18]) Sr. s pozn. 2 na str. 175 v [1].

a buď dále

$$(72) \qquad A_n = C_n \cap D_1 \,, \text{ je-li } C_n \in \mathfrak{B}_1 \,;$$

nechť

$$(73) \qquad B_n \text{ je oblouk komplementární k } A_n \text{ v } C_n \,.$$

Vzhledem k podmínce (64) je $\mathfrak{B}_2 = \emptyset$; podle věty 7 je

$$(74) \qquad D_1^* = \bigl(D_1 - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}_1} \tilde{A}_n\bigr) \cup \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}_1} \tilde{B}_n$$

topologická kružnice, pro niž je

$$(75) \qquad \operatorname{Int} D_1^* = \operatorname{Int} D_1 - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}_1} \overline{\operatorname{Int} C_n} \,.$$

Dále:

$$(76) \qquad \mathfrak{N}_1 = \{D_1^*\} \cup (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1) \,, \quad \mathfrak{N}_2 = \{D_2\} \cup \mathfrak{A}_2$$

jsou elementárními systémy s basemi D_1^*, D_2, které určují elementární oblasti

$$(77) \qquad \Omega_k = \operatorname{Int} D_k - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A}_k} \overline{\operatorname{Int} C_n} \quad (k = 1, 2)$$

s hranicemi

$$(78) \qquad H(\Omega_1) = D_1^* \cup \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1} C_n \,, \quad H(\Omega_2) = D_2 \cup \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A}_2} C_n \,.$$

Podle již citované věty o „θ-křivkách“ je

$$(79) \qquad \operatorname{Int} C_0 - M = \operatorname{Int} D_1 \cup \operatorname{Int} D_2 \,,$$

kde oblasti vpravo jsou disjunktní; tím spíše jsou disjunktní i oblasti Ω_1, Ω_2. Vzhledem k (79) a proto, že $D \subset \bar{\Omega}$, je pro každé $n > 0$ buď $\operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Int} D_1$ nebo $\operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Int} D_2$, takže $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{M} - \{C_0\} = \{C_n\}_{n=1}^N$. Z toho, ze (77) a (79) plyne, že

$$(80) \qquad \Omega - D = \Omega - M = (\operatorname{Int} C_0 - M) - \bigcup_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{Int} C_n} =$$
$$= \bigl(\operatorname{Int} D_1 - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A}_1} \overline{\operatorname{Int} C_n}\bigr) \cup \bigl(\operatorname{Int} D_2 - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A}_2} \overline{\operatorname{Int} C_n}\bigr) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \,;$$

protože $D = (D \cap H(\Omega)) \cup L$, je $\Omega - D = \Omega - L$.

Podle (78) a (74) je zřejmě $H(\Omega_1) \cup H(\Omega_2) \subset H(\Omega) \cup L$. Obrácenou inklusi dokážeme takto: L je částí D_1^* (i D_2); $C_0 \subset D_1^* \cup D_2$; je-li $1 \leqq n \leqq N$, je buď $C_n \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1$, načež $C_n \subset H(\Omega_1)$, nebo $C_n \in \mathfrak{A}_2$, načež $C_n \subset H(\Omega_2)$, nebo konečně $C_n \in \mathfrak{B}_1$, načež $A_n \subset D_2$ a $\tilde{B}_n \subset D_1^*$. Skutečně tedy je $H(\Omega) \cup L \subset H(\Omega_1) \cup H(\Omega_2)$, takže platí (66).

Ze (78) a (74) také plyne, že $H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2)$ se skládá z oblouku L a právě všech krajních bodů oblouků A_n, kde $C_n \in \mathfrak{B}_1$. Buď a krajní bod některého oblouku A_n, kde $C_n \in \mathfrak{B}_1$; dokážeme, že pak je buď $a = a_m$ pro některé $m = 1, \ldots, N$ nebo je a krajním bodem oblouku L.

Jistě existuje Jordanova křivka δ definovaná $\langle 0, 1\rangle$, pro niž je $\langle\delta\rangle = D$, přičemž $\delta(\langle t_1, 1\rangle) = A_n$, zvolíme-li vhodně $t_1 \in (0, 1)$. Jsou dvě možnosti: 1) Bod a patří do některého $C_m \neq C_n$ — pak je buď $a = a_m$ nebo $a = a_n$ (přičemž m resp. n není rovno 0, protože $a_0 \notin D$ podle předpokladu). 2) Bod a nepatří do žádného $C_m \neq C_n$ — pak je vzdálenost $\varrho^*(a, \bigcup_{m \neq n} C_m)$ kladná a existuje $t_0 > 0$ tak, že $\delta(\langle 0, t_0\rangle)$ je s $\bigcup_{m \neq n} C_m$ disjunktní; z toho plyne, že $\delta((0, t_0\rangle) \subset D - H(\Omega) = L$. Vzhledem k uzavřenosti L je $\delta(0) = a \in L$; protože je také $a \in C_n \cap H(\Omega)$, je a krajním bodem oblouku L.

Poznámka 5. Za situace a označení z věty 9 je zřejmě (viz k tomu pozn. 4 z odst. 3,2) $\mathbf{V}(\Omega_1)$ množinou všech a_n, kde $C_n \in \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1$, $\mathbf{V}(\Omega_2)$ množinou všech a_n, kde $C_n \in \mathfrak{A}_2$. Z toho ihned plyne, že

$$\mathbf{V}(\Omega_1) \cup \mathbf{V}(\Omega_2) \subset \mathbf{V}(\Omega)\,.$$

Tuto inklusi budeme v dalším potřebovat.

3,5. Věta 10. *Nechť $\mathfrak{M}$ je elementární systém jako ve větě 7; nechť $D \subset \bar{\Omega}$ je topologická kružnice, pro niž je $H(\Omega) \cap D$ buď oblouk nebo jednobodová množina. Nechť $a_0 \notin D$ a nechť existuje právě jedno n_0 tak, že $(\omega_{n_0}) \cap D$ je jednobodová; označme $(\omega_{n_0}) \cap D = \{d\}$. Nechť platí (64).*

Pak je

$$\mathfrak{C} = \{D\} \cup \{C_n \in \mathfrak{M};\ \operatorname{Int} C_n \not\subset \operatorname{Int} D\} \tag{81}$$

elementární systém s basí C_0, který určuje elementární oblast

$$\Omega_2 = \operatorname{Int} C_0 - \left(\overline{\operatorname{Int} D} \cup \bigcup_{C_0 \neq C_n \in \mathfrak{B}} \overline{\operatorname{Int} C_n}\right) \tag{82}$$

s hranicí

$$H(\Omega_2) = D \cup \bigcup_{C_n \in \mathfrak{C}} C_n\,. \tag{83}$$

Znamená-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, Ω_1 totéž jako ve větě 7 a je-li v případě, že $H(\Omega) \cap D$ je oblouk resp. jednobodová množina, L oblouk komplementární k $H(\Omega) \cap D$ v D resp. $L = D$, je dále

$$\Omega - D = \Omega - L = \Omega_1 \cup \Omega_2\,, \tag{84}$$

kde (elementární) oblasti Ω_1, Ω_2 jsou disjunktní,

$$H(\Omega_1) \cup H(\Omega_2) = H(\Omega) \cup L\,, \quad H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2) = L \cup K\,, \tag{85}$$

kde

$$K \subset \mathbf{V}(\Omega) \tag{86}$$

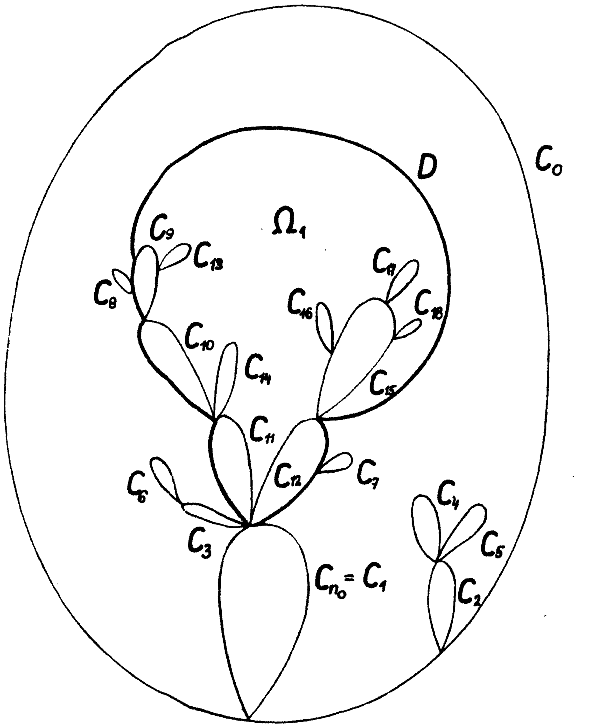
je vhodná (konečná) množina.

Důkaz. 1. Existují čísla n_i $(0 \leqq i \leqq p,\ p \geqq 0)$ tak, že

(87) $$\omega_{n_0} \gg \omega_{n_1} \gg \ldots \gg \omega_{n_p} = \omega_0 \,.$$

Dokažme, že

(88) $$\bigcup_{i=0}^{p-1} \operatorname{Int} C_{n_i} \subset \operatorname{Ext} D:$$



Obr. 4. K situaci z věty 10. ($\mathfrak{C}_0 = \{C_0\}$, $\mathfrak{C}_1 = \{C_1, C_2\}$, $\mathfrak{C}_2 = \{D, C_3, \ldots, C_5\}$, $\mathfrak{C}_3 = \{C_6, \ldots, C_8\}$, $\mathfrak{N}_0 = \{D_0\}$, $\mathfrak{N}_1 = \{C_{13}, C_{15}\}$, $\mathfrak{N}_2 = \{C_{16}, \ldots, C_{18}\}$.)

(88) je zřejmé pro $p = 0$; buď tedy $p > 0$. Kdyby bylo $\bigcup_{i=1}^{p} C_{n_i} \cap D \neq \emptyset$ (což se jistě nestane, když $H(\Omega) \cap D$ je jednobodová), tj. kdyby existoval bod $a \in C_{n_i} \cap D$ pro jisté $i = 1, \ldots, p$, existoval by podle věty 8 oblouk $Z \subset \bigcup_{i=1}^{p} C_{n_i} \cap D$ s krajními body a, d. Podle věty 6 by pak nutně bylo $a_{n_0} \in Z \subset D$, což je spor, neboť $D \cap C_{n_0} = \{d\} \neq \{a_{n_0}\}$.

Je tedy $\bigcup_{i=1}^{p} C_{n_i} \cap D = \emptyset$ a $\bigcup_{i=0}^{p} C_{n_i} \cap D = \{d\}$. Protože na $C_{n_p} = C_0$ existují body z $\operatorname{Ext} D$ (např. bod a_0) a protože $C_{n_p} \cup \left(\overline{\bigcup_{i=0}^{p-1} \operatorname{Int} C_{n_i}} - \{d\}\right)$ je souvislá množina neprotínající D, je to množina obsažená v $\operatorname{Ext} D$; tím spíše platí (88).

2. Nechť $C_n \in \mathfrak{C}$, kde n je různé ode všech n_i $(0 \leqq i \leqq p)$; nechť

(89) $$\omega_n = \omega_{r_0} \gg \omega_{r_1} \gg \ldots \gg \omega_{r_s} = \omega_0 .$$

Protože $n \neq n_p = 0$ a $C_n \in \mathfrak{C}$, je $\mathrm{Int}\, C_n \subset \mathrm{Ext}\, D$ a $s > 0$.

Jsou dvě možnosti: Množina

(90) $$\bigcup_{i=0}^{s-1} C_{r_i} \cap D$$

je a) prázdná, b) neprázdná.

V případě a) je $\bigcup_{i=0}^{s-1} \overline{\mathrm{Int}\, C_{r_i}}$ souvislá množina protínající $\mathrm{Ext}\, D$ a disjunktní s D; proto je

(91) $$\bigcup_{i=0}^{s-1} \overline{\mathrm{Int}\, C_{r_i}} \subset \mathrm{Ext}\, D .$$

V případě b) existuje nejmenší číslo j tak, že $C_{r_j} \cap D \neq \emptyset$; podle definice j je $\bigcup_{i=0}^{j-1} C_{r_i} \subset \mathrm{Ext}\, D$, takže i $\bigcup_{i=0}^{j-1} \overline{\mathrm{Int}\, C_{r_i}} \subset \mathrm{Ext}\, D$. Kdyby nebylo $\mathrm{Int}\, C_{r_j} \subset \mathrm{Ext}\, D$, bylo by nutně $j > 0$; vzhledem k tomu, že $j < s$, tj. že $C_{r_j} \neq C_0$, by tedy bylo $\mathrm{Int}\, C_{r_j} \subset \subset \mathrm{Int}\, D$ a $\overline{\mathrm{Int}\, C_{r_j}} \subset \overline{\mathrm{Int}\, D}$. To však není možné, neboť by bylo $a_{r_{j-1}} \in \overline{\mathrm{Int}\, C_{r_{j-1}}} \subset \subset \mathrm{Ext}\, D$, $a_{r_{j-1}} \in C_{r_j} \subset \overline{\mathrm{Int}\, D}$. Je tedy dokonce

(92) $$\bigcup_{i=0}^{j-1} \overline{\mathrm{Int}\, C_{r_i}} \cup \mathrm{Int}\, C_{r_j} \subset \mathrm{Ext}\, D .$$

Protože $r_j \neq 0$, $\mathrm{Int}\, C_{r_j} \subset \mathrm{Ext}\, D$, je podle (64) průnik C_{r_j} s D jednobodový. Je buď $r_j = n_0$, načež $C_{r_j} \cap D = \{d\} \subset (\omega_{r_j})$, nebo $r_j \neq n_0$ a $C_{r_j} \cap D = \{a_{r_j}\}$.

3. Buď $C_n \in \mathfrak{C}$; rozlišujme tyto tři případy:

(93) $n = n_i$ pro některé $i = 0, \ldots, p$;

(94) $n \neq n_i$ pro všechna $i = 0, \ldots, p$ a buď $\bigcup_{i=0}^{s-1} C_{r_i} \cap D = \emptyset$ nebo $r_i = n_0$ pro některé $i = 1, \ldots, s - 1$ [19]);

(95) $n \neq n_i$ pro všechna $i = 0, \ldots, p$, $\bigcup_{i=0}^{s-1} C_{r_i} \cap D \neq \emptyset$, $r_i \neq n_0$ pro všechna $i = 0, \ldots, s$.

Je zřejmé, že při daném n, pro něž je $C_n \in \mathfrak{C}$, nastane právě jedna ze situací (93), (94), (95).

Rozdělme systém $\mathfrak{C}$ takto: Nechť $D \in \mathfrak{C}_{p+1}$; nastane-li pro některé $C_n \in \mathfrak{C}$ situace (93), buď $C_n \in \mathfrak{C}_{p-i}$, nastane-li situace (94), buď $C_n \in \mathfrak{C}_s$, nastane-li konečně situace (95), nechť $C_n \in \mathfrak{C}_{p+j+2}$ (kde j je jako nahoře nejmenší číslo, pro které je $C_{r_j} \cap D \neq \neq \emptyset$).

[19]) n_0 není rovno r_0 $(=n)$ ani r_s $(=0=n_p)$.

Označme S maximum všech k, pro které je $\mathfrak{C}_k \neq \emptyset$. Ověřme, že $\mathfrak{C}$ je elementární systém s basí C_0: Zřejmě je

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \cup \ldots \cup \mathfrak{C}_S ,$$

přičemž sjednocení vpravo je disjunktní.

I. Z toho, jak jsme systém $\mathfrak{C}$ rozdělili na podsystémy ihned plyne, že $\mathfrak{C}_0 = \{C_0\}$; kromě toho je ovšem $\mathfrak{C}_S \neq \emptyset$.

II. Nechť $C_n \in \mathfrak{C}$, $C_n \cap D \neq \emptyset$; připomeňme, že $D \in \mathfrak{C}_{p+1}$. Množina $C_n \cap D$ je podle (64) jednobodová. Je buď $n = n_0$, načež $C_n \in \mathfrak{C}_p$, $C_n \cap D = \{d\} \neq \{a_n\}$, nebo je $n \neq n_0$, načež $C_n \cap D = \{a_n\}$ a jsou dvě možnosti: buď je $a_n = d$, takže $\omega_n \gg \omega_{n_0}$, nastává situace (94) a je $C_n \in \mathfrak{C}_{p+1}$, nebo je $a_n \neq d$, načež nastává situace (95) a je $C_n \in \mathfrak{C}_{p+2}$.

Nechť dále $C_n, C_m \in \mathfrak{C}$, $n \neq m$, $C_n \cap C_m \neq \emptyset$; pak je buď $\omega_n \gg \omega_m$ (resp. $\omega_m \gg \omega_n$, což se vyšetří analogicky), nebo ω_n, ω_m patří do téhož $\mathfrak{S}_Q$ $(1 \leqq Q \leqq R)$. V prvním případě je $C_n \cap C_m = \{a_n\} \neq \{a_m\}$, ve druhém případě $C_n \cap C_m = \{a_n\} = \{a_m\}$.

Vyšetřme případ $\omega_n \gg \omega_m$: Je-li $n = n_i$ pro některé $i = 0, \ldots, p$ [20]), není $i = p$, neboť $\omega_n \gg \omega_m$ a n nemůže být 0; jak snadno zjistíme, je $C_n \in \mathfrak{C}_{p-i}$, $C_m \in \mathfrak{C}_{p-i-1}$. Platí-li (94), je $C_n \in \mathfrak{C}_s$, $C_m \in \mathfrak{C}_{s-1}$. Platí-li (95), je příslušné j [21]) kladné. (Kdyby tomu totiž tak nebylo, nebylo by $\overline{\mathrm{Int}\, C_n} \subset \mathrm{Ext}\, D$, tj. bylo by $C_n \cap D \neq \emptyset$, tedy (vzhledem k tomu, že $n \neq n_0$) $a_n \in D$; potom by však z podmínky $\omega_n \gg \omega_m$ plynulo, že $a_n \in (\omega_m) \cap D \neq \emptyset$, což je spor, neboť $m = r_1 \neq n_0$ a pro každé $m \neq n_0$ je $(\omega_m) \cap D = \emptyset$.) Je tedy zřejmě $C_n \in \mathfrak{C}_{p+j+2}$, $C_m \in \mathfrak{C}_{p+j+1}$.

Předpokládejme nyní, že ω_n, ω_m patří do téhož $\mathfrak{S}_Q$. Zvolme r tak, že $\omega_r \ll \omega_n$, $\omega_r \ll \omega_m$. Jsou dvě možnosti: a) $C_r \in \mathfrak{C}$, b) $C_r \notin \mathfrak{C}$.

V případě a) je $C_r \in \mathfrak{C}_i$ pro vhodné i a podle toho, co jsme již dokázali, $C_m, C_n \in \mathfrak{C}_{i+1}$. V případě b) není $r = 0$ (neboť $C_0 \in \mathfrak{C}$), takže podmínka $C_r \notin \mathfrak{C}$ je ekvivalentní s tím, že $\mathrm{Int}\, C_r \subset \mathrm{Int}\, D$, tedy $\overline{\mathrm{Int}\, C_r} \subset \overline{\mathrm{Int}\, D}$. Z poslední podmínky a z toho, že $\overline{\mathrm{Int}\, C_n} \subset \overline{\mathrm{Ext}\, D}$, plyne, že $a_n\ (=a_m) \in C_r \cap C_n \subset \overline{\mathrm{Int}\, D} \cap \overline{\mathrm{Ext}\, D} = D$. Odtud plyne, že C_m i C_n patří do $\mathfrak{C}_{p+2}$.

III. K topologické kružnici D, která patří do $\mathfrak{C}_{p+1}$, existuje právě jedno $C_n \in \mathfrak{C}_p$, pro něž je $C_n \cap D \neq \emptyset$, totiž $C_n = C_{n_0}$. (Jak jsme viděli nahoře, patří ta C_m, která mají s D společný bod a_n, buď do $\mathfrak{C}_{p+1}$ – když $a_n = d$, nebo do $\mathfrak{C}_{p+2}$ – když $a_n \neq d$.)

Buď nyní $C_n \in \mathfrak{C}_i$, kde $i > 0$; nechť $\omega_m \ll \omega_n$. Podle toho, co jsme řekli v části II tohoto důkazu, platí: Je buď $C_m \in \mathfrak{C}$, načež $C_m \in \mathfrak{C}_{i-1}$, $C_m \cap C_n \neq \emptyset$, nebo $C_m \notin \mathfrak{C}$, načež $i = p + 2$, $D \cap C_n \neq \emptyset$. V prvním případě je přitom buď $C_n \cap D = \emptyset$ nebo sice $C_n \cap D \neq \emptyset$, ale $D \notin \mathfrak{C}_{i-1}$, ve druhém případě je $C_k \cap C_n = \emptyset$ pro všechna $C_k \in \mathfrak{C}_{i-1}$.

IV. Snadno nahlédneme, že pro $C_n \in \mathfrak{C}$ jsou ekvivalentní podmínky $C_n \in \mathfrak{C}_1$

[20]) tj. platí-li (93)

[21]) j je nejmenší číslo, pro které je $C_{r_j} \cap D \neq \emptyset$.

a $C_n \in \mathfrak{M}_1$. Z toho plyne, že pro $C_n \in \mathfrak{C}_1$ je $\overline{\text{Int } C_n} - \{a_n\} \subset \text{Int } C_0$, pro $C_n \in \mathfrak{C}_j$, kde $j > 1$, $\overline{\text{Int } C_n} \subset \text{Int } C_0$.

Je-li $D \in \mathfrak{C}_1$, je $n_0 = 0$, $C_0 \cap D = \{d\}$, $\overline{\text{Int } D} - \{d\} \subset \text{Int } C_0$. Je-li $D \in \mathfrak{C}_j$, kde $j > 1$, je $C_0 \cap D = \emptyset$: kdyby totiž bylo $C_0 \cap D \neq \emptyset$, bylo by (vzhledem k tomu, že $a_0 \notin D$) $(\omega_0) \cap D \neq \emptyset$, tedy $n_0 = 0$ a $D \in \mathfrak{C}_1$. Z podmínky $C_0 \cap D = \emptyset$ plyne, že $\overline{\text{Int } D} \subset \text{Int } C_0$.

Tím je dokázáno, že $\mathfrak{C}$ je elementární systém s basí C_0; $\mathfrak{C}$ ovšem určuje elementární oblást (82), která má hranici (83).

4. Znamená-li Ω_1 totéž jako ve větě 7, je $\Omega_1 \subset \text{Int } D$; protože $\Omega_2 \cap \text{Int } D = \emptyset$, je $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Dále je

$$\Omega - L = \Omega - D = (\text{Int } C_0 - D) - \bigcup_{n=1}^{N} \overline{\text{Int } C_n} =$$

$$= [\text{Int } D - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{A}} \overline{\text{Int } C_n}] \cup [\text{Int } C_0 - (\overline{\text{Int } D} \cup \bigcup_{C_0 \neq C_n \in \mathfrak{C}} \overline{\text{Int } C_n})] = \Omega_1 \cup \Omega_2 ,$$

neboť $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C} = \mathfrak{M}$.

Ze (43), (83) a rovnosti $D \cup D_0 = D \cup \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} C_n$ plyne, že

$$H(\Omega_1) \cup H(\Omega_2) = H(\Omega) \cup D = H(\Omega) \cup L .$$

Protože (podle (43) a (83))

$$D_0 \subset H(\Omega_1) \subset \overline{\text{Int } D_0} , \quad D \subset H(\Omega_2) \subset \overline{\text{Ext } D}$$

a

$$\overline{\text{Int } D_0} \cap \text{Ext } D = \text{Int } D_0 \cap \overline{\text{Ext } D} = \emptyset ,$$

je

$$D_0 \cap D \subset H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2) \subset \overline{\text{Int } D_0} \cap \overline{\text{Ext } D} = D_0 \cap D ,$$

takže

(96)
$$H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2) = D_0 \cap D = D - \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} \tilde{A}_n =$$
$$= L \cup (D \cap H(\Omega) - \bigcup_{C_n \notin \mathfrak{B}} \tilde{A}_n) .$$

Je

(97)
$$D \cap \bigcup_{n=0}^{N} C_n = (D \cap \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} C_n) \cup (D \cap \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} C_n) ;$$

tvrdíme, že druhý průnik vpravo je konečná množina. To je zřejmé z toho, že $\mathfrak{B}$ obsahuje právě všechna C_n, pro něž je $C_n \cap D$ oblouk[22]), tedy že $C_n \cap D$ je prázdná

[22]) Je-li $n_0 = 0$, je $(\omega_0) \cap D$ jednobodová, je-li $n_0 > 0$, je $C_0 \cap D = \emptyset$; $C_0 \cap D$ není tedy v žádném případě oblouk. Je-li $C_n \cap D$ oblouk, je podle (64) $\text{Int } C_n \subset \text{Int } D$, tedy $C_n \in \mathfrak{B}$.

nebo jednobodová, když $C_n \notin \mathfrak{B}$. Protože

(98) $$D \cap \bigcup_{n=0}^{N} C_n = D \cap H(\Omega)$$

je podle předpokladu oblouk, je nutně

(99) $$D \cap \bigcup_{n=0}^{N} C_n = D \cap \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} C_n ,$$

neboť v opačném případě by rozdíl oblouku na levé straně (99) a sjednocení oblouků na pravé straně (99) byla množina obsahující oblouk, což je ve sporu s (97) a tím, že druhý průnik na pravé straně (97) je konečná množina. Protože ještě $D \cap \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} C_n = \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} A_n$, je

(100) $$D \cap H(\Omega) = \bigcup_{C_n \in \mathfrak{B}} A_n .$$

Z toho a z (96) ihned plyne, že

$$H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2) = L \cup K ,$$

kde K je složena právě ze všech krajních bodů oblouků A_n různých od krajních bodů oblouku L. Je-li $H(\Omega) \cap D$ oblouk, je $K \subset V(\Omega)$ stejně jako ve větě 9; je-li $H(\Omega) \cap D$ jednobodová množina, je $K = \emptyset$.

Tím je věta 10 dokázána.

Poznámka 6. Užíváme-li označení z věty 10 (a jejího důkazu), vidíme, že jsou dvě možnosti: 1) $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, 2) $\mathfrak{A} = \emptyset$. (Jak snadno nahlédneme, může být $\mathfrak{A} = \emptyset$ jen tehdy, když je $H(\Omega) \cap D$ jednobodová množina, tj. $H(\Omega) \cap D = \{d\}$.)

Nechť $\mathfrak{A} \neq \emptyset$; zvolme pak $C_m \in \mathfrak{A}$ a nechť

$$\omega_m = \omega_{m_0} \gg \omega_{m_1} \gg \ldots \gg \omega_{m_q} = \omega_0 .$$

Protože $C_m \in \mathfrak{A}$, je Int $C_m \subset$ Int D; naproti tomu Int $C_{m_q} =$ Int $C_0 \not\subset$ Int D. Existuje tedy nejmenší index j tak, že Int $C_{m_j} \subset$ Int D, Int $C_{m_{j+1}} \not\subset$ Int D; jak snadno nahlédneme, je pak

$$a_{m_j} \in D \cap (\omega_{m_{j+1}}) ,$$

takže nutně $m_{j+1} = n_0$, $a_{m_j} = d$. Je tedy $d \in V(\Omega)$.

Protože $V(\Omega_1)$ se skládá z těch a_n, pro něž je $C_n \in \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, a protože $V(\Omega_2)$ obsahuje bod $d \in V(\Omega)$ a právě všechny body a_n, kde $n > 0$ a kde $C_n \in \mathfrak{C}$, je – podobně jako ve větě 9 –

$$V(\Omega_1) \cup V(\Omega_2) \subset V(\Omega) .$$

Je-li $\mathfrak{A} = \emptyset$, nemusí být $d \in V(\Omega)$, ale – jak snadno nahlédneme – bude jistě

$$V(\Omega_1) \cup V(\Omega_2) \subset V(\Omega) \cup \{d\} .$$

Platnost poslední inkluse máme tedy za situace z věty 10 zaručenou, ať již je $\mathfrak{A}$ jakékoliv.

4,1. Věta 11. *Buď Ω elementární oblast určená elementárním systémem $\mathfrak{M} = \{C_n\}_{n=0}^N$ s basí C_0. Buď λ prostá nebo Jordanova křivka, pro niž je*

$$\text{(101)} \qquad \mathrm{p.b.}\lambda, \quad \mathrm{k.b.}\lambda \in H(\Omega), \quad (\lambda) \subset \Omega .$$

Označíme-li $L = \langle\lambda\rangle$, je pak

$$\text{(102)} \qquad \Omega - L = \Omega_1 \cup \Omega_2 ,$$

kde Ω_1, Ω_2 jsou disjunktní elementární oblasti, pro něž platí:

$$\text{(103)} \qquad H(\Omega_1) \cup H(\Omega_2) = H(\Omega) \cup L, \quad H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2) = L \cup K ,$$

kde

$$\text{(104)} \qquad K \subset \mathbf{V}(\Omega)$$

je vhodná (konečná) množina.

Důkaz. 1. Jsou dvě možnosti: a) $\Omega \subset \mathrm{Int}\, C_0$, b) $\Omega \subset \mathrm{Ext}\, C_0$. [23])

Ukažme především, jak lze případ b) převést na případ a): Zvolme libovolně bod $a \in \mathrm{Int}\, C_0$ a nechť $F(z) = 1/(z - a)$ pro všechna $z \in \mathbf{S}$; pak je F homeomorfní zobrazení $\mathbf{S}$ na $\mathbf{S}$. Jak snadno nahlédneme, je (v případě b)) $\{F(C_n)\}_{n=0}^N$ elementární systém s basí $F(C_0)$, pro který je $\bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{Int}\, F(C_n) \subset \mathrm{Int}\, F(C_0)$. Křivka $F * \lambda$ [24]) má krajní body na hranici množiny $F(\Omega) = \mathrm{Int}\, F(C_0) - \bigcup_{n=1}^{N} \overline{\mathrm{Int}\, F(C_n)}$, $(F * \lambda) \subset F(\Omega)$. Dokážeme-li větu 11 v případě a), budeme vědět, že

$$F(\Omega) - \langle F * \lambda \rangle = G_1 \cup G_2 ,$$

kde G_1, G_2 jsou disjunktní elementární oblasti, pro něž bude $H(G_1) \cup H(G_2) = H(F(\Omega)) \cup F(L)$, $H(G_1) \cap H(G_2) = F(L) \cup K^*$, kde $K^* \subset \mathbf{V}(F(\Omega))$.

Jak snadno dále zjistíme, bude platit (102)–(104), položíme-li $\Omega_j = F_{-1}(G_j)$ pro $j = 1, 2$, $K = F_{-1}(K^*)$; Ω_j budou přitom disjunktní elementární oblasti.

Z toho je patrné, že větu 11 stačí dokázat za předpokladu, že nastává situace a) (za níž jsme odvodili pomocné věty 7–10). Užívejme označení z odst. 3,1 a 3,2 jako dosud.

Protože volba bodu a_0 je vázána jen podmínkou, že $a_0 \in C_0 - \mathbf{V}(\Omega)$, můžeme dále bez újmy obecnosti předpokládat, že $\mathrm{p.b.}\lambda \neq a_0 \neq \mathrm{k.b.}\lambda$. Za tohoto předpo-

---

[23]) V případě a) resp. b) je $\bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{Int}\, C_n$ částí $\mathrm{Int}\, C_0$ resp. $\mathrm{Ext}\, C_0$. Pokud je v případě b) ještě $N > 0$, je $\Omega = \bigcap_{n=0}^{N} \mathrm{Ext}\, C_n$ a množiny $\mathrm{Int}\, C_0, \ldots, \mathrm{Int}\, C_N$ jsou disjunktní (sr. s pozn. 2 v odst. 3,1).

[24]) Hvězdičkou značíme skládání zobrazení.

kladu (který v dalším činíme), je každý z krajních bodů křivky λ obsažen ve zcela určité množině (ω_n); je totiž $H(\Omega) - \{a_0\} = \bigcup_{n=0}^{N} (\omega_n)$, přičemž sjednocení vpravo je disjunktní.

Jsou tyto možnosti:

A. L je oblouk, jehož oba krajní body leží v jistém (ω_i).

B. L je oblouk, jehož jeden krajní bod patří do (ω_i), druhý do (ω_j), přičemž $\omega_i < \omega_j$.

C. L je oblouk, jehož jeden krajní bod je obsažen v (ω_i), druhý v (ω_j), přičemž není ani $\omega_i \leqq \omega_j$ ani $\omega_i > \omega_j$.

D. L je topologická kružnice, přičemž p. b. λ = k. b. $\lambda \in (\omega_i)$ pro jisté i.

Případy A–D vyšetříme postupně v odst. 4,2–4,5.

4,2. Nechť platí A a nechť nejdříve $i = 0$. Označme X kterýkoliv ze dvou oblouků s krajními body rovnými krajním bodům oblouku L a obsažených v C_0 a buď $D = L \cup X$. Tvrzení, které máme dokázat, plyne ihned z věty 9.

Buď nyní $i \neq 0$ a zvolme čísla $\varepsilon < \eta$ v $\langle \alpha_i, \beta_i \rangle$ tak, že $\omega_i(\varepsilon)$, $\omega_i(\eta)$ jsou krajní body oblouku L. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $\omega_i(\varepsilon)$ = p. b. λ. Nechť

(105) $$\lambda_1 = \omega_i \mid \langle \varepsilon, \eta \rangle\,, \quad \dot{-}\lambda_2 = \omega_i \mid \langle \eta, \beta_i \rangle \dot{+} \omega_i \mid \langle \alpha, \varepsilon \rangle\,, \quad \lambda_3 = \lambda\,.$$

Ověřme, že na křivky λ_j $(j = 1, 2, 3)$ můžeme aplikovat větu 2: Podmínky (5), (6) a (7) zřejmě platí; křivka $\lambda_1 \dot{-} \lambda_2 = \omega_i$ je kladně orientována; dále je $(\lambda_3) = (\lambda) \subset \Omega \subset \operatorname{Ext} \omega_i = \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_2)$.

Dokažme ještě, že $(\lambda_2) \subset \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_3)$: Nechť

(106) $$\omega_i = \omega_{i_0} \gg \omega_{i_1} \gg \ldots \gg \omega_{i_p} = \omega_0\,;$$

protože množina

(107) $$\bigcup_{m=1}^{p} C_{i_m} \cup (\lambda_2)$$

je souvislá, protože protíná $\operatorname{Ext}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_3)$ (je $C_0 \cap \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_3) \neq \emptyset$) a protože je disjunktní s $\langle \lambda_1 \dot{-} \lambda_3 \rangle$, je obsažena v $\operatorname{Ext}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_3)$. Tím spíše je $(\lambda_2) \subset \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_3)$.

Podle věty 2 je tedy

(108) $$\operatorname{Int}(\lambda_3 \dot{-} \lambda_2) - (\lambda_1) = \operatorname{Int}(\lambda_3 \dot{-} \lambda_1) \cup \operatorname{Int}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_2)\,.$$

Položme $D = \langle \lambda_3 \dot{-} \lambda_2 \rangle$ a užijme věty 10: $H(\Omega) \cap D = \langle \lambda_2 \rangle$ je oblouk, n_0 je ten index, pro který je $\omega_{n_0} \lessdot \omega_i$; (64) platí, neboť jediné n, pro které je $C_n \cap D$ oblouk, je $n = i$, a $\operatorname{Int} C_i \subset \operatorname{Int} D$ podle (108); L je skutečně oblouk komplementární k $H(\Omega) \cap D = \langle \lambda_2 \rangle$ v D. Tvrzení věty 11 vyplývá tedy v případě, který právě vyšetřujeme, z věty 10.

4,3. Vyšetřme situaci B: Nechť

$$\omega_i = \omega_{i_0} \lessdot \omega_{i_1} \lessdot \ldots \lessdot \omega_{i_p} = \omega_j \tag{109}$$

(takže $p > 0$); bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že p . b . $\lambda \in (\omega_i)$, k . b . $\lambda \in \in (\omega_j)$. Pro $m = 0, \ldots, p - 1$ označme γ_m ten bod z $(\alpha_{i_m}, \beta_{i_m})$, pro který je $\omega_{i_m}(\gamma_m) = $ = p . b . $\omega_{i_{m+1}}$; buď ještě $\varepsilon \in (\alpha_i, \beta_i)$ zvoleno tak, že p . b . $\lambda = \omega_i(\varepsilon)$, a γ_p buď ten bod z (α_j, β_j), pro který je $\omega_j(\gamma_p) =$ k . b . λ.

Jsou tyto tři možnosti: 1) $\varepsilon \in (\alpha_i, \gamma_0)$, 2) $\varepsilon \in (\gamma_0, \beta_i)$, 3) $\varepsilon = \gamma_0$.

Ad 1): Označme

$$\omega''_{i_m} = \omega_{i_m} \mid \langle \gamma_m, \beta_{i_m} \rangle \quad \text{pro} \quad m = 1, \ldots, p\,, \tag{110}$$

$$\lambda_1 = \omega_i \mid \langle \varepsilon, \gamma_0 \rangle\,, \quad \dot{-}\lambda_2 = \omega_i \mid \langle \gamma_0, \beta_i \rangle \dotplus \omega_i \mid \langle \alpha_i, \varepsilon \rangle\,, \tag{111}$$

$$\lambda_3 = \lambda \dotplus \omega''_{i_p} \dotplus \omega''_{i_{p-1}} \dotplus \ldots \dotplus \omega''_{i_1}\,;$$

pak jsou $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ prosté křivky, pro něž platí (6)[25]) a (7).

Jsou opět dvě možnosti: a) $i = 0$, b) $i > 0$.

Ad a): Položme $D = \langle \lambda_3 \dot{-} \lambda_2 \rangle$; pak je D topologická kružnice, pro niž je

$$D \cap H(\Omega) = \langle \omega''_{i_p} \rangle \cup \ldots \cup \langle \omega''_{i_1} \rangle \cup \langle \lambda_2 \rangle\,, \quad D \cap C_0 = \langle \lambda_2 \rangle\,,$$

takže jak $D \cap H(\Omega)$, tak $D \cap C_0$ je oblouk. Podmínka (64) se dokáže takto:

Protože křivka $\lambda_1 \dot{-} \lambda_2 = \omega_0$ je kladně orientována a protože $(\lambda_3) \subset \operatorname{Int} \omega_0$, je podle věty 1 i křivka $\lambda_3 \dot{-} \lambda_2$ kladně orientována. Definujme ještě

$$\omega'_{i_m} = \omega_{i_m} \mid \langle \alpha_{i_m}, \gamma_m \rangle \quad \text{pro} \quad m = 1, \ldots, p\,. \tag{112}$$

Pak je $\omega_{i_m} = \omega'_{i_m} \dotplus \omega''_{i_m}$ (kladně orientovaná Jordanova křivka), přičemž ω''_{i_m} je část (kladně orientované) křivky $\lambda_3 \dot{-} \lambda_2$, $(\omega'_{i_m}) \cap \langle \lambda_3 \dot{-} \lambda_2 \rangle = \emptyset$. Část λ křivky $\lambda_3 \dot{-} \lambda_2$ má tu vlastnost, že $(\lambda) \subset \operatorname{Ext} \omega_{i_m}$. Podle věty 3 je tedy $\operatorname{Int} C_{i_m} \subset \operatorname{Int} D$, a to pro $m = 1, \ldots, p$. Tedy: Je-li $C_n \cap D$ oblouk, $n > 0$, je $n = i_m$ pro vhodné $m = 1, \ldots, p$, načež $\operatorname{Int} C_n \subset \operatorname{Int} D$; tím je (64) dokázáno.

Ukázali jsme, že jsou splněny všechny předpoklady věty 9; z ní plyne ihned tvrzení věty 11 v situaci, kterou vyšetřujeme.

Ad b): Nyní je $i > 0$, $(\lambda_3) \subset \operatorname{Ext} (\lambda_1 \dot{-} \lambda_2) = \operatorname{Ext} \omega_i$. Podobně jako v odst. 4,2 (při vyšetřování případu $i > 0$) snadno dokážeme, že $(\lambda_2) \subset \operatorname{Ext} (\lambda_1 \dot{-} \lambda_3)$, odkud podle věty 2 plyne, že křivky $\lambda_3 \dot{-} \lambda_1$, $\lambda_3 \dot{-} \lambda_2$ jsou kladně orientovány a že

$$\operatorname{Int} (\lambda_3 \dot{-} \lambda_2) - (\lambda_1) = \operatorname{Int} (\lambda_1 \dot{-} \lambda_2) \cup \operatorname{Int} (\lambda_3 \dot{-} \lambda_1)\,. \tag{113}$$

Položme $D = \langle \lambda_3 \dot{-} \lambda_2 \rangle$; protože $\omega_i = \lambda_1 \dot{-} \lambda_2$, plyne ze (113) inkluse $\operatorname{Int} C_i \subset \subset \operatorname{Int} D$. Inkluse $\operatorname{Int} C_{i_m} \subset \operatorname{Int} D$ pro $m = 1, \ldots, p$ se (pomocí vět 2 a 3) dokáží

[25]) kde $a = \omega_i(\varepsilon)$, $b = \omega_i(\gamma_0)$

analogicky jako v případě, kdy bylo $i = 0$. Je tedy celkem

$$\bigcup_{m=0}^{p} \operatorname{Int} C_{i_m} \subset \operatorname{Int} D \,, \tag{114}$$

z čehož plyne ihned podmínka (64), neboť $C_n \cap D$ je oblouk jen tehdy, když $n = i_m$ pro některé $m = 0, \ldots, p$.

Ověřme platnost dalších předpokladů věty 10: $H(\Omega) \cap D = \bigcup_{m=1}^{p} \langle \omega''_{i_m} \rangle \cup \langle \lambda_2 \rangle$ je oblouk; je-li $\omega_{n_0} \lessdot \omega_i$, je n_0 jediný index, pro který je $(\omega_{n_0}) \cap D$ jednobodová množina.

Z věty 10 plyne tvrzení věty 11 (v nyní vyšetřovaném případě).

Ad 2): Tento případ se vyšetří zcela analogicky jako případ 1), místo křivkami (111) se zabýváme křivkami

$$\lambda_1 = \omega_i \mid \langle \gamma_0, \varepsilon \rangle \,, \quad \dot{-}\lambda_2 = \omega_i \mid \langle \varepsilon, \beta_i \rangle \dotplus \omega_i \mid \langle \alpha_i, \gamma_0 \rangle \,, \tag{115}$$
$$\lambda_3 = \omega'_{i_1} \dotplus \ldots \dotplus \omega'_{i_p} \dot{-} \lambda \,.$$

Ad 3): Nyní je $\varepsilon = \gamma_0$, tj. p. b. λ = p. b. ω_{i_1}. Nechť

$$\mu_1 = \omega''_{i_p} \dotplus \ldots \dotplus \omega''_{i_1} \dotplus \lambda \,, \quad \mu_2 = \omega'_{i_1} \dotplus \ldots \dotplus \omega'_{i_p} \dot{-} \lambda \,; \tag{116}$$

pak jsou μ_1, μ_2 Jordanovy křivky, pro něž je

$$\operatorname{ind}_{\mu_1} + \operatorname{ind}_{\mu_2} = \sum_{m=1}^{p} \operatorname{ind}_{\omega_{i_m}} \,. \tag{117}$$

Buď $z \in \operatorname{Int} \omega_j = \operatorname{Int} \omega_{i_p}$; pak je hodnota pravé strany (117) v bodě z rovna $+1$, takže (vzhledem k tomu, že jak $\operatorname{ind}_{\mu_1} z$, tak $\operatorname{ind}_{\mu_2} z$ může být roven jen ± 1 nebo 0) jedno z čísel $\operatorname{ind}_{\mu_1} z$, $\operatorname{ind}_{\mu_2} z$ je nutně rovno $+1$, druhé 0. Předpokládejme, že

$$\operatorname{ind}_{\mu_1} z = +1 \,, \quad \operatorname{ind}_{\mu_2} z = 0 \,; \tag{118}$$

druhá možnost se vyšetří zcela analogicky. Ze (118) plyne, že křivka μ_1 je kladně orientována; klademe-li $D = \langle \mu_1 \rangle$, zjistí se snadno podle věty 3, že

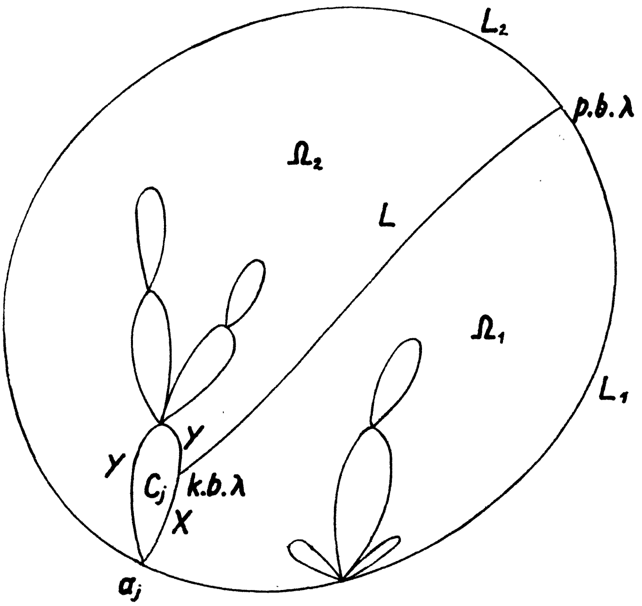
$$\bigcup_{m=1}^{p} \operatorname{Int} C_{i_m} \subset \operatorname{Int} D \,. \tag{119}$$

Vztah (119) zaručuje – jak jsme již zjistili v podobné situaci nahoře – platnost podmínky (64); ukažme, že jsou splněny i ostatní předpoklady věty 10: $H(\Omega) \cap D = \bigcup_{m=1}^{p} \langle \omega''_{i_m} \rangle$ je oblouk; jediným indexem n_0, pro který je $(\omega_{n_0}) \cap D$ jednobodová množina, je index n_0, pro který je $\omega_{n_0} \lessdot \omega_i$.

Věta 10 zaručuje, že tvrzení věty 11 opět platí.

Poznámka 7. Předpokládejme, že nastane situace B, přičemž $\omega_j \gtrdot \omega_i = \omega_0$; protože $a_0 \notin \langle \lambda \rangle$, je buď $\varepsilon \in (\alpha_0, \gamma_0)$ nebo $\varepsilon_0 \in (\gamma_0, \beta_0)$. Vyšetřme případ první; druhý je zcela analogický. (Máme tedy speciální případ situace 1 a) ze začátku tohoto odstavce.) Utvořme systémy $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2)$ jako v důkazu věty 9 (které za dané situace užíváme); vidíme ihned, že $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{M} - \{C_0\}$ obsahuje právě N prvků. Protože $\mathfrak{B}_1 = \{C_j\} \neq \emptyset$, je $\mathfrak{A}_1 \neq \emptyset$, takže systém $\mathfrak{A}_2$, který je disjunktní s $\mathfrak{A}_1$, obsahuje méně než N prvků. Z toho plyne podle (76), že $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ mají nejvýše N prvků, tj., že Ω_1 i Ω_2 mají stupeň menší než N.

Povšimněme si ještě basí elementárních systémů $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$. Je zřejmé, že topologickou kružnici C_j lze rozložit na sjednocení dvou oblouků X, Y s krajními body a_j,



Obr. 5. K situaci z pozn. 7.

k. b. λ, topologickou kružnici C_0 (která je basí Ω) na sjednocení dvou oblouků L_1, L_2 s krajními body a_j, p. b. λ, a to tak, že $L_1 \cup L \cup X$ je basí Ω_1, $L_2 \cup L \cup Y$ basí Ω_2 a že $\bar{Y} \subset \mathbf{S} - \bar{\Omega}_1$.

4,4. Nechť nastane případ C; protože není ani $\omega_i \leqq \omega_j$ ani $\omega_i > \omega_j$, jsou obě čísla i, j kladná. Z toho plyne, že $\omega_0 < \omega_i$, $\omega_0 < \omega_j$; existuje proto i největší Q tak, že v $\mathfrak{M}_Q$ existuje C_k tak, že $\omega_k < \omega_i$, $\omega_k < \omega_j$. Pro vhodné indexy i_m a j_n je pak

$$(120) \qquad \omega_k = \omega_{i_0} \lessdot \omega_{i_1} \lessdot \ldots \lessdot \omega_{i_p} = \omega_i\,, \quad \omega_k = \omega_{j_0} \lessdot \omega_{j_1} \lessdot \ldots \lessdot \omega_{j_q} = \omega_j\,,$$

přičemž je $p > 0$, $q > 0$, a vzhledem k tomu, jak jsme zvolili index Q, ještě $i_1 \neq j_1$.

Buď γ_m $(m = 0, \ldots, p - 1)$ ten bod z $(\alpha_{i_m}, \beta_{i_m})$, pro který je $\omega_{i_m}(\gamma_m) =$ p. b. $\omega_{i_{m+1}}$, buď δ_n $(n = 0, \ldots, q - 1)$ ten bod z $(\alpha_{j_n}, \beta_{j_n})$, pro který je $\omega_{j_n}(\delta_n) =$ p. b. $\omega_{j_{n+1}}$.

Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že p. b. $\lambda \in (\omega_i)$, k. b. $\lambda \in (\omega_j)$; buď γ_p resp. δ_q bod z $(\alpha_{i_p}, \beta_{i_p}) = (\alpha_i, \beta_i)$ resp. z $(\alpha_{j_q}, \beta_{j_q}) = (\alpha_j, \beta_j)$, pro který je $\omega_i(\gamma_p) =$ p. b. λ resp. $\omega_j(\delta_q) =$ k. b. λ. Označme ještě

$$(121) \qquad \omega'_{i_m} = \omega_{i_m} \mid \langle \alpha_{i_m}, \gamma_m \rangle\,, \quad \omega''_{i_m} = \omega_{i_m} \mid \langle \gamma_m, \beta_{i_m} \rangle \quad \text{pro} \quad m = 1, \ldots, p\,,$$

$$(122) \qquad \omega'_{j_n} = \omega_{j_n} \mid \langle \alpha_{j_n}, \delta_n \rangle\,, \quad \omega''_{j_n} = \omega_{j_n} \mid \langle \delta_n, \beta_{j_n} \rangle \quad \text{pro} \quad n = 1, \ldots, p\,.$$

Jsou tři možnosti: 1) $\gamma_0 < \delta_0$, 2) $\gamma_0 > \delta_0$, 3) $\gamma_0 = \delta_0$.[26])

Ad 1): Je-li $k = 0$, buď

$$(123) \qquad \lambda_1 = \omega_k \mid \langle \gamma_0, \delta_0 \rangle, \quad \dot{-}\lambda_2 = \omega_k \mid \langle \delta_0, \beta_k \rangle \dotplus \omega_k \mid \langle \alpha_k, \gamma_0 \rangle,$$
$$\dot{-}\lambda_3 = \omega'_{j_1} \dotplus \ldots \dotplus \omega'_{j_q} \dot{-} \lambda \dotplus \omega''_{i_p} \dotplus \ldots \dotplus \omega''_{i_1};$$

pak jsou $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ prosté křivky s počátečním (resp. koncovým) bodem $\omega_k(\gamma_0)$ (resp. $\omega_k(\delta_0)$), které splňují i podmínku (7) z věty 1. Křivka $\lambda_1 \dot{-} \lambda_2 = \omega_0$ je kladně orientována a $(\lambda_3) \subset \operatorname{Int}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_2)$; podle věty 1 je tedy i křivka $\lambda_1 \dot{-} \lambda_3$ kladně orientována. Položíme-li $D = \langle \lambda_1 \dot{-} \lambda_3 \rangle$ a užijeme-li věty 3, dokážeme snadno, že

$$(124) \qquad \bigcup_{m=1}^{p} \operatorname{Int} C_{i_m} \cup \bigcup_{n=1}^{q} \operatorname{Int} C_{j_n} \subset \operatorname{Int} D\,;$$

protože $C_s \cap D$ je oblouk jen tehdy, když buď $s = i_m$ pro vhodné $m = 1, \ldots, p$ nebo $s = j_n$ pro vhodné $n = 1, \ldots, q$, plyne ze (124) podmínka (64). Dále $H(\Omega) \cap D = D - \tilde{L}$ je oblouk a totéž platí i o množině $H(\Omega) \cap C_0 = \langle \lambda_1 \rangle$. Abychom nahlédli, že tvrzení věty 11 platí, stačí užít věty 9.

Buď nyní $k > 0$; křivky (123) mají tu vlastnost, že $(\lambda_3) \subset \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_2) = \operatorname{Ext} \omega_k$. Snadno opět dokážeme, že $(\lambda_2) \subset \operatorname{Ext}(\lambda_1 \dot{-} \lambda_3)$, takže podle věty 2 bude křivka $\lambda_3 \dot{-} \lambda_2$ kladně orientována a podle věty 3 bude

$$(125) \qquad \bigcup_{m=0}^{p} \operatorname{Int} C_{i_m} \cup \bigcup_{n=1}^{q} \operatorname{Int} C_{j_n} \subset \operatorname{Int} D\,,$$

klademe-li $D = \langle \lambda_3 \dot{-} \lambda_2 \rangle$. To zaručuje platnost podmínky (64); $H(\Omega) \cap D = D - \tilde{L}$ je oblouk, $(\omega_{n_0}) \cap D$ je jednobodová jen tehdy, je-li $\omega_{n_0} \lessdot \omega_k$. Podle věty 10 platí tvrzení věty 11 i v tomto případě.

Ad 2): Tento případ se vyšetří zcela analogicky jako případ 1); místo křivek (123) však užijeme křivek

$$(126) \qquad \lambda_1 = \omega_k \mid \langle \delta_0, \gamma_0 \rangle\,, \quad \dot{-}\lambda_2 = \omega_k \mid \langle \gamma_0, \beta_k \rangle \dotplus \omega_k \mid \langle \alpha_k, \delta_0 \rangle\,,$$
$$\dot{-}\lambda_3 = \omega'_{i_1} \dotplus \ldots \dotplus \omega'_{i_p} \dotplus \lambda \dotplus \omega''_{j_q} \dotplus \ldots \dotplus \omega''_{j_1}\,.$$

---

[26]) γ_0, δ_0 jsou body z (α_k, β_k), pro něž je $\omega_k(\gamma_0) =$ p. b. ω_{i_1}, $\omega_k(\delta_0) =$ p. b. ω_{j_1}.

Ad 3): Nyní je $\gamma_0 = \delta_0$; definujme:

$$(127) \qquad \mu_1 = \omega'_{i_1} \dotplus \ldots \dotplus \omega'_{i_p} \dotplus \lambda \dotplus \omega''_{j_q} \dotplus \ldots \dotplus \omega''_{j_1},$$
$$\mu_2 = \omega'_{j_1} \dotplus \ldots \dotplus \omega'_{j_q} \dot{-} \lambda \dotplus \omega''_{i_p} \dotplus \ldots \dotplus \omega''_{i_1}.$$

Podobně jako v odst. 4,3 dokážeme, že jedna z křivek (127) – nechť je to např. μ_1 – je kladně orientována; klademe-li pak $D = \langle \mu_1 \rangle$, bude platit (124), tedy i podmínka (64). Také ostatní předpoklady věty 10 se snadno ověří; tím je tvrzení věty 11 za situace C dokázáno.

4,5. Buď nyní L topologická kružnice, p. b. $\lambda \in (\omega_i)$, $(\lambda) \subset \Omega$. Ověřme předpoklady věty 10: Položme především $D = L$; topologická kružnice D má s $H(\Omega)$ společný jen jediný bod p. b. λ, který patří do (ω_i) (takže je ve větě 10 třeba klást $n_0 = i$). (64) platí, neboť $C_n \cap D$ není oblouk pro žádné n.

Tvrzení věty 11 pro případ D je – jak vidíme – přímým důsledkem věty 10.

Tím je věta 11 dokázána.

Poznámka 8. Protože důkazy provedené v odst. 4,2–4,5 byly založeny na větách 9 a 10, je za předpokladu věty 11 zřejmě

$$(128) \qquad \mathbf{V}(\Omega_1) \cup \mathbf{V}(\Omega_2) \subset \mathbf{V}(\Omega),$$

jestliže λ je prostá křivka, a

$$(129) \qquad \mathbf{V}(\Omega_1) \cup \mathbf{V}(\Omega_2) \subset \mathbf{V}(\Omega) \cup \{d\},$$

je-li λ Jordanova křivka; v posledním případě je $d =$ p. b. λ. (Sr. k tomu pozn. 5 a 6 v odst. 3,4 a 3,5.)

5,1. Věta 12. *Nechť φ je elementární křivka v $\mathbf{E}$; užívejme označení z odst.* 2,1. *Pak je každá komponenta množiny $\mathbf{S} - \langle \varphi \rangle$ elementární oblast, jejíž hranice má tvar $\bigcup_{i \in \mathscr{A}} \langle \varphi_i \rangle$, kde $\mathscr{A}$ je vhodná podmnožina množiny $\{1, \ldots, N\}$. Každé $\langle \varphi_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, N)$ je částí hranice právě dvou různých komponent množiny $\mathbf{S} - \langle \varphi \rangle$. Znamená-li P totéž jako ve větě* 4, *má $\mathbf{S} - \langle \varphi \rangle$ právě $P + 1$ komponent.*

Důkaz. Užívejme označení z věty 4; buď ještě

$$(130) \qquad A_q = \langle \psi_1 \rangle \cup \ldots \cup \langle \psi_q \rangle,$$

$$(131) \qquad B_q = \{i_1^1, \ldots, i_{K_1}^1, \ldots, i_1^q, \ldots, i_{K_q}^q\}$$

pro $q = 1, \ldots, P$. Protože

$$(132) \qquad \psi_1 = \varphi(i_1^1) \dotplus \ldots \dotplus \varphi(i_{K_1}^1)$$

je Jordanova křivka v $\mathbf{E}$, je (podle Jordanovy věty) $\mathbf{S} - A_1 = G_1 \cup G_2$, kde G_1, G_2 jsou disjunktní elementární oblasti stupně 0 (Jordanovy oblasti), jejichž společnou hranicí je

$$\bigcup_{j=1}^{K_1} \langle \varphi(i_j^1) \rangle = \bigcup_{i \in \mathscr{A}} \langle \varphi_i \rangle \,, \tag{133}$$

kde $\mathscr{A} = B_1$. Množiny G_1, G_2 jsou komponentami množiny $\boldsymbol{S} - A_1$; každé $\langle \varphi_i \rangle$, kde $i \in B_1$, je částí $H(G_1)$ i $H(G_2)$. Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{V}(G_1) = \boldsymbol{V}(G_2) = \emptyset$ [27]), je ovšem $\boldsymbol{V}(G_1) \cup \boldsymbol{V}(G_2) \subset \varphi(T)$ (kde T je množina (13)).

Předpokládejme, že pro některé $q = 2, \ldots, P$ má množina $\boldsymbol{S} - A_{q-1}$, právě q komponent, že každá z těchto komponent je elementární oblast s hranicí tvaru $\bigcup_{i \in \mathscr{A}} \langle \varphi_i \rangle$, kde $\mathscr{A}$ je vhodná část množiny B_{q-1}, že každé $\langle \varphi_i \rangle$, kde $i \in B_{q-1}$, je částí hranice právě dvou různých komponent množiny $\boldsymbol{S} - A_{q-1}$ a že $\boldsymbol{V}(\Omega) \subset \varphi(T)$ pro každou komponentu Ω množiny $\boldsymbol{S} - A_{q-1}$.

Protože $(\psi_q) \cap A_{q-1} = \emptyset$, je souvislá množina (ψ_q) obsažena v jisté komponentě Ω množiny $\boldsymbol{S} - A_{q-1}$; nechť $H(\Omega) \doteq \bigcup_{i \in \mathscr{A}} \langle \varphi_i \rangle$. Protože p. b. ψ_q, k. b. $\psi_q \in A_{q-1}$ a protože $\langle \varphi_i \rangle \cap (\varphi_j) = \emptyset$, jestliže $i \neq j$, je p. b. $\psi_q =$ p. b. φ_{i_1}, k. b. $\psi_q =$ p. b. φ_{i_2} pro vhodné dva indexy i_1, i_2 z $\mathscr{A}$.

Podle věty 11 je

$$\Omega - \langle \psi_q \rangle = \Omega_1 \cup \Omega_2 \,, \tag{134}$$

kde Ω_1, Ω_2 jsou disjunktní elementární oblasti, pro něž je

$$H(\Omega_1) \cup H(\Omega_2) = H(\Omega) \cup \langle \psi_q \rangle = \bigcup_{i \in \mathscr{A}} \langle \varphi_i \rangle \cup \bigcup_{j=1}^{K_q} \langle \varphi(i_j^q) \rangle \,, \tag{135}$$

$$H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2) = \langle \psi_q \rangle \cup K \,, \tag{136}$$

kde K je částí $\varphi(T)$.

Z toho plyne, že komponentami množiny $\boldsymbol{S} - A_q = (\boldsymbol{S} - A_{q-1}) - \langle \psi_q \rangle$ jsou oblasti Ω_1, Ω_2 a právě všechny komponenty množiny $\boldsymbol{S} - A_{q-1}$, různé od Ω, tedy vesměs elementární oblasti. Je jich zřejmě právě $q + 1$.

Každé $\langle \varphi(i_j^q) \rangle$ $(j = 1, \ldots, K_q)$ je obsaženo podle (136) jak v $H(\Omega_1)$, tak v $H(\Omega_2)$, ale není (vzhledem k tomu, že $(\psi_q) \cap A_{q-1} = \emptyset$) částí hranice žádné komponenty množiny $\boldsymbol{S} - A_q$, různé od Ω_1 i Ω_2.

Dokažme, že každé $\langle \varphi_i \rangle$, kde $i \in \mathscr{A}$, je obsaženo právě v jedné z množin $H(\Omega_1)$, $H(\Omega_2)$. Protože $\mathscr{A} \cap \{i_1^q, \ldots, i_{K_q}^q\} = \emptyset$ podle věty 4, plyne ze (136), že jen konečný počet bodů z $\langle \varphi_i \rangle$ může být obsažen v průniku $H(\Omega_1)$ s $H(\Omega_2)$.

Existuje tedy bod $a \in (\varphi_i)$, který leží např. v $H(\Omega_1)$ a neleží v $H(\Omega_2)$. Kdyby některý bod $b \in (\varphi_i)$ ležel v $H(\Omega_2)$, musel by na oblouku $X \subset (\varphi_i)$ s krajními body a, b ležet bod $c \in H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2)$ [28]). To však není možné, neboť by podle (136) muselo být

[27]) $\boldsymbol{V}(G_k)$ je (sr. s pozn. 4 v odst. 3,2) množina všech bodů z $H(G_k)$, které roztínají $H(G_k)$.

[28]) Abychom to nahlédli, stačí uvážit, že množiny $M_1 = H(\Omega_1) - H(\Omega_2)$, $M_2 = H(\Omega_2) - H(\Omega_1)$ jsou disjunktní a otevřené v $M = H(\Omega_1) \cup H(\Omega_2)$, tedy oddělené. Je buď $b \in H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2)$ a stačí klást $c = b$, nebo je $a \in M_1$, $b \in M_2$, načež oblouk X musí protnout $M - (M_1 \cup M_2) = H(\Omega_1) \cap H(\Omega_2)$.

$c \in K$, přičemž K je část $\varphi(T)$, kdežto X je s $\varphi(T)$ disjunktní. Z toho plyne, že $(\varphi_i) \subset H(\Omega_1)$, tedy i $\langle\varphi_i\rangle \subset H(\Omega_1)$.

Podobně bychom ovšem dokázali, že platí: $(\varphi_i) \cap H(\Omega_2) \neq \emptyset \Rightarrow \langle\varphi_i\rangle \subset H(\Omega_2)$.

Z toho, co jsme dokázali, je patrné, že každý z oblouků $\langle\varphi_i\rangle$, kde $i \in B_q$, leží na hranici právě dvou různých komponent množiny $\mathbf{S} - A_q$. Je-li $\langle\varphi_i\rangle = \langle\varphi(i_j^q)\rangle$ pro jisté $j = 1, \ldots, K_q$, jsou těmito komponentami Ω_1 a Ω_2; je-li $\langle\varphi_i\rangle = \langle\varphi(i_j^l)\rangle$, kde $i_j^l \in B_{q-1}$, leží $\langle\varphi_i\rangle$ na hranici právě jedné z oblastí Ω_1, Ω_2 a ještě právě jedné komponenty množiny $\mathbf{S} - A_{q-1}$, různé od Ω.

Protože podle indukčního předpokladu $\mathbf{V}(\Omega) \subset \varphi(T)$ a protože podle pozn. 8 v odst. 4,5 je $\mathbf{V}(\Omega_1) \cup \mathbf{V}(\Omega_2) \subset \mathbf{V}(\Omega)$ v případě, že ψ_q je prostá křivka, a $\mathbf{V}(\Omega_1) \cup \mathbf{V}(\Omega_2) \subset \mathbf{V}(\Omega) \cup \{\text{p. b. } \psi_q\}$, je-li ψ_q Jordanova křivka, je zřejmě $\mathbf{V}(\Omega_1) \cup \mathbf{V}(\Omega_2) \subset \varphi(T)$ (v obou případech). Analogická tvrzení pro ostatní komponenty množiny $\mathbf{S} - A_q$ plynou z indukčního předpokladu.

Tím je indukční krok proveden; abychom nahlédli, že i věta 12 je dokázána, stačí uvážit, že $\{1, \ldots, N\} = B_p$.

5,2. Nechť

(137) $\quad L_0, L_1, \ldots, L_p$, kde $p \geqq 1$, jsou oblouky;

(138) $\quad a_k, b_k$ nechť jsou (pro $k = 0, \ldots, p$) krajní body oblouku L_k.

Nechť

(139) $\quad$ oblouky L_0, L_1 mají tytéž krajní body

a nechť

(140) $$1 \leqq k \leqq p \Rightarrow L_k \cap (L_0 \cup \ldots \cup L_{k-1}) = \{a_k, b_k\}.$$

Pak budeme říkat, že posloupnost $L_0, \ldots, L_p$ tvoří *síť*

(141) $$\Lambda = \bigcup_{k=0}^{p} L_k .$$

Věta 13. *Nechť Ω je elementární oblast určená elementárním systémem $\mathfrak{M} = \{C_n\}_{n=0}^N$ s basí C_0. Pak existuje posloupnost $L_0, L_1, \ldots, L_p$ oblouků, která tvoří síť* (141), *přičemž*

(142) $$L_0 \cup L_1 = C_0 ,$$

(143) $$H(\Omega) \subset \Lambda \subset \bar{\Omega} .$$

Důkaz. Postupujeme indukcí podle stupně oblasti Ω. Je-li stupeň N oblasti Ω roven 0, je Ω Jordanova oblast s hranicí C_0. Za L_0, L_1 můžeme pak zvolit libovolné dva oblouky s týmiž krajními body, pro něž je $L_0 \cup L_1 = C_0$.

Předpokládejme, že tvrzení věty je správné pro všechny elementární oblasti stupňů $<N$, kde $N \geqq 1$ je libovolné číslo; nechť Ω je jako v předpokladech věty 13 a nechť má stupeň N. Zvolme libovolně $C_j \in \mathfrak{M}_1$. Protože množina A všech bodů z $H(\Omega)$, které jsou dosažitelné z Ω, je hustá v $H(\Omega)$ [29], a protože množiny $C_0 - \mathbf{V}(\Omega)$, $C_j - \mathbf{V}(\Omega)$ jsou zřejmě otevřené v $H(\Omega)$, existují body $a \in C_0 - \mathbf{V}(\Omega)$, $a \neq a_0$, a $b \in C_j - \mathbf{V}(\Omega)$, dosažitelné z Ω. Existuje tedy prostá křivka λ tak, že p. b. $\lambda = a$, k. b. $\lambda = b$, $(\lambda) \subset \Omega$; buď $L = \langle\lambda\rangle$.

Užijme poznámky 7 z odst. 4,3 (i s označením tam zavedeným); buď ještě $L_0 = L \cup X$. Protože oblasti Ω_1, Ω_2 mají obě stupeň $<N$, existuje podle indukčního předpokladu posloupnost $L_0^1, L_1^1, \ldots, L_q^1$ resp. $L_0^2, L_1^2, \ldots, L_r^2$ oblouků, které tvoří síť Λ^1 resp. Λ^2, pro něž je

$$H(\Omega_1) \subset \Lambda^1 \subset \bar{\Omega}_1 \quad \text{resp.} \quad H(\Omega_2) \subset \Lambda^2 \subset \bar{\Omega}_2\,, \tag{144}$$

přičemž

$$L_0^1 \cup L_1^1 \quad \text{je base} \quad \Omega_1\,, \qquad L_0^2 \cup L_1^2 \quad \text{base} \quad \Omega_2\,. \tag{145}$$

Snadno se nahlédne, že posloupnost

$$L_0^1, L_1^1, L_2^1, \ldots, L_q^1, Y, L_2, L_2^2, \ldots, L_r^2 \tag{146}$$

oblouků tvoří síť; stačí vzít v úvahu, že $\tilde{Y} \subset \mathbf{S} - \bar{\Omega}_1 \subset \mathbf{S} - \Lambda^1$, že krajní body a_j, b oblouku Y leží v Λ^1, že $\tilde{L}_2 \subset \mathbf{S} - (\Lambda^1 \cup Y)$, že krajní body a_j, a oblouku L_2 leží v $\Lambda^1 \cup Y$, a že $L_0^2 \cup L_1^2 \subset \Lambda^1 \cup Y \cup L_2 \subset \mathbf{S} - \Omega_2$.

Tím je důkaz věty 13 proveden.

5,3. Věta 14. *Komponenty množiny $\mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$, kde φ je elementární křivka z odst. 2,1, lze srovnat do prosté posloupnosti $G_0, \ldots, G_P$ [30] tak, že pro každé $q = 1, \ldots, P$ obsahuje množina*

$$\bar{G}_q \cap (\bar{G}_0 \cup \ldots \cup \bar{G}_{q-1}) = H(G_q) \cap (H(G_0) \cup \ldots \cup H(G_{q-1})) \tag{147}$$

některé $\langle\varphi_i\rangle$ $(i = 1, \ldots, N)$; G_0 může být přitom libovolná předem daná komponenta množiny $\mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$.

Důkaz. Poznamenejme především, že rovnost (147) platí pro každé $q = 1, \ldots, P$, neboť množiny $G_0, \ldots, G_P$ jsou oddělené (takže pro každé dva různé indexy q_1, q_2 je $\bar{G}_{q_1} \cap \bar{G}_{q_2} = H(G_{q_1}) \cap H(G_{q_2})$). Dále poznamenejme, že užíváme-li označení z věty 4, má množina $\mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$ podle věty 12 právě $P + 1$ komponent.

Buď G_0 libovolná komponenta množiny $\mathbf{S} - \langle\varphi\rangle$ a předpokládejme, že jsme již

[29]) Pojem dosažitelnosti a větu zaručující hustotu A v $H(\Omega)$ viz v [1], str. 525 a 527. (Dalo by se dokázat, že všechny body z $H(\Omega)$ jsou dosažitelné z Ω.)

[30]) P je jako ve větě 4.

definovali $G_0, \ldots, G_q$, kde $0 \leqq q < P$, a to tak, že platí:

(148) $1 \leqq r \leqq q \Rightarrow \bar{G}_r \cap (\bar{G}_0 \cup \ldots \cup \bar{G}_{r-1})$ obsahuje $\langle \varphi_i \rangle$ pro vhodné $i = 1, \ldots, N$.

Označme

(149) $\mathscr{A} = \{i;\ \langle \varphi_i \rangle \subset H(G_r)$ pro některé $r = 0, \ldots, q\}$,

$\mathscr{B} = \{i;$ existují r, s tak, že $0 \leqq r < s \leqq q$ a že $\langle \varphi_i \rangle \subset H(G_r) \cap H(G_s)\}$.

Pak je ovšem $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$; ukažme, že není $\mathscr{B} = \mathscr{A}$. Definujme k tomu účelu ještě množiny

(150) $\mathscr{C} = \{i;\ \langle \varphi_i \rangle$ je částí hranice některé komponenty množiny $\boldsymbol{S} - \langle \varphi \rangle$, různé ode všech G_r, kde $0 \leqq r \leqq q\}$,

$\mathscr{D} = \{i;\ \langle \varphi_i \rangle$ je částí průniku hranic dvou různých komponent množiny $\boldsymbol{S} - \langle \varphi \rangle$, z nichž žádná není rovna žádné z množin $G_0, \ldots, G_q\}$.

Protože podle věty 12 je každé $\langle \varphi_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, N)$ částí hranice některé komponenty množiny $\boldsymbol{S} - \langle \varphi \rangle$, je

(151) $$\mathscr{A} \cup \mathscr{C} = \{1, \ldots, N\}\ ;$$

kromě toho je zřejmě $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$, $\mathscr{B} \cap \mathscr{D} = \emptyset$.

Buď $X = \bigcup_{j=0}^{q} G_j$, Y sjednocení všech ostatních komponent množiny $\boldsymbol{S} - \langle \varphi \rangle$; vzhledem k tomu, že $0 \leqq q < P$, je $X \neq \emptyset \neq Y$. Podle věty 12 má $H(G_j)$ $(0 \leqq j \leqq q)$ tvar $\bigcup_i \langle \varphi_i \rangle$, kde se sčítá zřejmě přes ta i, pro něž je $\langle \varphi_i \rangle \subset H(G_j)$; taková i patří do $\mathscr{A}$. Sjednocení všech $H(G_j)$, kde $0 \leqq j \leqq q$, je rovno $\bigcup_{i \in \mathscr{A}} \langle \varphi_i \rangle$, takže

(152) $$\bar{X} = X \cup \bigcup_{i \in \mathscr{A}} \langle \varphi_i \rangle\,.$$

Podobně je

(153) $$\bar{Y} = Y \cup \bigcup_{i \in \mathscr{C}} \langle \varphi_i \rangle\,.$$

Předpokládejme, že $\mathscr{B} = \mathscr{A}$; pak je zřejmě také $\mathscr{D} = \mathscr{C}$, takže v (152) resp. (153) můžeme místo $\mathscr{A}$ resp. $\mathscr{C}$ psát $\mathscr{B}$ resp. $\mathscr{D}$. Množiny X, Y jsou disjunktní; to plyne ihned z jejich definice. Dále je $X \cap \langle \varphi_i \rangle = Y \cap \langle \varphi_i \rangle = \emptyset$ pro každé $i = 1, \ldots, N$. Protože $\mathscr{B} \cap \mathscr{D} = \emptyset$ a $\langle \varphi_i \rangle \cap \langle \varphi_j \rangle \subset \varphi(T)$, je-li $i \neq j$, plyne tedy z (152) a (153), že

(154) $$\bar{X} \cap \bar{Y} \subset \varphi(T)\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathscr{A} \cup \mathscr{C} = \{1, \ldots, N\}$, je

(155) $$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{S} - \langle \varphi \rangle) \cup \langle \varphi \rangle = (X \cup Y) \cup \bigcup_{i \in \mathscr{A}} \langle \varphi_i \rangle \cup \bigcup_{i \in \mathscr{C}} \langle \varphi_i \rangle = \bar{X} \cup \bar{Y}\,.$$

Vztahy (154) a (155) znamenají, že konečná množina $\bar{X} \cap \bar{Y}$ roztíná $\mathbf{S}$ mezi kterýmikoliv dvěma body $a \in X$, $b \in Y$[31]; to však je spor[32], neboť $X \neq \emptyset \neq Y$.

Tím je dokázán vztah $\mathscr{B} \subsetneqq \mathscr{A}$; buď $i \in \mathscr{A} - \mathscr{B}$. Pak zřejmě existuje r tak, že $0 \leqq r \leqq q$ a že $\langle \varphi_i \rangle \subset H(G_r)$, a $\langle \varphi_i \rangle$ je částí hranice ještě některé komponenty množiny $\mathbf{S} - \langle \varphi \rangle$, různé ode všech G_j, $0 \leqq j \leqq q$. Označíme-li tuto komponentu G_{q+1}, vidíme, že závěr implikace (148) platí pro všechna $r = 0, \ldots, q + 1$.

Tím je indukční krok proveden a věta 14 dokázána.

5,4. Věta 15. *Je-li φ elementární křivka, existuje posloupnost $L_0, L_1, \ldots, L_p$ oblouků tvořící síť, která obsahuje $\langle \varphi \rangle$.*

Důkaz. Je-li $\infty \in \langle \varphi \rangle$, zvolme libovolný bod $a \in \mathbf{E} - \langle \varphi \rangle$ a proveďme transformaci $F(z) = 1/(z - a)$. Pak je $F * \varphi$ elementární křivka v $\mathbf{E}$; najdeme-li posloupnost $L_0^*, L_1^*, \ldots, L_p^*$ oblouků tvořící síť $\Lambda^* \supset \langle F * \varphi \rangle$, bude zřejmě $L_0, L_1, \ldots, L_p$, kde $L_k = F_{-1}(L_k^*)$ pro $k = 0, \ldots, p$, posloupnost oblouků tvořící síť $\Lambda = F_{-1}(\Lambda^*)$, která obsahuje $\langle \varphi \rangle = F_{-1}(\langle F * \varphi \rangle)$.

Z tohoto plyne, že můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že φ je křivka v $\mathbf{E}$, takže $\mathbf{S} - \langle \varphi \rangle$ má pravě jednu neomezenou komponentu, kterou označíme G_0. Buď $G_0, \ldots, G_P$ prostá posloupnost obsahující právě všechny komponenty množiny $\mathbf{S} - \langle \varphi \rangle$, přičemž množina (147) obsahuje pro každé $q = 1, \ldots, P$ vždy některou z množin $\langle \varphi_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, N)$[33].

1. Je-li C_0^q base elementární oblasti G_q $(0 \leqq q \leqq P)$[34], je vzhledem k tomu, že G_0 resp. G_q pro $q = 1, \ldots, P$ je neomezená resp. omezená, nutně

$$(156) \qquad G_0 \subset \operatorname{Ext} C_0^0\,, \quad G_q \subset \operatorname{Int} C_0^q \quad \text{pro} \quad q = 1, \ldots, P\,.$$

Dokažme, že

$$(157) \qquad \bar{G}_q \cap (\bar{G}_0 \cup \ldots \cup \bar{G}_{q-1}) \subset C_0^q \quad \text{pro} \quad q = 1, \ldots, P\,.$$

Protože (pro každé $q = 1, \ldots, P$)

$$(158) \qquad \bar{G}_q \subset \overline{\operatorname{Int} C_0^q} = C_0^q \cup \operatorname{Int} C_0^q\,,$$

existuje v případě, že (157) neplatí, q tak, že

$$(159) \qquad (\bar{G}_0 \cup \ldots \cup \bar{G}_{q-1}) \cap \operatorname{Int} C_0^q \neq \emptyset\,.$$

Buď r nejmenší index, pro který je $\bar{G}_r \cap \operatorname{Int} C_0^q \neq \emptyset$; pak tedy je

$$(160) \qquad (\bar{G}_0 \cup \ldots \cup \bar{G}_{r-1}) \cap \operatorname{Int} C_0^q = \emptyset\,.$$

---

[31]) Sr. s [1], str. 110 (věta 76).

[32]) $\mathbf{S} - K$, kde K je konečná množina, je oblast — viz [1], str. 99 (věta 66).

[33]) Užíváme věty 14 a označení z odst. 3,1.

[34]) Base neomezené oblasti G_0 nemusí být určena jednoznačně — C_0^0 nechť znamená kteroukoliv basi G_0; base omezených oblastí $G_1, \ldots, G_P$ jsou určeny jednoznačně. (Sr. s pozn. 3 v odst. 3,1.)

Předpokládejme, že je $r = 0$; pak ze vztahu $\bar{G}_0 \cap \operatorname{Int} C_0^q \neq \emptyset$ plyne, že i $G_0 \cap \cap \operatorname{Int} C_0^q \neq \emptyset$, tedy že oblast G_0, disjunktní s $\langle \varphi \rangle$ a tím spíše i s C_0^q, obsahuje bod $\infty \in \operatorname{Ext} C_0^q$ i body z $\operatorname{Int} C_0^q$. To však je nemožné.

Nechť $r > 0$; ze vztahu $\bar{G}_r \cap \operatorname{Int} C_0^q \neq \emptyset$ plyne, že $G_r \cap \operatorname{Int} C_0^q \neq \emptyset$. Protože G_r je oblast neprotínající $\langle \varphi \rangle$, tedy ani C_0^q, je nutně

$$(161) \qquad G_r \subset \operatorname{Int} C_0^q .$$

G_q je – jak víme z věty 12 – elementární oblast; nechť je určena elementárním systémem $\{C_n^q\}_{n=0}^N$, tj. nechť

$$(162) \qquad G_q = \operatorname{Int} C_0^q - \bigcup_{n=1}^{N} \overline{\operatorname{Int} C_n^q} .$$

Protože G_r, G_q jsou dvě různé komponenty množiny $S - \langle \varphi \rangle$, je $G_r \cap G_q = \emptyset$; z toho, ze (161) a (162) plyne, že $G_r \subset \overline{\operatorname{Int} C_n^q}$, takže i

$$(163) \qquad \bar{G}_r \subset \overline{\operatorname{Int} C_n^q}$$

pro vhodné $n = 1, \ldots, N$. Z toho a ze (160) dále plyne, že

$$(\bar{G}_0 \cup \ldots \cup \bar{G}_{r-1}) \cap \bar{G}_r \subset \overline{\operatorname{Ext} C_0^q} \cap \overline{\operatorname{Int} C_n^q} ,$$

přičemž poslední průnik je buď prázdný neb jednobodový. To je však ve sporu s podmínkou, že množina $(\bar{G}_0 \cup \ldots \cup \bar{G}_{r-1}) \cap \bar{G}_r$ má obsahovat oblouk nebo topologickou kružnici $\langle \varphi_i \rangle$ pro vhodné $i = 1, \ldots, N$.

Tím je (157) dokázáno.

2. Podle věty 13 existuje posloupnost oblouků $L_0^0, \ldots, L_r^0$ tvořící síť Λ_0, pro niž je

$$(164) \qquad H(G_0) \subset \Lambda_0 \subset \bar{G}_0 , \quad L_0^0 \cup L_1^0 = C_0^0 .$$

Předpokládejme, že existuje posloupnost $L_0, \ldots, L_s$ oblouků tvořící síť Λ', pro niž je

$$(165) \qquad \bigcup_{j=0}^{q-1} H(G_j) \subset \Lambda' \subset \bigcup_{j=0}^{q-1} \bar{G}_j ,$$

přičemž $0 < q \leqq P$. Ukažme, jak lze posloupnost $L_0, \ldots, L_s$ doplnit o další členy $L_{s+1}, \ldots, L_t$ tak, aby posloupnost $L_0, \ldots, L_t$ tvořila síť Λ'', pro niž je

$$(166) \qquad \bigcup_{j=0}^{q} H(G_j) \subset \Lambda'' \subset \bigcup_{j=0}^{q} \bar{G}_j .$$

Tím bude proveden indukční krok a věta 15 bude dokázána.

Podle (165) a (157) je

$$(167) \qquad \Lambda' \cap \bar{G}_q \subset C_0^q ;$$

jsou dvě možnosti: Buď

$$C_0^q \subset \bigcup_{j=0}^{q-1} H(G_j)\,, \tag{168}$$

nebo

$$C_0^q - \bigcup_{j=0}^{q-1} H(G_j) \neq \emptyset\,. \tag{169}$$

Nechť nastane (168); podle věty 13 existuje posloupnost $L_{s-1}^*, L_s^*, L_{s+1}, \ldots, L_t$ oblouků tvořící síť, pro niž je

$$L_{s-1}^* \cup L_s^* = C_0^q\,, \tag{170}$$

přičemž

$$H(G_q) \subset \Lambda^* \subset \bar{G}_q\,. \tag{171}$$

Abychom nahlédli, že posloupnost

$$L_0, L_1, \ldots, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_t \tag{172}$$

tvoří síť, uvažme, že 1) $L_0, \ldots, L_s$ tvoří síť Λ', 2) $L_{s-1}^* \cup L_s^* = C_0^q \subset \bigcup_{j=0}^{q-1} H(G_j) \subset \Lambda'$ (podle (170), (168), (165)), 3) $\Lambda' \subset \bigcup_{j=1}^{q-1} \bar{G}_j$ (podle (165)), $L_{s+1} \cup \ldots \cup L_t \subset \bar{G}_q$ (podle (171)), takže pro každé $k = s + 1, \ldots, t$ je

$$\begin{aligned} L_k \cap (L_0 \cup \ldots \cup L_s) &\subset L_k \cap \bar{G}_q \cap \bigcup_{j=1}^{q-1} \bar{G}_j \subset L_k \cap C_0^q = \\ &= L_k \cap (L_{s-1}^* \cup L_s^*) \subset L_k \cap (L_0 \cup \ldots \cup L_s)\,; \end{aligned} \tag{173}$$

inkluse v (173) lze tedy změnit na rovnosti. Odtud plyne, že

$$L_k \cap (L_0 \cup \ldots \cup L_{k-1}) = L_k \cap (L_{s-1}^* \cup L_s^* \cup L_{s+1} \cup \ldots \cup L_{k-1}) \tag{174}$$

pro každé $k = s + 1, \ldots, t$; protože posloupnost $L_{s-1}^*, L_s^*, L_{s+1}, \ldots, L_t$ tvoří síť, je průnik na pravé – a tedy i na levé straně (174) roven množině složené z obou krajních bodů oblouku L_k.

Posloupnost (172) tvoří síť Λ'', pro niž platí (166); abychom to nahlédli, stačí užít vztahů (165), (171) a zřejmé rovnosti $\Lambda'' = \Lambda' \cup \Lambda^*$.

Předpokládejme nyní, že platí (169); vzhledem k tomu, že $C_0^q \subset H(G_q)$, je

$$C_0^q - \bigcup_{j=1}^{q-1} H(G_j) = C_0^q - \bigcup_{j=1}^{q-1} H(G_j) \cap H(G_q)\,. \tag{175}$$

Podle věty 12 má každá z množin $H(G_m)$ tvar $\bigcup_{i \in \mathscr{A}_m} \langle \varphi_i \rangle$, kde $\mathscr{A}_m$ je vhodná část množiny $\{1, \ldots, N\}$. Pro $i_1 \neq i_2$ je $\langle \varphi_{i_1} \rangle \cap \langle \varphi_{i_2} \rangle \subset \varphi(T)$ (kde T je množina (13)), takže každá z množin $H(G_j) \cap H(G_q)$ má tvar $\bigcup_{i \in \mathscr{B}_j} \langle \varphi_i \rangle \cup K_j$, kde $\mathscr{B}_j$ je vhodná část množiny $\{1, \ldots, N\}$, K_j vhodná část $\varphi(T)$. Množina (175) tedy vznikne z topologické kružnice C_0^q odstraněním konečného počtu oblouků $\langle\varphi_i\rangle$ a konečného počtu bodů z $\varphi(T)$ v ní obsažených. Z toho plyne, že

$$(176)\qquad C_0^q - \bigcup_{j=0}^{q-1} H(G_j) = \tilde{L}_{s+1} \cup \ldots \cup \tilde{L}_u\,,$$

kde otevřené oblouky vpravo jsou disjunktní a každý z oblouků $L_{s+1}, \ldots, L_u$ má oba své krajní body v $\bigcup_{j=0}^{q-1} H(G_j)$ (což je částí Λ'). Z toho ihned plyne, že posloupnost

$$(177)\qquad L_0, L_1, \ldots, L_s, L_{s+1}, \ldots, L_u$$

tvoří síť Λ^{**}, pro niž platí:

$$(178)\qquad \bigcup_{j=0}^{q-1} H(G_j) \cup C_0^q \subset \Lambda^{**} \subset \bigcup_{j=0}^{q-1} \bar{G}_j \cup C_0^q\,.$$

Buď ještě $*L_{u-1}$, $*L_u$, $L_{u+1}, \ldots, L_t$ posloupnost oblouků tvořící síť $*\Lambda$, pro niž je

$$(179)\qquad H(G_q) \subset *\Lambda \subset \bar{G}_q\,,$$

$$(180)\qquad *L_{u-1} \cup *L_u = C_0^q\,.$$

Podobně jako v případě, že platilo (168), snadno nahlédneme i nyní, že pro $k = u + 1, \ldots, t$ je

$$(181)\qquad L_k \cap \bigcup_{i=0}^{k-1} L_i = L_k \cap (*L_{u-1} \cup *L_u \cup L_{u+1} \cup \ldots \cup L_{k-1})\,,$$

odkud snadno plyne, že posloupnost $L_0, \ldots, L_t$ tvoří hledanou síť Λ'' (pro niž platí (166)).

6,1. Lemma. *Nechť*

(182) *posloupnost* $L_0, \ldots, L_p$ *oblouků tvoří síť* Λ,

která obsahuje $\langle\varphi\rangle$, *kde* φ *je elementární křivka jako v odst.* 2,1. *Pak existuje dělení*

$$(183)\qquad D : \alpha = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = \beta$$

intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ *tak, že křivka*

(184) $\varphi^i = \varphi \mid \langle\tau_{i-1}, \tau_i\rangle$ *je pro každé* $i = 1, \ldots, n$ *prostá*

a že

(185) *pro každé* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *existuje* $j \in \{0, \ldots, p\}$ *tak, že* $\langle\varphi^i\rangle \subset L_j$.

Důkaz. Buďte $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < < t_M = \beta$ právě všechny body množiny (13); jak víme, je každá křivka $\varphi_i = \varphi \mid \langle t_{i-1}, t_i\rangle$ buď prostá nebo Jordanova. Zvolíme-li pro každé $i = 1, \ldots, M$ bod $s_i \in (t_{i-1}, t_i)$ (libovolně), je φ prostá v každém intervalu dělení

$$\Delta : \alpha = t_0 < s_1 < t_1 < s_2 < \ldots < s_M < t_M = \beta .$$

Je-li dělení (183) zjemněním dělení Δ, platí tedy (184) tím spíše.

Označme W množinu krajních bodů všech oblouků L_j $(0 \leqq j \leqq p)$. Pro každé j je pak

(186) $$L_j - W = \bigcup_{k=1}^{q_j} \tilde{Z}_k^j ,$$

kde sjednocení vpravo je disjunktní, přičemž Z_k^j jsou oblouky, jejichž oba krajní body leží ve W, $q_j \geqq 1$ pro $j = 0, \ldots, p$.

Tvrdíme, že systém $\mathfrak{X} = \{\tilde{Z}_k^j\}$, kde $0 \leqq j \leqq p$, $0 \leqq k \leqq q_j$, obsahuje právě všechny komponenty množiny $\Lambda - W$. Protože $\tilde{Z}_k^j$ jsou souvislé množiny (jejichž sjednocení je $\Lambda - W$), stačí ještě ukázat, že když $\tilde{Z}_k^{j_1} \neq \tilde{Z}_l^{j_2}$, jsou $\tilde{Z}_k^{j_1}$, $\tilde{Z}_l^{j_2}$ oddělené množiny.

Buďte tedy $\tilde{Z}_k^{j_1}$, $\tilde{Z}_l^{j_2}$ dva různé prvky z $\mathfrak{X}$; pak je buď $j_1 = j_2$ nebo $j_1 \neq j_2$. V prvním případě jsou $\tilde{Z}_k^{j_1}$, $\tilde{Z}_l^{j_2}$ dva disjunktní otevřené oblouky obsažené v L_{j_1}, tedy dvě disjunktní množiny otevřené v L_{j_1}, tedy dvě oddělené množiny. Ve druhém případě plyne ze (182), že $L_{j_1} \cap L_{j_2} \subset W$, takže např.

$$\overline{\tilde{Z}_k^{j_1}} \cap \tilde{Z}_l^{j_2} \subset L_{j_1} \cap L_{j_2} \cap (\Lambda - W) = \emptyset ;$$

z toho opět plyne oddělenost množin $\tilde{Z}_k^{j_1}$, $\tilde{Z}_l^{j_2}$.

Protože pro každé $z \in \langle\varphi\rangle$ je množina $\varphi_{-1}(z)$ konečná a protože také W je konečná množina, je konečná i množina $\varphi_{-1}(W)$. Obsahuje-li dělení (183) jako dělicí body všechny body množiny $\varphi_{-1}(W)$, je pro každé $i = 1, \ldots, n$ souvislá množina (φ^i) částí $\Lambda - W$, tedy částí některé komponenty $\tilde{Z}_k^j$ množiny $\Lambda - W$, tedy i částí příslušného oblouku L_j; pak je ovšem i $\langle\varphi^i\rangle \subset L_j$. Z toho plyne platnost podmínky (185).

Zvolíme-li dělení (183) tak, aby bylo zjemněním dělení Δ a aby zároveň obsahovalo všechny body množiny $\varphi_{-1}(W)$ jako dělicí body, bude zřejmě platit jak (184) tak (185).

6,2. Věta 16. *Pro každou elementární křivku φ existuje homeomorfní zobrazení h množiny $\mathbf{S}$ na sebe, pro něž je $h * \varphi$ křivka po částech lineární.*

Důkaz. Buď φ jako v odst. 2,1; buď (sr. s větou 15) $L_0, \ldots, L_p$ posloupnost oblouků tvořící síť Λ, pro niž je $\langle\varphi\rangle \subset \Lambda$; buď D dělení (183) (z lemmatu v odst. 6,1), které má vlastnosti (184) a (185).

1. Zvolme pevně j, $0 \leqq j \leqq p$; předpokládejme, že oblouk L_j je orientován, takže je v něm zavedeno uspořádání $\prec$. Funkce φ je na každém intervalu $\langle\tau_{i-1}, \tau_i\rangle$ prostá, takže $\langle\varphi^i\rangle$ je oblouk. Nechť

(187) $$Z = \{i; \langle\varphi^i\rangle \subset L_j\} ;$$

jsou-li $i_1 \neq i_2$ dvě čísla ze Z, mají oblouky $\langle \varphi^{i_1} \rangle$, $\langle \varphi^{i_2} \rangle$ nejvýše jeden bod společný (neboť jinak by jejich průnik byl nespočetný, což by odporovalo konečnosti množiny T).[35]) Buď q počet prvků množiny Z, r počet komponent množiny

$$L_j - \bigcup_{i \in Z} \langle \varphi^i \rangle . \tag{188}$$
[36])

Existují oblouky M_m, $1 \leqq m \leqq s$, kde $s = q + r$, s krajními body $a_m \prec b_m$ tak, že

$$L_j = M_1 \cup \ldots \cup M_s , \tag{189}$$

$$a_m = b_{m-1} \quad \text{pro každé} \quad m = 2, \ldots, s , \tag{190}$$

přičemž každý z oblouků $\langle \varphi^i \rangle$, kde $i \in Z$, je roven některému M_m.

Buď μ_j po částech lineární prosté zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$; pak jistě existuje dělení

$$\Delta : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_s = 1 \tag{191}$$

tak, že μ_j je po částech lineární v každém $\langle \sigma_{k-1}, \sigma_k \rangle$.

Nechť $1 \leqq m \leqq s$. Je-li M_m různé ode všech $\langle \varphi^i \rangle$, $i \in Z$, buď Φ_m libovolné homeomorfní zobrazení intervalu $\langle \sigma_{m-1}, \sigma_m \rangle$ na M_m, pro něž

$$\Phi_m(\sigma_{m-1}) = a_m , \quad \Phi_m(\sigma_m) = b_m . \tag{192}$$

Je-li $M_m = \langle \varphi^i \rangle$ pro některé $i \in Z$, buď λ_m lineární zobrazení intervalu $\langle \sigma_{m-1}, \sigma_m \rangle$ na $\langle \tau_{i-1}, \tau_i \rangle$, které je rostoucí nebo klesající podle toho, zda $\varphi(\tau_{i-1}) \prec \varphi(\tau_i)$ nebo $\varphi(\tau_{i-1}) \succ \varphi(\tau_i)$; definujme pak: $\Phi_m = \varphi * \lambda_m$. Jak ihned nahlédneme, je i nyní Φ_m homeomorfní zobrazení intervalu $\langle \sigma_{m-1}, \sigma_m \rangle$ na M_m, pro něž platí (192).

Z toho a ze (190) plyne, že lze v $\langle 0, 1 \rangle$ definovat zobrazení Φ^j podmínkami

$$\Phi^j(t) = \Phi_m(t) , \quad \text{je-li} \quad t \in \langle \sigma_{m-1}, \sigma_m \rangle , \quad m = 1, \ldots, s , \tag{193}$$

a že takto definované Φ^j je homeomorfním zobrazením $\langle 0, 1 \rangle$ na L_j, pro něž je $\Phi^j(0) = \text{p. b. } L_j$.

Označíme-li $h^j = \mu_j * (\Phi^j)_{-1}$, je h^j homeomorfní zobrazení L_j na $\langle \mu_j \rangle$, pro které je $h^j(\text{p. b. } L_j) = \mu_j(0)$. Buď $i \in Z$; pak je $\langle \varphi^i \rangle = M_m$ pro vhodné m $(1 \leqq m \leqq s)$ a

$$h^j * \varphi^i = \mu_j * (\Phi^j)_{-1} * \varphi^i = \mu_j * (\lambda_m)_{-1} * (\varphi^i)_{-1} * \varphi^i = \mu_j * (\lambda_m)_{-1} ,$$

odkud je patrné, že $h^j * \varphi^i$ je prosté a po částech lineární.

Résumé toho, co jsme zatím dokázali: Je-li $0 \leqq j \leqq p$, je-li oblouk L_j orientován a je-li μ_j prosté po částech lineární zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, existuje homeomorfní zobrazení h^j oblouku L_j na $\langle \mu_j \rangle$, pro něž je $h^j(\text{p. b. } L_j) = \mu_j(0)$, $h^j * \varphi^i$ po částech lineární pro každé i, pro něž je $\langle \varphi^i \rangle \subset L_j$.

---

[35]) $\{\langle \varphi^i \rangle\}_{i \in Z}$ je tedy (event. prázdný) systém „nepřekrývajících se oblouků" obsažených v L_j.

[36]) Komponentami množiny (188) jsou jisté otevřené resp. „polouzavřené" oblouky, je-li $Z \neq \emptyset$; je-li $Z = \emptyset$, je jedinou komponentou množiny (188) celé L_j.

2. Buďte oblouky L_0, L_1 orientovány tak, aby bylo p. b. L_1 = k. b. L_0 (takže k. b. L_1 = p. b. L_0); buďte μ_0, μ_1 (libovolná) prostá po částech lineární zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, pro něž je $\mu_1(0) = \mu_0(1)$, $\mu_1(1) = \mu_0(0)$, $(\mu_1) \cap \langle \mu_0 \rangle = \emptyset$. Podle résumé 1. části důkazu tedy existuje homeomorfní zobrazení h^0 resp. h^1 oblouku L_0 resp. L_1 na $\langle \mu_0 \rangle$ resp. $\langle \mu_1 \rangle$ tak, že

$$h^0(\text{p. b. } L_0) = \mu_0(0)\,, \quad h^1(\text{p. b. } L_1) = \mu_1(0)$$

a že $h^0 * \varphi^i$ resp. $h^1 * \varphi^i$ je po částech lineární pro každé i, pro něž je $\langle \varphi^i \rangle \subset L_0$ resp. $\langle \varphi^i \rangle \subset L_1$.

Jak snadno nahlédneme, lze definovat zobrazení h_1 na $L_0 \cup L_1$ předpisem

$$(194) \qquad h_1(z) = \begin{cases} h^0(z)\,, & \text{je-li } z \in L_0\,, \\ h^1(z)\,, & \text{je-li } z \in L_1\,; \end{cases}$$

h_1 je přitom homeomorfním zobrazením topologické kružnice $A_1 = L_0 \cup L_1$ na topologickou kružnici $B_1 = \langle \mu_0 \rangle \cup \langle \mu_1 \rangle$ a $h_1 * \varphi^i$ je po částech lineární pro každé i, pro něž je $\langle \varphi^i \rangle \subset A_1$.

Podle Jordanovy věty je

$$(195) \qquad \boldsymbol{S} - A_1 = C_0^1 \cup C_1^1\,, \quad \boldsymbol{S} - B_1 = D_0^1 \cup D_1^1\,,$$

kde vpravo jsou komponenty množiny $\boldsymbol{S} - A_1$ resp. $\boldsymbol{S} - B_1$, tedy Jordanovy oblasti, pro něž je $H(C_0^1) = H(C_1^1) = A_1$, $H(D_0^1) = H(D_1^1) = B_1$. Ať již zvolíme očíslování jakkoliv, je proto

$$(196) \qquad h_1(H(C_k^1)) = H(D_k^1) \quad \text{pro} \quad k = 0, 1\,;$$

$H(D_k^1)$ je (pro $k = 0, 1$) zřejmě mnohoúhelník.

Předpokládejme, že jsme již sestrojili homeomorfní zobrazení h_q (kde $1 \leqq q < p$) množiny $A_q = \bigcup_{j=0}^{q} L_j$ na množinu $B_q = \bigcup_{j=0}^{q} \langle \mu_j \rangle$, přičemž

1) $\mu_0, \ldots, \mu_q$ jsou prostá po částech lineární zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$,
2) posloupnost $\langle \mu_0 \rangle, \ldots, \langle \mu_q \rangle$ tvoří síť,
3) $h_q * \varphi^i$ je po částech lineární pro každé i, pro něž je $\langle \varphi^i \rangle \subset A_q$,
4) $\boldsymbol{S} - A_q$ resp. $\boldsymbol{S} - B_q$ má právě $q + 1$ komponent C_k^q resp. D_k^q ($k = 0, \ldots, q$), pro něž (při vhodném očíslování) je

$$(197) \qquad h_q(H(C_k^q)) = H(D_k^q) \quad \text{pro} \quad k = 0, \ldots, q\,,$$

5) C_k^q i D_k^q jsou Jordanovy oblasti, $H(D_k^q)$ je pro každé $k = 0, \ldots, q$ mnohoúhelník.

Protože otevřený oblouk $\tilde{L}_{q+1}$ je (podle definice sítě) disjunktní s A_q, leží v některé komponentě množiny $\boldsymbol{S} - A_q$; očíslování komponent lze jistě volit ještě tak, že $\tilde{L}_{q+1} \subset C_q^q$. Krajní body a_1, a_2 oblouku L_{q+1} leží pak v $H(C_q^q)$, takže body $b_j = h_q(a_j)$ ($j = 1, 2$) patří podle (197) do $H(D_q^q)$. Orientujme oblouk L_{q+1} tak, aby bylo a_1 = p. b. L_{q+1}.

Protože body b_j $(j = 1, 2)$ leží na hranici Jordanovy oblasti D^q_q, a tato hranice je mnohoúhelník, existuje prostá po částech lineární křivka μ_{q+1}, definovaná v $\langle 0, 1\rangle$, pro niž je

$$(198) \qquad \mu_{q+1}(0) = b_1\,, \quad \mu_{q+1}(1) = b_2, \quad (\mu_{q+1}) \subset D^q_q\,.$$ [37])

Podle résumé na konci 1. části tohoto důkazu existuje homeomorfní zobrazení h^{q+1} oblouku L_{q+1} na $\langle\mu_{q+1}\rangle$, pro něž je $h^{q+1}(a_1) = b_1$ (takže $h^{q+1}(a_2) = b_2$), přičemž $h^{q+1} * \varphi^i$ je po částech lineární pro každé i, pro něž je $\langle\varphi^i\rangle \subset L_{q+1}$. Lze definovat

$$h_{q+1}(z) = \begin{cases} h_q(z) & \text{pro} \quad z \in \bigcup\limits_{j=0}^{q} L_j\,, \\ h^{q+1}(z) & \text{pro} \quad z \in L_{q+1} \end{cases}$$

a h_{q+1} je homeomorfním zobrazením množiny $A_{q+1} = \bigcup\limits_{j=0}^{q+1} L_j$ na množinu $B_{q+1} = \bigcup\limits_{j=0}^{q+1} \langle\mu_j\rangle$, pro něž zřejmě platí:

$$\langle\varphi^i\rangle \subset A_{q+1} \Rightarrow h_{q+1} * \varphi^i \quad \text{je po částech lineární.}$$ [38])

Vzhledem k podmínce 2) a (198) tvoří posloupnost $\langle\mu_0\rangle, \ldots, \langle\mu_q\rangle, \langle\mu_{q+1}\rangle$ síť. Buďte Y_1, Y_2 oblouky s krajními body a_1, a_2, pro něž je $Y_1 \cup Y_2 = H(C^q_q)$, a definujme: $Z_j = h_q(Y_j) = h_{q+1}(Y_j)$ pro $j = 1, 2$. Pak jsou Z_1, Z_2 oblouky s krajními body b_1, b_2, pro něž je $Z_1 \cup Z_2 = H(D^q_q)$.

Podle známé věty o „θ-křivkách" (viz [1], str. 184) je

$$C^q_q - L_{q+1} = C^{q+1}_q \cup C^{q+1}_{q+1}\,, \quad D^q_q - \langle\mu_{q+1}\rangle = D^{q+1}_q \cup D^{q+1}_{q+1}\,,$$

kde vpravo jsou vždy disjunktní Jordanovy oblasti (komponenty množiny vlevo), přičemž při jejich vhodném očíslování je

$$H(C^{q+1}_q) = L_{q+1} \cup Y_1\,, \quad H(D^{q+1}_q) = \langle\mu_{q+1}\rangle \cup Z_1\,,$$
$$H(C^{q+1}_{q+1}) = L_{q+1} \cup Y_2\,, \quad H(D^{q+1}_{q+1}) = \langle\mu_{q+1}\rangle \cup Z_2\,.$$

Položíme-li ještě

$$C^{q+1}_k = C^q_k\,, \quad D^{q+1}_k = D^q_k \quad \text{pro} \quad k = 0, \ldots, q-1\,,$$

plyne z toho, že

$$(199) \qquad h_{q+1}(C^{q+1}_k) = D^{q+1}_k \quad \text{pro} \quad k = 0, \ldots, q+1\,;$$

C^{q+1}_k resp. D^{q+1}_k $(k = 0, \ldots, q + 1)$ jsou ovšem právě všechny komponenty množiny

[37]) To plyne ihned z celkem elementárního poznatku, že pro každý bod b mnohoúhelníka $H(D^q_q)$ existuje úsečka, která až na svůj krajní bod b leží celá v D^q_q.

[38]) Je-li $\langle\varphi^i\rangle \subset A_{q+1}$, je buď $\langle\varphi^i\rangle \subset A_q$ nebo $\langle\varphi^i\rangle \subset L_{q+1}$; v prvním případě užijeme vlastností zobrazení h_q, ve druhém zobrazení h^{q+1}.

$\mathbf{S} - A_{q+1}$ resp. $\mathbf{S} - B_{q+1}$. Z toho, že $H(D_q^q)$ byl mnohoúhelník a že $\langle\mu_{q+1}\rangle$ je prostá lomená čára, ihned plyne, že i $H(D_q^{q+1})$, $H(D_{q+1}^{q+1})$ jsou mnohoúhelníky.

Tím je indukční krok proveden. Položme $h = h_p$; pak je h homeomorfním zobrazením množiny $A_p = \bigcup_{j=0}^{p} L_j = \Lambda$ na množinu $B_p = \bigcup_{j=0}^{p} \langle\mu_j\rangle$, kde posloupnost $\langle\mu_0\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle\mu_p\rangle$ oblouků tvoří síť. Dále ještě platí:

$$\langle\varphi^i\rangle \subset A_p \Rightarrow h * \varphi^i \quad \text{je po částech lineární.} \tag{200}$$

Protože však $A_p = \Lambda \supset \langle\varphi\rangle$ a protože platí (184), plyne z toho, že $h * \varphi^i$ je po částech lineární pro každé $i = 1, \ldots, n$; křivka $h * \varphi$ je tedy skutečně po částech lineární.

Dokázali jsme konečně, že

$$\mathbf{S} - A_p = \bigcup_{k=0}^{p} C_k^p \quad \text{resp.} \quad \mathbf{S} - B_p = \bigcup_{k=0}^{p} D_k^p\,,$$

kde C_k^p resp. D_k^p jsou komponenty množiny $\mathbf{S} - \Lambda = \mathbf{S} - A_p$ resp. $\mathbf{S} - B_p$, přičemž očíslování lze volit tak, že

$$h(H(C_k^p)) = H(D_k^p) \quad \text{pro každé} \quad k = 0, \ldots, p\,.$$

Podle poznámky 1° na str. 379 v [2] lze h rozšířit na homeomorfní zobrazení celého $\mathbf{S}$ na $\mathbf{S}$. Tím je věta 16 dokázána.[39]

6,3. Předpokládejme, že φ je elementární křivka v $\mathbf{E}$[40]. Jak snadno nahlédneme, lze potom i oblouky $L_0, \ldots, L_p$, o nichž se mluví ve větě 16, volit tak, že $\Lambda \subset \mathbf{E}$. Kromě toho po prohlédnutí začátku 2. části důkazu věty 16 ihned vidíme, že orientaci oblouků L_0, L_1 a $\langle\mu_0\rangle$, $\langle\mu_1\rangle$ lze volit tak, že $\mu_0 \dotplus \mu_1$ je kladně orientovaná Jordanova křivka a že totéž platí o křivce $\Phi^0 \dotplus \Phi^1$, znamená-li Φ^0, Φ^1 totéž jako v 1. části důkazu. Očíslování komponent množin $\mathbf{S} - A_1$ resp. $\mathbf{S} - B_1$ zvolíme tak, aby bylo $C_0^1 = \operatorname{Int} A_1$, $D_0^1 = \operatorname{Int} B_1$. Zobrazení h_1 ze (194) (které je parciálním zobrazením k h) má pak tu vlastnost, že

$$h_1 * (\Phi^0 \dotplus \Phi^1) = \mu_0 \dotplus \mu_1\,. \tag{201}$$

Místo abychom kladli $h = h_p$, pokračujme v konstrukci zobrazení $h_1, h_2, \ldots$ ještě o dva kroky dále, a to takto: Najdeme orientované oblouky L_{p+1}, L_{p+2} tak, aby posloupnost $L_0, \ldots, L_p, L_{p+1}, L_{p+2}$ tvořila síť Λ', aby bod ∞ patřil do $\tilde{L}_{p+1}$ a byl počátečním bodem oblouku L_{p+2}.[41] Dále najdeme prosté křivky μ_{p+1}, μ_{p+2} defino-

[39]) Zároveň jsme indukcí dokázali, že komponenty doplňku sítě jsou Jordanovy oblasti.

[40]) Mohli bychom dále vyšetřovat křivky v $\mathbf{S}$, ale bylo by nutné zobecnit index bodu vzhledem ke křivce tak, jak je to např. provedeno na konci [2]. Tím bychom mohli zavést pojem „kladného" homeomorfního zobrazení $\mathbf{S}$ na $\mathbf{S}$ i v případě, že toto zobrazení nepřevádí bod ∞ na sebe. Pro poměrnou komplikovanost tohoto zobecnění se omezíme na speciálnější případ.

[41]) Existence takových oblouků L_{p+1}, L_{p+2} je zřejmá.

vané v $\langle 0, 1\rangle$ tak, že i posloupnost $\langle\mu_0\rangle, \ldots, \langle\mu_p\rangle, \langle\mu_{p+1}\rangle, \langle\mu_{p+2}\rangle$ tvoří síť, přičemž $\infty \in (\mu_{p+1})$, $\infty =$ p. b. μ_{p+2}.[42])

Analogicky jako jsme sestrojovali zobrazení $h_1, \ldots, h_p$, sestrojme ještě h_{p+1}, h_{p+2}; bude pak $h_{p+2}(\text{p. b. } L_{p+2}) = \text{p. b. } \mu_{p+2}$, tj. $h_{p+2}(\infty) = \infty$.

Rozšiřme opět zobrazení h_{p+2} (definované v Λ') na homeomorfní zobrazení h celého $\mathbf{S}$ na $\mathbf{S}$ (podle pozn. 1° na str. 379 ve [2]). Je patrné, že h bude mít kromě toho, co bylo řečeno ve větě 16, ještě tu vlastnost, že $h(\infty) = \infty$ (tedy $h(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$) a že existuje kladně orientovaná Jordanova křivka ψ [43]) tak, že i $h * \psi$ je kladně orientována.

Podle tvrzení 3 na str. 433 v [2] je pak pro každou kladně orientovanou Jordanovu křivku ω křivka $h * \omega$ také kladně orientována, takže homeomorfní zobrazení h je „kladné" ve smyslu definice z [2], str. 433.

Z toho je patrné, že platí tato věta:

Věta 17. *Je-li φ elementární křivka v $\mathbf{E}$, existuje kladné homeomorfní zobrazení h množiny $\mathbf{S}$ na $\mathbf{S}$, pro něž je $h(\infty) = \infty$ [44]) a pro něž je $h * \varphi$ křivka po částech lineární.*

Literatura

[1] *I. Černý:* Základy analysy v komplexním oboru (Academia 1967).

[2] *K. Kuratowski:* Topologie II, 2. vyd. (Warszawa 1952).

[3] *I. Černý:* Rozklad elementární křivky na Jordanovy křivky (Čas. pro pěst. mat. *89* (1964)).

Adresa autora: Malostranské nám. 25, Praha 1. (Matematicko-fyzikální fakulta UK.)

---

[42]) Existence je opět zřejmá.

[43]) Je to např. $\psi = \Phi^0 \dotplus \Phi^1$ — viz (201).

[44]) tj. — v našem speciálním případě, kdy $h(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$ — homeomorfní zobrazení $\mathbf{S}$ na $\mathbf{S}$, které každou kladně orientovanou Jordanovu křivku ω „převádí" v kladně orientovanou Jordanovu křivku $h * \omega$.

Zusammenfassung

ÜBER DIE EXISTENZ EINER HOMÖOMORPHEN ABBILDUNG DER GAUSSSCHEN EBENE AUF SICH, WELCHE EINE GEGEBENE ELEMENTARKURVE AUF EINE TEILWEISE LINEARE KURVE ÜBERFÜHRT

ILJA ČERNÝ, Praha

Unter einer Kurve verstehen wir eine beliebige lineare Abbildung φ eines beliebigen kompakten eindimensionalen Interwalles $\langle\alpha, \beta\rangle$ in die abgeschlossene Gausssche Ebene $\boldsymbol{S}$. $\boldsymbol{E}$ bedeute die offene Gausssche Ebene. Die Kurve φ nennt man elementar, wenn sie geschlossen ist (d. h. wenn der Anfangspunkt A$-$p. $\varphi = \varphi(\alpha)$ dem Endpunkt E$-$p. $\varphi = \varphi(\beta)$ gleich ist) und wenn die Menge

(13) $T = \{t \in \langle\alpha, \beta\rangle;$ es gibt ein $t' \in \langle\alpha, \beta\rangle, t' \neq t$ so, dass $\varphi(t') = \varphi(t)\}$ endlich ist.

In [3] durchführten wir eine gewisse Zerlegung einen Elementarkurve φ (für welche $\langle\varphi\rangle = \varphi(\langle a, b\rangle)$ eine Teilmenge von $\boldsymbol{E}$ ist) in Jordansche Kurven. Wir zeigten dort zugleich auf welche Weise man für den Beweis der Existenz der Zerlegung (mit in [3] angefährten Eigenschaften) den folgenden Satz, der eins der Hauptergebnisse von diesem Artikel darstellt, verwenden kann:

Satz 17. Wenn φ eine Elementarkurve mit der Eigenschaft $\langle\varphi\rangle \subset \boldsymbol{E}$ ist, dann gibt es eine positive homöomorphe Abbildung h der Menge $\boldsymbol{S}$ auf sich, für welche $h(\infty) = \infty$ ist und für welche $h * \varphi$*) eine teilweise lineare Kurve ist.

Die Elementarkurven sind in einem gewissen Sinn nach den Jordanschen Kurven die einfachsten abgeschlosenen Kurven. Die Bedeutung des Satzes 17 (und 16) liegt darin, dass man bei dem Studium aller äusseren topologischen Eigenschaften der Menge $\langle\varphi\rangle$ und auch spezielleren Eigenschaften, welche zu der „orientierten Topologie" (vgl [2], § 55, XIII) gehören und z. B. in der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen von besonderer Wichtigkeit sind**) ohne Einschränkung voraussetzen kann, dass die Kurve φ teilweise linear ist (so dass $\langle\varphi\rangle$ eine gebrochene Linie ist).

Im Artikel (ausser mancher Behauptungen über „θ-Kurven", die weiter benützt werden und auch in anderen Zusammenhängen wichtig sind) befassen wir uns: 1) Mit dem Studium der Komponenten der Menge $\boldsymbol{S} - \langle\varphi\rangle$, wo φ eine Elementarkurve ist, und deren Grenzen. 2) Mit „Schnitten" in diesen Komponenten. 3) Mit der Ergänzung eines „verallgemeinerten Netzes" auf ein „Netz". (Unter einem „verallge-

*) Mit einem Stern wird die Zusammensetzung von Abbildungen bezeichnet.

**) Zu diesen Eigenschaften gehört z. B. alles, was am Index eines Punktes inbezug zu einer Kurve beruht.

meinertem Netz“ versteht man eine Menge der Form $\bigcup_{j=0}^{p} \langle\psi_j\rangle$, wo ψ_0 eine Jordansche Kurve, ψ_j $(j = 1, \ldots, p)$ entweder eine schlichte oder eine Jordansche Kurve ist, wobei für $j = 1, \ldots, p$ die Menge $\langle\psi_j\rangle \cap (\langle\psi_0\rangle \cup \ldots \cup \langle\psi_{j-1}\rangle)$ von den Punkten A−p. ψ_j, E−p. ψ_j zusammengesetzt ist. Unter einem „Netz“ (vgl [2], § 54, IV) versteht man eine ähnliche Menge, wo aber alle Kurven $\psi_1, \ldots, \psi_p$ schlicht sind).

Es wird gezeigt, dass die Grenze jeder Komponente der Menge $\boldsymbol{S} - \langle\varphi\rangle$, wo φ eine Elementarkurve ist, ein „verallgemeinertes Netz“ ist (siehe Satz 12); dasselbe gilt über die Menge $\langle\varphi\rangle$ (siehe Satz 4). Im Beweis des Satzes 11 sind die „Schnitte“ in den Komponenten Ω der Menge $\boldsymbol{S} - \langle\varphi\rangle$ untersucht; es ist festgestellt, dass $\Omega - \langle\lambda\rangle$, wo λ entweder eine schlichte oder Jordansche, in $\langle 0, 1\rangle$ definierte Kurve ist, für welche $\lambda(0), \lambda(1) \in H(\Omega)$*), $\lambda((0, 1)) \subset \Omega$ gilt, die Vereinigung von zwei punktfremden, nichtleeren Gebieten Ω_1, Ω_2 ist, wobei die Grenzen von Ω_1, Ω_2 wieder „verallgemeinerte Netze“ sind. Für den Beweis sind die Sätze 7−10 wesentlich. Der Satz 15 zeigt, dass es zu jeder Elementarkurve φ ein $\langle\varphi\rangle$ enthaltendes „Netz“ gibt; die Sätze 13 u. 14 werden in der Folgerung des Satzes 15 verwendet. Der Satz 15 wird zusammen mit der Möglichkeit der Erweiterung einer „regulären“ homöomorphen Abbildung eines Netzes (siehe [2], § 54, IV) zum Beweis der in den Sätzen 16 und 17 zusammengefassten Hauptergebnissen benützt.

*) $H(\Omega)$ ist die Grenze des Gebietes Ω.