Časopis pro pěstování matematiky

Josef Král

# Příklad k jednomu obrácení Greenovy věty

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 101 (1976), No. 2, 205--206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117896

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

RŮZNÉ

# PŘÍKLAD K JEDNOMU OBRÁCENÍ GREENOVY VĚTY

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 11. července 1975)

Buď $K = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ a předpokládejme, že $P$, $Q$ jsou borelovsky měřitelné funkce na $K$ takové, že funkce $x \mapsto P(x, y)$ je integrovatelná na $\langle 0, 1\rangle$ pro každé $y \in \langle 0, 1\rangle$ a funkce $y \mapsto Q(x, y)$ je integrovatelná na $\langle 0, 1\rangle$ pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$. Pak lze definovat funkci $F$ dvojrozměrného intervalu $I \subset K$ předpisem

$$F(I) = \int_{\partial I} P \, dx + Q \, dy ,$$

kde $\partial I$ značí kladně orientovanou hranici obdélníka $I$. Je patrno, že $F$ je aditivní funkcí intervalu. Vyšetřování absolutní spojitosti funkce $F$ (vzhledem k dvojrozměrné Lebesgueově míře) je věnován článek [1]. Ve větě 1 tohoto článku se mj. tvrdí, že z absolutní spojitosti funkce $F$ plyne, že funkce $P$, $Q$ splňují následující podmínky:

1) Funkce

$$y \mapsto P(x, y) \tag{1}$$

je absolutně spojitá na $\langle 0, 1\rangle$ pro skoro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$.

2) Funkce

$$x \mapsto Q(x, y) \tag{2}$$

je absolutně spojitá na $\langle 0, 1\rangle$ pro skoro všechna $y \in \langle 0, 1\rangle$.

Toto tvrzení neplatí, jak ukazuje následující jednoduchý

P ř í k l a d. Zvolme libovolnou omezenou borelovsky měřitelnou funkci $f$ na $\langle -1, 1\rangle$ a definujme

$$P(x, y) = f(x - y) , \quad Q(x, y) = -f(x - y) , \quad 0 \leqq x, y \leqq 1 . \tag{3}$$

Potom pro $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset K$ platí

$$F(I) = \int_{\partial I} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(x - c)\,\mathrm{d}x - \int_c^d f(b - y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b f(x - d)\,\mathrm{d}x + \\ + \int_c^d f(a - y)\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

takže $F \equiv 0$. Zvolíme-li funkci $f$ navíc tak, aby nebyla absolutně spojitá na žádném nedegenerovaném intervalu obsaženém v $\langle -1, 1\rangle$, pak při definici (3) není splněna žádná z podmínek 1), 2); dokonce pak funkce (1) není absolutně spojitá pro žádné $x \in \langle 0, 1\rangle$ a funkce (2) není absolutně spojitá pro žádné $y \in \langle 0, 1\rangle$.

Různé postačující podmínky pro absolutní spojitost funkce $F$ lze najít v literatuře, jež je uvedena v komentáři k § 8 skript [2] otištěném na str. 329–331 v [3].

*Literatura*

[1] *С. В. Горленко:* Обращение теоремы Грина-Стокса, сб. Метрические вопросы теории функций и отображений, издат. „Наукова Думка", Киев 1973, стр. 61—68.
[2] *J. Král:* Teorie potenciálu I, Státní pedagogické nakladatelství Praha 1965.
[3] *J. Král, I. Netuka, J. Veselý:* Teorie potenciálu II, Státní pedagog. nakl. Praha 1972.

*Adresa autora:* 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).