Václav Metelka

O jistých rovinných konfiguracích $(12_4,\ 16_3)$ obsahujících B, C a E-body a konfiguracích singulárních

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 105 (1980), No. 3, 219--255

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118063`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 105 * PRAHA 25. 8. 1980 * ČÍSLO 3

O JISTÝCH ROVINNÝCH KONFIGURACÍCH $(12_4, 16_3)$ OBSAHUJÍCÍCH *B*, *C* A *E*-BODY A KONFIGURACÍCH SINGULÁRNÍCH

VÁCLAV METELKA, Liberec

(Došlo dne 27. listopadu 1975)

ÚVOD

V této úvodní kapitole dovolím si zopakovat některé základní pojmy a definice z teorie rovinných konfigurací a to pouze v minimálním rozsahu, potřebném k pochopení problematiky, jíž se tato práce týká.

V konfiguracích $(12_4, 16_3)$ je – jak známo – dvanáct konfiguračních bodů a šestnáct konfiguračních přímek uspořádáno v projektivní rovině tak, že každým z těchto bodů procházejí čtyři přímky a na každé z těchto přímek leží tři body.

Systematické vyhledávání konfigurací si vyžádalo zavedení jisté klasifikace, o níž se stručně zmíním.

Definice 1. Konfigurační body označme čísly *1, 2, 3, ..., 12*. Leží-li dva z konfiguračních bodů (třeba *1* a *2*) na konfigurační přímce, pak říkáme, že tyto body jsou *spojeny* (což stručně zapisujeme *1-2*). V opačném případě jsou body *1* a *2* od sebe *odděleny* (stručně *1* : *2*). Konfigurační přímku, na níž leží body *1, 2, 3* označíme *1-2-3*.

Umluvme se ještě, že v dalším (pokud to nepovede k nedorozumění) budeme slovo „konfigurační" vynechávat, neboť o jiných bodech a přímkách se v této práci téměř nemluví.

V konfiguraci $(12_4, 16_3)$, jak již bylo řečeno, prochází každým bodem čtveřice přímek. Je tedy každý bod spojen s osmi body dalšími, to znamená, že od tří bodů je oddělen.

Definice 2. Nechť bod *4* je oddělen od bodů *1, 2, 3* (stručně *4* : *1, 2, 3*). Říkáme, že bod *4* je typu *A*, jestliže *1* : *2, 3* a také *2* : *3*, *B*, jestliže *1-2*, *1-3*, *2-3*, ale ne *1-2-3*, *C*, jestliže jen dva z bodů *1, 2, 3* jsou odděleny, *D*, jestliže jen dva z bodů *1, 2, 3* jsou spojeny, *E*, jestliže *1-2-3*.

Snadno zjistíme, že tím jsou vyčerpány všechny možnosti. Podaří-li se nám uspořádat všech dvanáct bodů do šestnácti trojic (přímek) tak, by bylo vyhověno základní definici, že každý bod se vyskytuje ve čtyřech z těchto trojic, pak dostaneme tak zvané *konfigurační schéma*. Nutno ovšem ještě dokázat, že toto schéma je skutečně realisovatelné v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel, čili, že skutečně representuje konfiguraci. Ke každému *realisovatelnému* schématu existuje tedy jedna konfigurace, ale ne naopak. Snadno totiž uvážíme, že geometrické vlastnosti konfigurace se nemění při libovolné permutaci bodů *1, 2, 3, ..., 12,* ale touto permutací se změní schéma:

Definice 3. Jestliže lze jedno konfigurační schéma získat z druhého některou z permutací bodů *1, 2, ..., 12,* pak říkáme, že obě tato schémata patří do *téže třídy*. Dvě konfigurace pokládáme za *ekvivalentní* tehdy a jen tehdy, jestliže jejich schémata patří do téže třídy.

Přistoupíme nyní k vlastní klasifikaci. Je nutno především zjistit, kolik bodů typu A, B, ... atd. se v konfiguraci vyskytuje. Tím získáme její typ. Tak ku příkladu říkáme, že konfigurace *je typu* $B_3C_6E_3$, jestliže obsahuje tři body typu B, šest bodů typu C a tři E-body. Je zřejmé, že dvě konfigurace různých typů nemohou být ekvivalentní. S druhé strany se ukazuje, že klasifikace konfigurací jen podle typů je stále velmi hrubá a je třeba zavést kriteria podstatně kontrastnější. Jednou z cest je ku příkladu tato:

Předpokládejme, že *4* je bod typu C, oddělený od bodů *1, 2, 3,* a nechť třeba *1-2, 2-3, 1 : 3.* Snadno se přesvědčíme, že na dvou ze šestnácti přímek nemůže ležet žádný z bodů *1, 2, 3, 4.* Podle toho, zda tyto dvě přímky se protínají v bodě konfiguračním, nebo nekonfiguračním může zkoumaný bod *4* zařadit do jednoho z typů C^1, nebo C^2.

Zcela obdobná úvaha platí i pro E-body, což shrnujeme v následující definici:

Definice 4. Buď *4* bod typu C (resp. E), oddělený od bodů *1, 2, 3.* Pak existují dvě přímky (p, q), na nichž neleží žádný z bodů *1, 2, 3, 4.* Protínají-li se přímky p, q v konfiguračnım bodě, říkáme, že *4* je typu C^1 (resp. E^1). V opačném případě je bod *4* typu C^2, (resp. E^2).

U bodů typu B je situace poněkud komplikovanější, neboť zde existuje dokonce trojice přímek, na nichž neleží ani zkoumaný B-bod, ani žádný z bodů od nichž je oddělen. Tato okolnost nám ovšem umožní další klasifikaci B-bodů a proto jí využijeme:

Definice 5. Buď *4* konfigurační bod typu B, oddělený od bodů *1, 2, 3.* Pak existují tři přímky (p, q, r), na nichž neleží žádný z bodů *1, 2, 3, 4.* Jestliže se přímky p, q, r protínají ve třech různých bodech, pak buď jeden, nebo dva, nebo všechny tři jsou konfigurační a bod *4* je buď typu B^1, nebo B^2, nebo B^3. V ostatních případech říkáme, že bod *4* je typu B^4.

Poznámka. Uvažme, že v případě B^4-bodu se přímky p, q, r protínají vždy v jednom bodě a to konfiguračním.

Zajisté by bylo možno uvažovat o obdobné klasifikaci také v případě bodů typu A a D. Jak plyne z dalšího je to však již zbytečné.

Dosud byly v literatuře popsány všechny konfigurace obsahující nejméně jeden bod typu A, nebo D. Kromě toho jsou již také známy všechny konfigurace typu $C_{12-i}E_i$, kde $i = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Z toho plyne, že zbývá zkoumat již jen konfigurace, obsahující aspoň jeden B-bod.

Tento úkol je velmi rozsáhlý a zaměřil jsem se proto v této práci pouze na konfigurace, obsahující kromě C a E-bodů nejméně jeden bod typu B^3 a žádný bod typu B^4.

KAPITOLA 1

Cílem této kapitoly je vyhledat všechna konfigurační schémata podle pokynů posledního odstavce úvodní kapitoly.

Nechť tedy *1* je B^3-bod, oddělený od bodů *2, 3, 4*. Pak existuje trojice přímek, na nichž neleží žádný z bodů *1, 2, 3, 4* a kromě toho se tyto tři přímky protínají ve třech konfiguračních bodech. Označme je *5, 7, 9* a přímky *5-6-7*, *5-8-9*, *7-0-9*. Zbývající dva konfigurační body nechť jsou P a Q.

Zvláštní postavení trojice bodů *5, 7, 9* a dvojice P, Q vzhledem k bodu *1* nám umožňuje ještě kontrastněji klasifikovat B^3-body a usnadňuje tak zjišťování ekvivalence.

Definice 1.1. Jestliže na přímkách *1-5-.*, *1-7-.*, *1-9-.* neleží žádný z bodů P, Q, pak říkáme, že B^3-bod *1* je typu B^{30}. Obdobně, leží-li na těchto přímkách jen jeden (resp. oba dva) z bodů P, Q, pak říkáme, že B^3-bod *1* je typu B^{31} (resp. B^{32}). Body P, Q nazveme póly B^3-bodu *1*.

Poznamenávám, že mnohdy je přehlednější použít ještě jiného zápisu konfiguračních přímek, protínajících se v jednom konfiguračním bodě. Tak ku příkladu přímky z předchozí definice lze zapsat také ve tvaru:

$$\frac{1}{5\ 7\ 9}\,. \\ .\ .\ .$$

Známe zatím tři konfigurační přímky (*5-6-7*, *5-8-9*, *7-0-9*). Zapišme je spolu se zbývajícími třinácti přímkami do následujícího (symbolického) schéma:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc} 2\text{-}3\text{-}. & \underline{\ 2\ } & \underline{\ 3\ } & \underline{\ 4\ } & \underline{\quad 1\quad } & 5\text{-}6\text{-}7 \\ 2\text{-}4\text{-}. & .\ . & .\ . & .\ . & 5\ 7\ 9\ . & 5\text{-}8\text{-}9\,. \\ 3\text{-}4\text{-}. & .\ . & .\ . & .\ . & .\ .\ .\ . & 7\text{-}0\text{-}9 \\ \\ (q) & (r) & (s) & (t) & (u) & \end{array}$$

Předpoklad I. *Předpokládejme existenci nejméně jednoho B^{30}-bodu.*

Uvažovaný B^{30}-bod označíme ovšem *1* a použijeme zápisu (1). Vzhledem k vlastnostem B^{30}-bodu musí tedy být

$$(\mathrm{I.1}) \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\ 7\ 9\ P\,; \\ 0\ 8\ 6\ Q \end{array} \qquad P, Q \in (\mathrm{r}), (\mathrm{s}), (\mathrm{t}) \Rightarrow 6 : 8, 0;\ 8 : 0\,.$$

Předpoklad I.1. *Předpokládejme existenci nejméně jednoho B^{30}-bodu, jehož oba póly jsou typu E.*

Zkoumaný B^{30}-bod označíme opět *1*, abychom mohli využít zápisů (1) a (I.1). Body P, Q jsou tedy oba typu E a nemohou být oba odděleny do téže trojice (pak by totiž oba byly typu B^4).*) Přicházejí tedy v úvahu jen následující tři možnosti

$$(5, 6, 7;\ 5, 8, 9)\,, \quad (5, 6, 7;\ 7, 0, 9)\,, \quad (5, 8, 9;\ 7, 0, 9)$$

(od první trojice je oddělen jeden z bodů P, Q, od druhé druhý). Uvažme, že schéma (1) a výsledek (I.1) se nemění permutací (*68*), (*79*) a vzhledem k této permutaci jsou ekvivalentní poslední dvě z předchozích možností. Zbývá tedy nadále uvažovat jen první dvě možnosti, ale ty jsou rovněž ekvivalentní vzhledem k přípustné permutaci (*597*), (*680*). Můžeme dokonce předpokládat, že je přímo

$$P : 5, 6, 7;\ Q : 5, 8, 9\,,$$

protože i (PQ) je permutace přípustná. Bod P je tedy spojen s body *8*, *9*, *0* a libovolná permutace bodů *2*, *3*, *4* připouští volbu

$$\begin{array}{c} P \\ \hline 2\ 3\ 4 \\ 8\ 9\ 0 \end{array},$$

z čehož plyne *3-4-8* a body *5*, *6* patří do (q).

Dále mohou nastat již jen dva případy

a) buď je *5* : *3*, pak *2-4-5*, *2-3-6*, *4-Q-6*, *4* : *1*, *7*, *9* a musí být *2-7* (jinak by totiž bod *2* byl typu B^4), čili *2-7-Q*, *3-Q-0*. Tak jsme dostali první úplné schéma, které jsem označil N-1 a je uvedeno v následující kapitole ve skupině N-schémat.

b) zbývá ještě uvažovat případ, kdy *5-3*, pak ovšem musí být *2-3-5*, *2-4-6*, *4-Q-7*, *2-Q-0*, *3-Q-6* a dostáváme další schéma, které však již registrovat nebudeme, neboť vzhledem k permutaci (*243*), (*68*), (*79*), (PQ) přechází na tvar předchozího schématu N-1.

Tím jsou vyčerpána všechna schémata z předpokladu P.I.1.

---

*) Lze velmi snadno dokázat, že nutná a postačující podmínka, aby dva konfigurační body U, V byly odděleny od téže trojice zní: oba body U, V jsou typů B^4.

Předpoklad I.2. *Předpokládejme existenci aspoň jednoho B^{30}-bodu, jehož jeden pól je typu E.*

Opět, jako v předchozích případech označíme zkoumaný B^{30}-bod *1* a využijeme předchozích výsledků, tedy (1) a (I.1). Vzhledem k předpokladu I.1 je jen jeden z bodů P, Q typu E a permutace (PQ) umožňuje předpokládat, že je to bod P. Ten je oddělen buď od trojice *5, 6, 7*, nebo od *5, 8, 9*, nebo *7, 0, 9*. Přípustné permutace (*68*), (*79*) a (*597*), (*680*) dovolují předpoklad P : *5, 6, 7*, z čehož plyne *6* : *8, 0*, P. Vidíme, že bod Q je oddělen od tří bodů množiny (*5, 7, 8, 9, 0*), takže vzhledem k přípustné permutaci (*57*), (*80*) nastane jedna z možností:

$$Q : (5, 7, 8;\ 5, 7, 9;\ 5, 8, 9;\ 5, 8, 0;\ 5, 9, 0;\ 8, 9, 0)\,.$$

Z těchto případů možno ovšem ihned vyloučit Q : *5, 8, 9*, neboť bod Q již nesmí být typu E a kromě toho oba případy Q : *8, 0* (V takovém případě by totiž bod *8* byl typu D). Protože bod *9* je spojen s bodem P, musí být již oddělen do bodu Q (aby jím procházely jen čtyři konfigurační přímky). Z těchto úvah je patrno, že je vždy Q : *5, 9*, T, kde $T =$ *7, 0*. Libovolná permutace bodů *2, 3, 4* nám umožňuje ještě volbu přímek *2-Q-6*, *3-4-6*, *2-3-5* a protože bod *8* je spojen s oběma body P, Q, nemůže patřit do množiny (q). Tyto výsledky shrneme:

(a) $\quad$ *2-3-5*, *2-Q-6*, *3-4-6*, $P : 5, 6, 7;\ Q : 5, 9, T$, $\quad$ kde $\quad T = 7, 0$ $\quad$ a $\quad 8 \notin (\mathrm{q})$.

Uvažujme nejprve případ $T = 0$, tedy $Q : 5, 9, 0$; $0 : 6, 8, Q$, *2-4-0*, *3-P-0* a musí být ještě *2-8* (v opačném případě totiž je *2* : *1, 7, 8*; *9* : *3, 4*, Q, takže bod *9* je typu B^{30} a oba jeho póly jsou typu E. Takové konfigurace jsme však již hledali za předpokladu I.1). Je tedy *2-8-P*, *4-8-Q* (aby bod *2* nebyl typu B^4) a poslední dvě přímky tohoto schématu jsou *4-P-9* a *3-Q-7*. Toto úplné schéma je uvedeno v následující kapitole v tabulce R-schémat. Je to schéma R-1.

Zbývá řešit případ $T = 7$, tedy Q : *5, 7, 9*, čili *2-4-7*, *9* : *2* (jinak bod *8* je typu D). Uvážíme nejprve, že jsou vyloučeny případy *4-P-0* a také *0* : *4*. V prvém z těchto případů je totiž *4-Q-8*, *3-P-9*, *3-Q-0*, *2-P-8* a bod *9* je typu B^{30}, jehož oba póly jsou typu E, právě tak jako v případě druhém, kdy *4-Q-8*, *4-P-9*.

Shrnujeme: Q : *5, 7, 9*; *2-4-7*, *9* : *2* a protože je *4-0*, ale na této přímce nesmí ležet bod P, pak *4-0-Q*, *3-Q-8* a mohou nastat dva případy:

1	*5-6-7*	*2*	*3*	*4*
5 7 9 P	*5-8-9*	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*
0 8 6 Q	*7-0-9*	*5 7 a 6*	*6 b 8*	*c 0*

, kde $a = 8, 0$; $b = 9, 0$; $c = 8, 9$.

V případě $a = 8$, tedy $b = 0$, $c = 9$ dostaneme schéma ekvivalentní s již registrovaným R-1 vzhledem k permutaci (*19*), (*23*), (*4Q*), (*80*).

Rovněž v případě druhém, kdy $a = 0$, $b = 9$, $c = 8$ přechází toto schéma permutací (*19*), (*23Q4*), (*57*) na schéma R-1. Tím jsou vyčerpány všechny případy za předpokladu I.2. Z toho plyne, že nadále již za předpokladu I žádný z pólů B^{30}-bodu nesmí již být typu E. Schéma však musí obsahovat aspoň jeden E-bod a je to zřejmě jeden z bodů $2, 3, 4$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že je to bod 2 a pak tedy buď $2 : 1, 5, 0$, nebo $2 : 1, 7, 8$, nebo $2 : 1, 6, 9$. Vzhledem k permutacím (79), (68) a (57), (80) vidíme, že tyto možnosti jsou ekvivalentní a možno tedy vždy volit $2 : 1, 7, 8$, pak ale bod 5 je oddělen od tří bodů z množiny $(3, 4, P, Q)$ a je vždy typu B^{30}. Kromě toho jeden z jeho pólů (bod 2) je vždy typu E. Nemůžeme tedy již dostat žádné nové schéma a všechna schémata za předpokladu I jsou již registrována.

Předpoklad II. *Předpokládejme nadále, že konfigurační schéma obsahuje (kromě E a C-bodů) aspoň jeden bod typu B^{31}, ale již žádný bod typu B^{30} (a ovšem také žádný z bodů B^4, A, D).*

Zkoumaný B^{31}-bod označíme opět 1 a využijeme zápisu (1). Podle předpokladu jen jeden z bodů P, Q leží na jedné z přímek 1-5, 1-7, 1-9. Vzhledem k přípustným permutacím (57), (80); (59), (60) a (PQ) lze přímo předpokládat:

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 5\ 7\ 6\ 9 \\ 0\ 8\ Q\ P \end{array} ; \quad P, Q \in (\mathrm{r}), (\mathrm{s}), (\mathrm{t}) ; \quad 8 : 0 .$$

Okamžitě totiž uvážíme, že body P, Q patří do všech třech množin (r), (s), (t), neboť jinak by jimi neprocházely čtyři konfigurační přímky a zbývá již jen dokázat, že je $8 : 0$. Předpokládejme na chvíli, že je 8-0, pak především možno volit 8-0-2 a z toho plyne 2-P-Q, $6 : 8, 9, 0$. Vzhledem k přípustné permutaci (34) lze nadále volit 6-P-3, z čehož 2-4-6. Nyní se již snadno přesvědčíme, že schéma neobsahuje C-body a v tom je spor. Je tedy skutečně také $8 : 0$.

(a) *Nechť zkoumaný B^{31}-bod 1 má oba póly typu E.*

Pak především mustí být $P : 5, 6, 7$ a možno volit 2-P-Q, 3-P-8, 4-P-0 a protože bod 6 nepatří do žádné z množin (s), (t), je 3-4-6. Bod Q je podle předpokladu také typu E a je tedy oddělen od jedné z trojic $(5, 8, 9)$, $(7, 0, 9)$. Permutace (57), (80), (34) připouští předpoklad $Q : 7, 0, 9$, takže 8-Q-4, 3-Q-5 a má-li schéma obsahovat aspoň jeden C-bod, musí být $6 : 0$, tedy 2-6-9, 2-4-7, 2-3-0. Tím jsme dostali úplné schéma R-2.

(b) *Nechť 6-9 a bod Q je typu E.*

Pak $9 : 3, 4, Q$, čili bod Q je oddělen od jedné z trojic $(5, 8, 9)$, $(7, 0. 9)$. Vzhledem k permutaci (57), (80) lze předpokládat $Q : 5, 8, 9$ a libovolná permutace bodů $2, 3, 4$ připouští volbu přímek 2-6-9, 2-P-Q, Q-7-3, Q-0-4. Z toho $8 : 6, 0, Q$ a bod P již nesmí být typu E (viz případ (a)), čili $0 : 6, 8, P$ a pak 2-3-0, 2-4-8, 3-P-8, 6-P-4 (neboť jinak 0 je typu D) a poslední konfigurační přímka je 3-4-5. Tím jsme dostali schéma N-2.

(c) *Nechť 6-9 a jeden z pólů bodu 1 je typu E.*

Podle předchozího je to bod P a tedy $P : 5, 6, 7$. Možno tedy volit *2-P-Q*, *2-6-9*, *3-P-8*, *4-P-0*, z čehož $6 : 8, 0, P$ a *3-4-6*. Bod Q již musí být spojen s jedním z bodů $8, 0$ (jinak je 8 typu D). Vzhledem k permutaci (34), (57), (80) možno také volit *8-Q-4*, tedy *2-3-0* (aby bod 8 nebyl typu D) a nemá-li být bod Q typu E, pak $5 : Q$, čili *2-4-5*, *3-Q-7*. Toto úplné schéma však již nemusíme registrovat, neboť je ekvivalentní s R-2 vzhledem k permutaci (19), (2Q), (34), (80).

(d) *Nechť 6-9 a jeden z bodů 5, 7 je typu E.*

Pak především opět možno volit *2-6-9*, *2-P-Q* a permutace (57), (80) umožňuje předpoklad, že 5 je E-bod, tedy $5 : 2, P, Q$, čili *3-4-5*. Aby bod Q již nebyl typu E (což jsme zkoumali výše), musí být *Q-8* a permutace (34) dokonce umožňuje volbu *4-Q-8*. Mají-li bodem 6 procházet čtyři přímky, pak *6-P* a nemá-li být bod 8 typu D musí být ještě $P : 7$.

Uvažme dále, že možno předpokládat *4-6* (neboť v případě $4 : 6$ je *4-P-0*, *2-4-7*, *3-Q-0*, *2-3-8*, *3-P-6* a toto úplné schéma přechází permutací (19), (2Q), (34), (80) na již známé N-2). Je tedy nadále *4-6-P* a z toho plyne *2-4-0*, takže mohou nastat dva případy: buď *2-3-7*, *3-P-8*, *3-Q-0*, nebo *2-3-8*, *3-P-0*, *3-Q-7*. Zaznamenáme pouze první z nich (schéma R-3), neboť vzhledem k (19), (2Q), (80) patří obě schémata do téže třídy.

(e) *Nechť je 6-9.*

Pak nejprve možno bez újmy na obecnosti volit *2-6-9*, *2-P-Q*, $9 : 3, 4, Q$; $6 : 8, 0$ a $8 : 0$. Vzhledem k předchozím výsledkům musí být E-bodem jedině bod 2, který je oddělen od jedné z trojic $(1, 5, 0)$, $(1, 7, 8)$. Známá permutace (57), (80) opět připouští jednoznačnou volbu $2 : 1, 5, 0$, takže $7 : P, Q$ a musí být *3-4-6* (v opačném případě buď 5 je E-bod, nebo bodem 8 a 0 neprochází čtveřice přímek). Z toho plyne $6 : 8, 0, P$ a také *5-P* (aby bod P nebyl typu E), pak ale $Q : 5, 7, 9$; $P : 6, 7, 8$ a bod 8 je zcela nepřípustně typu D.

Předpoklad II.1. *Předpokládejme existenci aspoň jednoho B^{31}-bodu, jehož póly jsou spolu spojeny.*

Zkoumaný B^{31}-bod ovšem označíme 1 a využijeme všech předchozích výsledků. Především vidíme, že lze volit *2-P-Q*, takže v množině (r) může ležet jen jedna z dvojic (68), (60), (69), (80). Poslední dvě možnosti můžeme přímo vyloučit – vzhledem k předchozím výsledkům a kromě toho permutace (57), (80) umožňuje předpokládat, že je $6, 0 \in$ (r), tedy *2-6-0*. Z toho plyne $6 : 8, 9$ a těmito výsledky doplníme zápis (II):

$$(\text{II.1}) \qquad \begin{array}{cccc|cc} \multicolumn{4}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} \\ \hline 5 & 7 & 6 & 9 & P & 6 \\ 0 & 8 & Q & P & Q & 0 \end{array} \;,\quad 6 : 8, 9\;;\quad 8 : 0\;;\quad P, Q \in (\mathrm{r}), (\mathrm{s}), (\mathrm{t})\,.$$

(a) *Nechť 8 je E-bod*, pak $8 : 2, 6, 0$ a možno volit $3\text{-}P\text{-}8$, $4\text{-}Q\text{-}8$, z čehož $3 : 1, 6, 9$ (jinak konfigurace neobsahuje C-body), tedy $4\text{-}P\text{-}6$, $2\text{-}4\text{-}9$, $3\text{-}4\text{-}a$, $2\text{-}3\text{-}b$, $3\text{-}Q\text{-}c$, kde $a, c = 5, 7, 0$, $b = 5, 7$ a mohou nastat případy: $a = 5$, $b = 7$, $c = 0$, čímž dostaneme schéma R-4, nebo $a = 7$, $b = 5$, $c = 0$ vedoucí na schéma N-3, z $a = 0$, $b = 5$, $c = 7$ plyne schéma R-5 a konečně z $a = 0$, $b = 7$, $c = 5$ dostaneme schéma R-6.

(b) *Nechť P je E-bod*, pak $P : 5, 6, 7$ a možno volit $3\text{-}P\text{-}8$, $4\text{-}P\text{-}0$, $3\text{-}4\text{-}6$, $2\text{-}4\text{-}8$ (jinak 8 je E-bod a to již bylo zkoumáno), $2\text{-}3\text{-}a$, $3\text{-}Q\text{-}b$, $4\text{-}Q\text{-}c$, kde $a, b, c = 5, 7, 9$ a nastane tedy šest možností: $abc = 579$ schéma R-7; $abc = 597$ schéma R-8; $abc = 759$, schéma N-4; $abc = 795$, schéma R-9; $abc = 957$, schéma R-10 a konečně $abc = 975$, schéma R-11.

(c) *Nechť* $8 : Q$, pak $8 : 6, 0, Q$ a možno volit $3\text{-}P\text{-}8$, $2\text{-}4\text{-}8$, $0 : P$ (jinak P je E-bod – viz výše) a dokonce $0\text{-}3$, $P : 5, 7, 0$ (jinak by v konfiguraci nebyl žádný C-bod), kromě toho také $0\text{-}Q$ (aby schéma obsahovalo E-body), tedy $4\text{-}P\text{-}6$, $3\text{-}Q\text{-}0$ a pro existenci aspoň jednoho C-bodu nutno $3 : 1, 6, 9$, tedy $4\text{-}Q\text{-}9$, $2\text{-}3\text{-}a$, $3\text{-}4\text{-}b$, kde $a, b = 5, 7$, což vede ke schématům R-12 a R-13.

Uvažme, že nadále je již $8\text{-}2$ (jinak 8 je E-bod) a také $8\text{-}Q$, čili $8 : 6, 0, P$ a vzhledem k přípustné permutaci (34) můžeme zápis (II.1) rozšířit takto:

$$3\text{-}Q\text{-}8,\ 2\text{-}4\text{-}8\,. \tag{II.1.a}$$

(a) *Nechť* $0 : 4$, pak $3\text{-}P\text{-}0$, $4\text{-}P\text{-}6$ (jinak 2 je typu B^4), $4\text{-}Q\text{-}9$, (jinak konfigurace neobsahuje C-body), $2\text{-}3\text{-}a$, $3\text{-}4\text{-}b$, kde $a, b = 5, 7$ a dostáváme schémata R-14 a R-15.

(b) *Nechť* $4\text{-}P\text{-}5$, pak $4\text{-}Q\text{-}0$ (jinak 2 je typu B^4), $3\text{-}P\text{-}6$ (jinak 8 je typu D), $2\text{-}3\text{-}a$, $3\text{-}4\text{-}b$, kde $a, b = 7, 9$ a nalezli jsme schémata R-16 a R-17.

(c) *Nechť* $4\text{-}P\text{-}7$, pak $4\text{-}Q\text{-}0$ a $3\text{-}P\text{-}6$ (z důvodů jako výše), dále $3\text{-}4\text{-}5$ (aby schéma obsahovalo E-body) a z toho $2\text{-}3\text{-}9$, takže máme schéma R-18.

(d) *Nechť* $Q\text{-}0$, pak $4\text{-}Q\text{-}0$, $4\text{-}P\text{-}6$, $2\text{-}3\text{-}9$ (aby existovaly E-body v konfiguraci), $3\text{-}4\text{-}a$, $3\text{-}Q\text{-}b$, kde $a, b = 5, 7$, čímž dostáváme schémata R-19 a R-20.

(e) *Nechť 7 je E-bod*, pak $3\text{-}4\text{-}7$, $4\text{-}P\text{-}0$, $3\text{-}P\text{-}6$, $2\text{-}3\text{-}9$ (podmínka existence aspoň jednoho C-bodu), $4\text{-}Q\text{-}5$ a schéma R-21.

(f) *Nechť 5 je E-bod*, pak $3\text{-}4\text{-}5$, $4\text{-}P\text{-}0$, $3\text{-}P\text{-}6$, $4\text{-}Q\text{-}7$ (jinak žádný C-bod), $2\text{-}3\text{-}9$ a dostaneme schéma R-22.

(g) *Nechť* $6 : 4$, pak $3\text{-}P\text{-}6$, $4\text{-}P\text{-}0$, $3\text{-}4\text{-}8$, $2\text{-}3\text{-}a$, $4\text{-}Q\text{-}b$, kde $a, b = 5, 7$, ale toto schéma neobsahuje C-body.

(h) *Nechť 3 je E-bod*, pak $3 : 1, 5, 0$, $3\text{-}4\text{-}6$, $3\text{-}P\text{-}7$, $2\text{-}3\text{-}9$, $4\text{-}P\text{-}0$, $4\text{-}Q\text{-}5$ a dostaneme schéma R-23.

(i) *Nechť* $2\text{-}5$, pak $2\text{-}3\text{-}5$, $3\text{-}P\text{-}7$, $4\text{-}Q\text{-}9$ a jediný E-bod je $0 : 3, 8, Q$, tedy $3\text{-}4\text{-}6$, $4\text{-}P\text{-}0$ a máme schéma R-24.

(j) *Nechť* 2-7, pak 2-3-7, 3-P-5, 4-Q-9 a jediný E-bod je opět $0 : 3, 8, Q$, tedy 3-4-6, 4-P-0, čímž docházíme k N-5.

(k) *Nechť* 0-3, pak $0 : 8, P, Q$ a jediný E-bod je $Q : 7, 9, 0$, tedy 4-Q-5, 3-P-7, 3-4-0, 4-P-6 a máme schéma R-25.

Snadno zjistíme, že vyloučíme-li předchozí situace, zbývají již jen dva případy: 3-4-6, 4-P-0, 3-P-a, 4-Q-b, kde $a, b = 5, 7$, z nichž registrujeme jen první (schéma N-6), neboť případ druhý (pro $a = 7$, $b = 5$) je ekvivalentní s konfigurací R-23, na níž přechází permutací $(17), (24), (3Q), (59), (68)$.

Protože tak jsou vyčerpána všechna schémata za předpokladu II.1, musí mít nadále každý B^{31}-bod již oddělené póly.

Předpoklad II.2. *Předpokládejme existenci aspoň jednoho B^{31}-bodu.*

Zkoumaný B^{31}-bod označíme opět 1 a využijeme předchozích výsledků, především zápisu (1) a toho, že body, P, Q jsou již od sebe odděleny. Libovolná permutace bodů $2, 3, 4$ umožňuje volbu:

$$6 : 8, 9, 0;\ 0 : 8;\ P : Q;\ 3\text{-}4\text{-}6,\ 2\text{-}P\text{-}6\,. \tag{II.2}$$

(a) *Nechť aspoň jeden z bodů $3, 4$ je typu E.* Vzhledem k permutaci (34) lze předpokládat, že bod 3 má tuto vlastnost a pak je tedy oddělen buď od bodů $1, 5, 0$, nebo $1, 7, 8$. Permutace (57), (80) připouští volbu $3 : 1, 7, 8$, čili $8 : 3, 6, 0$, tedy 4-P-8, 2-Q-8, $4 : 1, 5, 9$; $5 : P$ (uvažme, že jinak by bylo $5 : 2, 4, Q$ a bod 5 by byl typu B^{31} se spojenými póly 3-6), tedy 3-P-0, $P : 5, 7, Q$, 3-Q-b, 2-4-c, 2-3-a, 4-Q-d, kde $a, b = 5, 9$ a $c, d = 7, 0$. Protože bod 2 je oddělen jen od dvou bodů množiny $(5, 7, 9, 0)$, může být jen buď

$2 : 1, 5, 7$, pak je ale 2-3-9, 2-4-0, 3-Q-5, 4-Q-7 a bod P je typu B^{31} se spojenými póly 1-8,

nebo

$2 : 1, 9, 0$, pak je ale bod P typu D,

nebo

$2 : 1, 7, 9$, čili 2-3-5, 2-4-0, 3-Q-9, 4-Q-7

a dostaneme N-7 nebo konečně je

$2 : 1, 5, 0$, čili 2-3-9, 2-4-7, 3-Q-5, 4-Q-0

a dostáváme tak schéma R-26.

(b) *Nechť je bod 2 typu E.* Pak především bod 2 je oddělen buď od trojice $1, 5, 0$, nebo od trojice $1, 7, 8$. Přístupná permutace (57), (80) umožňuje volbu $2 : 1, 7, 8$, čili $8 : 2, 6, 0$ a permutace (34) dokonce ještě 3-8-P, 4-8-Q, $7 : 2, 4, P$ (jinak totiž bod 7 je typu B^{31} se spojenými póly 4-6), tedy 3-7-Q, 4-P-0, $P : 5, 7, Q$; $9 : 3$ (aby bod 3 již nebyl typu E), 2-3-a, 2-4-b, 2-Q-c, kde $a = 5, 0$; $b = 5, 9$; $c = 5, 9, 0$. V případě, že $a = 0$, $b = 9$, $c = 5$ je bod P typu B^{31} se spojenými póly 1-8. Zbývající dvě možnosti vedou k novým schématům: $a = 0, b = 5, c = 9$ ke schématu N-8 a poslední, tj. $a = 5, b = 9, c = 0$ ke schématu R-27.

Snadno zjistíme, že nadále již musí být bod 9 typu E (mají-li E-body ve schématu existovat). Uvažujeme tedy poslední případ:

(c) *Nechť bod 9 je typu E*, tedy $9 : 3, 4, 6$, z čehož *3-4-6*, *2-Q-9*. Aby bod P nebyl typu D musí být bod 2 spojen aspoň s jedním z bodů dvojice (8, 0) a kromě toho vzhledem k permutaci (57), (80) lze vždy předpoklad, že je $2 : 5$. Pak ovšem již *2-0* (jinak bod 2 je typu E) a také *5-Q* (jinak bod 5 je typu B^{31} se spojenými póly). Z téhož důvodu je také $7 : P$, čili $P : 5, 7, Q$ a permutace (34) připouští volbu přímky *4-5-Q*. Dále je $3 : 1, 5, 9$; $4 : 1, 7, 9$ a nemá-li být bod 3 typu B^{31} se spojenými póly, musí být ještě *2-3-7*, tedy $2 : 1, 5, 8$, *3-Q-8*, *3-P-0*, *4-P-8*, *2-4-0*. Dostali jsme tak opět úplné schéma, které však již nemusíme registrovat, neboť přechází permutací (1293), (47P5), (68) na již známé schéma N-7.

Tím jsou vyčerpána všechna schémata za předpokladu II. Nadále tedy již budeme předpokládat, že

$$\text{(P)} \qquad \textit{každý } B^3\textit{-bod je typu } B^{32}\,.$$

Dostáváme se tak k nejobsáhlejšímu oddílu této kapitoly.

Předpoklad III. *Předpokládáme existenci aspoň jednoho B^3-bodu jehož póly jsou od sebe odděleny.*

Označme zkoumaný bod 1 a využijeme výsledků (1). Vzhledem k předpokladu (P) jsou již póly P, Q od sebe odděleny a leží tedy na dvou z přímek *1-5*, *1-7*, *1-9*. Na čtvrté přímce bodem 1 leží tedy dva z bodů množiny (6, 8, 0). Permutace (57), (80); (59), (60) a (PQ) umožňují předpokládat:

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{\begin{matrix} 6 & 5 & 7 & 9 \\ 8 & 0 & P & Q \end{matrix}}\,; \quad 6 : 9\,0\,; \quad 8 : 7, 0\,; \quad P : Q\,.$$

(a) *Nechť jeden z bodů 2, 3, 4 je oddělen od bodů 6, 8.* Vzhledem k libovolné permutaci bodů 2, 3, 4 možno volit $2 : 1, 6, 8$. Pak body 6, 8 patří do množin (s), (t) a je *3-4-0*. Na přímce *2-0* leží jeden z bodů P, Q. Permutace (68), (79), (PQ) umožňuje volbu *2-0-Q* a musí být *2-P-9* (aby schéma obsahovalo C-body). Kromě toho permutace (34) připouští volit

$$\frac{3}{\begin{matrix} 6 & Q \\ P & 8 \end{matrix}} \quad \frac{4}{\begin{matrix} P & Q \\ 8 & 6 \end{matrix}} \quad \frac{2}{\begin{matrix} 3 & 4 \\ a & b \end{matrix}}\,,$$

kde $a, b = 5, 7$ a dostaneme schémata R-28, R-29.

(b) *Nechť bod 7, 9 nepatří do množiny* (q), pak možno volit *7-Q-4* a body 5, 9 nepatří do (t) – jinak by totiž bod 2 byl typu B^4. Vzhledem k (23) je také *9-3-P* a jeden z bodů *7*, *9* musí být typu E (jinak žádný E-bod). Lze dokonce předpokládat, že *7* je typu E, což nám umožňuje permutace (*79*), (*PQ*), (*68*), (*34*), tedy *2-3-8*, *4-P-8*, *5* : *Q* (jinak bod *3* je typu B^{31}) a mohou nastat případy:

0 : *4*, pak

$$\begin{array}{cc} \underline{\;3\;} & \underline{\;\;2\;\;} \\ Q\;4 & 4\;P\;Q \\ 0\;6 & 5\;0\;6 \end{array}$$

a dostaneme schéma R-30.

4-5, pak *2-4-5*, *2-P-6*, *2-Q-0*, *3-4-0*, *3-Q-6* a máme schéma N-9. Nadále zřejmě je již *4* : *1*, *5*, *9* a tento bod je vždy typu B^{31}.

(c) *Nechť body 6, 8 patří do množiny* (q), pak především možno volit *2-3-6*, *2-4-8*. Podle (b) jeden z bodů *7*, *9* patří do množiny (q) a lze vždy tvrdit, že je to bod *7* vzhledem k permutaci (*79*), (*PQ*), (*68*), (*34*). Tedy *3-4-7*. Aby body *0* a *9* procházely čtyři konfigurační přímky, musí být *0-P*, *0-Q*, *9-P* a kromě toho *9* : *3* a *9-4* (aby schéma obsahovalo C a E-body), z toho plyne *4-9-P*, *4-Q-6*. Má-li schéma obsahovat C-body, musí být také také *8* : *Q*, čili *3-Q-0*, *3-P-8*, *2-P-0*, *2-5-Q*, tím jsme dostali úplné schéma R-31.

(d) *Nechť všechny tři body 0, 7, 9 patří do množiny* (q), pak možno volit *2-3-7*, *2-4-9*, *3-4-0*, *2* : *5* (jinak nastane případ (c)) a jeden z bodů *6*, *8* je oddělen od *2*. Vzhledem k permutaci (*68*), (*34*), (*79*), (*PQ*) volme *2* : *1*, *5*, *6*, z toho *P-5* (jinak žádný C nebo E-bod), *Q* : *5*, *7*, *P*, *Q-0-2*, *2-P-8*, *8* : *4* (jinak žádný C-bod) a poslední přímky tohoto schématu (které označíme R-32) jsou *4-Q-6*, *4-P-5*, *3-P-6*, *3-Q-8*.

(e) *Nechť do množiny* (q) *patří trojice bodů 5, 7, 9*, lze tedy předpokládat *3-4-5*, *2-3-7*, *2-4-9* a vzhledem k (*68*), (*79*), (*PQ*), (*34*) také *2-6*. Mohou tedy nastat případy:

4 : *0*, pak *4-8-Q* (jinak žádný E-bod) *4-P-6*, *3-Q-0*, *3-P-8*, *2-P-0*, *2-Q-6*, což vede ke schématu R-33.

4-Q-6, čili *4-P-0*, *2-P-6*, *2-Q-8*, *3-P-8*, *3-Q-0*, R-34,

6-4, pak *4-P-6*, *2-Q-6*, *4-Q-0*, *3-Q-8*, *3-P-0*, *2-P-8*

a máme schéma R-35.

3-P-8, pak *3-Q-6*, *2-P-6*, *4-P-0*, *4-Q-8*, *2-Q-0* ... R-36.

Jestliže bod *7* je typu E, potom

4-8-Q, *4-P-0*, *3-P-6*, *3-Q-0*, *2-Q-6*, *2-P-8*

a dostaneme schéma R-37.

Nadále tedy je již *4-P-8*, *4-Q-0* a je buď bod *2* typu E, čili

2 : *1*, *5*, *0*, *2-P-6*, *2-Q-8*, *3-Q-6*, *3-P-0* vedoucí na schéma R-38, nebo konečně

2-P-0, 2-Q-6, 3-P-6, 3-Q-8

a dostaneme schéma R-39.

(f) *Nechť do množiny* (q) *patří jen body 7, 9,* pak vzhledem k předchozímu a k permutaci (*79*), (*68*), (*PQ*) lze předpokládat, že bod *6* patří do množiny (q) a volit

2-3-7, 2-4-9, 3-4-6 .

Nastávají tak možnosti:

2-Q-5 , pak *4-8-Q* (jinak žádný *E*-bod) *2-P-6, 3-P-8, 3-Q-0, 4-P-0*

a máme schéma N-10.

5-2 , pak opět *4-8-Q, 2-Q-6, 3-P-8, 3-Q-0, 4-P-0* ... R-40

2-0 , pak *2-P-0, 4-8-Q* (aby schéma obsahovalo *C* a *E*-body)

2-Q-6, 4-P-5, 3-P-8, 3-Q-0 ... R-41 .

6-P , pak *2-P-6, 2-Q-8, 3-P-8* (jinak žádný *C*-bod) ,

3-Q-0, 4-Q-5, 4-P-0 ... R-42

a nadále je tedy již vždy *2-P-8, 2-Q-6, P : 6, 9, Q*, takže buď

3-P-5, 3-Q-0, 4-Q-8, 4-P-0 ... R-43 ,

nebo

3-P-0, 3-Q-8, 4-Q-0, 4-P-5 ... N-11 .

V dalším musíme tedy uvažovat, že jen jeden z bodů *7, 9* patří do množiny (q). Vzhledem k (*79*), (*68*), (*PQ*) a libovolné permutaci bodů *2, 3, 4* můžeme tedy tvrdit, že je vždy

$$\text{(III.a)}\qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 6\ 5\ 7\ 9 \\ 8\ 0\ P\ Q \end{array} \quad ;\ 3\text{-}4\text{-}5\ ;\ 7\text{-}Q\ ;\ 6:9,0\ ;\ 8:7,0\ ;\ P:Q\,.$$

(g) *Nechť body 5, 6 patří do množiny* (q), pak možno volit *2-3-5, 2-4-6, P : 5, 9, Q*, z čehož *3-P-6* a jediný *E*-bod je *4*, když *4 : 1, 5, 0*, z toho *3-Q-0, 2-P-0, 4-P-8, 4-Q-7, 2-Q-8* a dostáváme schéma R-44.

(h) *Nechť bod 0 nepatří do množiny* (q), pak vzhledem k případům (g) a (c) do množiny (q) patří body *5, 8* a lze volit *2-3-5, 2-4-8* a protože *P : 5, 9, Q* je také *P-8-3, 6-2* (jinak žádný *E*-bod) a nastanou případy:

2-7 , tedy *2-7-Q, 3-P-6, 3-Q-0, 4-P-0, 4-Q-6* ... R-45

4-0-Q , pak *4-P-6, 3-Q-7, 2-Q-6, 2-P-0* ... N-12

3-0 , pak *3-Q-0, 2-Q-6, 2-P-0, 4-P-6, 4-Q-7* ... R-46

a nadále je již *4-P-0, 2-P-6, 2-Q-0, 3-Q-a, 4-Q-b*, kde *a, b* = *6, 7*, což vede na schémata R-47 a R-48.

V dalším zbývá uvažovat již jen případ, kdy do množiny (q) patří bod *0* a typu *E* musí být nejméně jeden z bodů *7, 9*. Z toho plyne, že bod *6* patří do množiny (r) a vzhledem k permutaci (*34*) možno volit *6 : 3*, *3-8* (jinak *3 : 1, 6, 8* – případ (a)), *7 : 4* (jinak *4-Q-7*, *4-P-6*, *2-Q-6*, tedy body *8, 0* patří do (s) a schéma neobsahuje žádný *E*-bod).

Ukázali jsme již, že aspoň jeden z bodů *7, 9* musí být typu *E*. Kdyby to nebyl bod *9*, pak *7* je jistě typu *E*, čili *7 : 2, 4, 8*, z čehož *2-4-8*, *2-P-5*, *2-3-0*, *2-Q-6*, *4-P-6*, *4-Q-0*, *3-Q-7*, *3-P-8* a dostaneme sice úplné schéma, ale nevyhovující podmínkám, neboť neobsahuje *C*-body. Musí tedy vždy nadále být

(III.b) $\quad 2\text{-}P\text{-}6\,;\quad 4\text{-}Q\text{-}6\,;\quad 8\text{-}3\,;\quad 0 \in (\mathrm{q})\,;\quad$ bod *9* typu *E*.

Tímto výsledkem doplníme záznam (III.a)

V případě *8 : 2* je *4-P-8*, *2-3-5*, *2-4-0*, *2-Q-7*, *4-P-0*, *3-Q-8*, ale toto úplné schéma nemusíme registrovat, neboť přechází na schéma R-36 permutací (*168*), (*249730*), (*5PQ*).

V případě, že bod 8 patří do (q) musí být především *Q : 8, 0, P* aby schéma obsahovalo *C*-body, pak ale bod *4*, oddělený od trojice *1, 5, 7* je vždy typu B^{31}.

Zbývá tedy jediná možnost a to

8 : 4, čili *2-Q-8*, *3-P-8*, *4-P-0*, *2-3-0*, *2-4-5*, *3-Q-7*

a dostáváme tak poslední schéma R-49 za předpokladu III.

Předpokládáme existenci aspoň jednoho B^3-bodu.

Podle předchozích úvah především každý B^3-bod je již typu B^{32} a jeho póly jsou spojeny. Zkoumaný bod označíme *1* a užijeme zápisu (1). Bez újmy na obecnosti můžeme přímky bodem *1* označit *1-6-8*, *1-5-0*, *1-7-P*, *1-9-Q* a protože póly *P, Q* jsou spojeny, pak také lze předpokládat, že je *2-P-Q* a bod *6* patří do množiny (r), jak dovoluje permutace (*79*), (*PQ*), (*68*). Tyto výsledky shrneme

$$\text{(IV)}\qquad \begin{array}{cccc} & \multicolumn{2}{c}{1} & \\ \hline 5 & 7 & 9 & 6 \\ 0 & P & Q & 8 \end{array}\;;\quad 2\text{-}P\text{-}Q\,;\quad 8:7,0\,;\quad 6 \in (\mathrm{r})\,.$$

(a) *Nechť bod 2 je typu E*, pak *2 : 1, 5, 0* a permutace (*34*) umožňuje *2-4-8*, *2-3-7*, *2-6-9*, *3-P-8*, (jinak žádný *C*-bod), *3-Q-0*, *4-P-0*, *3-4-a*, *4-Q-b*, kde *a*, *b* = *5, 6*, takže dostáváme schémata R-50, R-51.

(b) *Nechť 0 : 2*, pak *0 : 2, 6, 8*; *5-2* (jinak případ (a)) a možno volit *2-3-5*, *2-6-9*; *8, 0* patří do (s), *7 : 2* (jinak bod *4* je typu B^{31}), *2-4-8*, *3-Q-0*, *3-P-8*, *3-4-7*, *4-P-0*, *4-Q-6*. Toto schéma však neobsahuje *E*-body.

(c) *Nechť P : 5, 8, 9*, čili *P* je *E*-bod, pak *8 : 7, 0, P*; *Q : 0, 6* a možno volit *4-P-6*, *3-P-0*, musí být *3 : 1, 6, 9* (aby schéma obsahovalo *C*-body), *2 : 1, 5, 7*, *2-3-8*, *4-Q-8*, *2-4-a*, *2-6-b*, *3-4-c*, *3-Q-d*, kde $a, b = 9, 0$; $c, d = 5, 6$ a nastanou případy: $a = 9$, $b = 0$, $c = 7$, $d = 5$; $a = 9$, $b = 0$, $c = 5$, $d = 7$ vedoucí na schémata R-52 a R-53. Zbývající dvě možnosti, tj. $a = 0$; $b = 9$; $c, d = 5, 7$ nemusíme již registrovat, neboť tato schémata patří do téže třídy jako již známá R-50, R-51 vzhledem k permutaci *(19)*, *(2P)*, *(34)*, *(67)*, *(80)*.

(d) *Nechť* $2 : 1, 8, 9$, pak $8 : 2, 7, 0$ a možno volit *2-3-5*, *2-4-7*, *2-6-0* a musí být $P : 5, 6, 9$ (jinak žádný *C*-bod), $9 : 2, 6, P$; *3-P-0* (aby bod *0* nebyl typu B^4), *3-Q-8*, *4-Q-6*, *4-P-8*, *3-4-9* a B^3-bod *8* má proti předpokladu oddělené póly.

(e) *Nechť* $P : 5, 6, 8$, pak možno volit *P-9-3*, *P-0-4*, *2-6-0*, *6-Q-3* (jinak žádný *C*-bod), *4-Q-8*, *2-3-8*, *3-4-7*, (jinak *7* je typu B^4), *2-4-5* a dostáváme tak schéma R-54.

(f) *Nechť* $P : 8, 9, 0$, pak možno volit *5-P-3*, *6-P-4*, bod *7* nepatří do množiny (s), aby bod *2* nebyl typu B^4 a dále je $6 : 9$ (jinak *2-6-9*, *3-4-7*, *2-3-a*, *2-4-b*, *3-Q-b*, *4-Q-a*, kde $a, b = 8, 0$ ale pak vždy je *3* typu B^{31}). Z toho plyne ještě *2-6-0* a mohou nastat případy:

7-Q, čili *7-Q-4*, *3-4-0*, *3-Q-8*, *2-3-9*, *2-4-8* ... R-55

$7 : 4$, čili *2-3-7*, *2-4-8*, *3-4-9*, *3-Q-8*, *4-Q-0* ... R-56

$7 : 3$, čili *2-4-7*, *2-3-8*, *3-4-9*, *3-Q-0*, *4-Q-8* ... R-57

$0 : 3$, čili *3-4-7*, *3-Q-8*, *4-Q-0*, *2-3-9*, *2-4-8* ... R-58

a konečně

$0 : 4$, čili *3-4-7*, *3-Q-0*, *4-Q-8*, *2-3-8*, *2-4-9* ... R-59

(g) *Nechť* $P : 6, 8, 9$ a možno volit *3-P-0*, *4-P-5*. Bod *7* nepatří do (t), neboť jinak by byl bod *2* typu B^4 a musí být také *6-3* (jinak *4-Q-6*, *3-Q-8*, *2-4-8*, *2-6-0* a schéma neobsahuje *E*-body). Je tedy *4-Q-8*, *2-3-8* a snadno zjistíme, že jediný možný *E*-bod je *0* a to pouze v případě, když $0 : 4, Q, 8$, tedy *2-6-0* a lze uvažovat případy *3-4-a*, kde $a = 6, 7, 9$.

Pro $a = 9$ je však *2-4-7*, *3-Q-6* a B^3-bod *8* má oddělené póly $2 : 5$. Rovněž případ $a = 7$ vede ke sporu, neboť bylo by *2-4-9*, *3-Q-6* a B^3-bod *7* by měl oddělené póly. Zbývá tedy jedině *3-4-6*, *3-Q-7*, *2-4-9*, kdy skutečně dostaneme nové schéma R-60.

(h) *Nechť* $P : 6, 8, 0$, pak možno volit *P-5-3*, *P-9-4*, *2-6-0* a jest *6-3* (aby schéma obsahovalo *E*-body), takže mohou nastat případy:

$4 : 6$, čili *3-Q-6*, *3-4-0*, *4-Q-8*, *2-3-8*, *2-4-7* ... R-61

$4 : 0$, čili *3-4-6*, *3-0-Q*, *4-Q-8*, *2-3-8*, *2-4-7* ... R-62

$4 : 7$, čili *3-4-6*, *2-3-7*, *2-4-8*, *3-Q-8*, *4-Q-0* ... R-63

(i) *Nechť P-0*, pak vzhledem k předchozím případům možno volit

3-P-8, *4-P-0* (neboť je $P : 5, 6, 9$)

a dále:

(i1) *za předpokladu* $7 : 4, 8, Q$, *7 je E-bod*, dostaneme *4-8-Q*, *2-3-7*, *2-6-0*, $9 : 3$ (jinak B^3-bod *8* má oddělené póly), čili *2-4-9*, *3-4-a*, *3-Q-b*, kde $a, b = 5, 6$, což vede k R-64 a R-65.

(i2) *7 je E-bod* pak ovšem již $7 : 2, 4, 8$, *2-4-8*, *3-Q-7* a mohou nastat případy

$$9 : 2\,,\quad \text{čili}\quad 3\text{-}4\text{-}9,\ 2\text{-}6\text{-}0,\ 2\text{-}3\text{-}5,\ 4\text{-}Q\text{-}6 \ldots \text{R-66}$$

$$6 : Q\,,\quad \text{pak}\quad 4\text{-}Q\text{-}5,\ 3\text{-}4\text{-}6,\ 2\text{-}6\text{-}0\,,\quad (\text{neboť jinak } Q \text{ je typu } B^4) \text{ a } 2\text{-}3\text{-}9\,,$$

což vede na schéma R-67.

Nadále musí být již $9 : 6$ (protože jinak B^3-bod *4* nevyhovuje podmínce (P) a je typu B^{31}), čili zbývá jedině případ *2-6-0*, *2-3-9*, *3-4-5*, *4-Q-6* a schéma R-68.

(i3) *Nechť 6 je typu E.*, pak $6 : 4, 0, P$, *2-6-9*, *3-Q-6*, *2-3-0*; a aby bod *P* nebyl typu B^{31}, musí být $Q : 5$. Dále je $2 : 7$, neboť jinak ve schématu nejsou žádné *C*-body a konečně také $2 : 8$ (aby bod *4* nebyl typu B^{31}), pak ale *2-4-5*, *3-4-7*, *4-Q-8* a toto schéma přechází permutací (*14*), (*27Q6*), (*5P*) na již známé a registrované R-51.

(i4) *Uvažujme* $8 : Q$, pak *2-4-8*, *7-Q* (jinak *8* je typu B^4), *7-4* (jinak *7* je typu *E* a to jsme již zkoumali v (i2)), čili *4-Q-7*, $7 : 2, 3, 8$ a jediný *E*-bod je *5*, když ovšem $5 : 2, P, Q$, takže *3-4-5*, *3-6-Q*, a aby nenastal případ (i3), čili bod *6* již nebyl typu *E*, musí být *6-0-2*, *2-3-9*. Pak ovšem bod *9* je typu *D*.

(i5) *V případě 5-Q* je *3-5-Q* a schéma neobsahuje *E*-body, právě tak jako v případě

(i6) $5 : 4$, kdy je *2-3-5*.

(i7) *Kdyby bylo* $9 : 2$, pak *3-4-9*, *2-6-0*, *2-3-7* a nastane případ (i2).

(i8) *Předpokládejme* $6 : Q$, pak *3-4-6*, *4-Q-8*, *3-Q-7*, *2-4-5* a jediný *E*-bod je $3 : 1, 5, 0$, čili *2-6-0*, *2-3-9* a dostaneme schéma N-13.

Zbývá tedy poslední případ a to

(i9) *7-4* (jinak *7* je typu *E*, ale to jsme již probírali v (i2)), takže *8-Q-4*, *3-Q-6*, a aby nenastal případ (i3) musí být *6-0-2*, *2-3-9*, pak ale bod *9* je typu *D*.

(j) *Nechť* $P : 8$. Vzhledem k předchozím případům může již být jen $P : 5, 8, 0$, takže možno volit *6-P-3*, *9-P-4*, *2-6-0*. Body *5*, *7* neleží na (t), neboť jinak by byl bod *2* typu B^4 a konečně má-li schéma obsahovat *E*-body, musí být $Q : 5, 6, 7$. Mohou tedy nastat případy:

$$2\text{-}3\text{-}a,\ 2\text{-}4\text{-}b,\ 3\text{-}4\text{-}c,\ 3\text{-}Q\text{-}d,\ 4\text{-}Q\text{-}e\,,\quad \text{kde}\quad a, b = 5, 7, 8\,;\quad c = 5, 7\,;$$
$$d, e = 8, 0,\ a = 8,\ b = 7,\ c = 5,\ d = 0,\ e = 8 \ldots \text{R-69}\,;$$
$$a = 7,\ b = 8,\ c = 5,\ d = 8,\ e = 0 \ldots \text{R-70}\,;$$
$$a = 5,\ b = 8,\ c = 7,\ d = 8,\ e = 0 \ldots \text{R-71}\,;$$
$$a = 8,\ b = 5,\ c = 7,\ d = 0,\ e = 8 \ldots \text{R-72}\,.$$

(k) *Nechť P-9*, pak vzhledem k předchozímu je $P : 5, 6, 0$ a možno volit *3-P-9*, *4-P-8*, *2-6-0* a aby nenastal případ (d) musí být $8 : Q$, *2-3-8*, *5-4*, *7-4* (jinak *2* je typu B^4) a mohou nastat případy:

$$0 : Q\,,\quad \text{čili}\quad 3\text{-}4\text{-}0,\ 3\text{-}Q\text{-}6,\ 4\text{-}Q\text{-}7\,,\quad (\text{jinak } 8 \text{ je typu } B^4)\,,\quad 2\text{-}4\text{-}5 \ldots \text{R-73}$$

nebo *7-Q*, pak ale schéma neobsahuje *C*-body, nebo

$$5\text{-}Q\,,\quad \text{pak}\quad 4\text{-}Q\text{-}5,\ 2\text{-}4\text{-}7,\ 3\text{-}Q\text{-}0,\ 3\text{-}4\text{-}6 \text{ a dostaneme schéma R-74}\,.$$

Nadále je tedy již jen

$$2\text{-}4\text{-}a,\ 3\text{-}4\text{-}b,\ 3\text{-}Q\text{-}c,\ 4\text{-}Q\text{-}d, \quad \text{kde} \quad a, b = 5, 7; \quad c, d = 6, 0,$$

vedoucí na schémata R-75, N-14, R-76, R-77.

(m) *Nechť* Q-6, pak především $P : 6, 9, 0$ a možno volit P-5-3, P-8-4, a bod 7 nepatří do množiny (s), neboť jinak by byl bod 2 typu B^4 a mohou nastat případy

7-Q, pak 4-Q-7, 3-Q-6, 2-3-8, 3-4 0, 2-6-0, 2-4-9 ... R-78,

$7 : 4$, pak 2-3-7, 3-Q-8, 4-Q-6, 3-4-0, 2-4-9, 2-6-0 ... schéma nemá E-body,

0-4, pak jediným E-bodem je 7, když ovšem $7 : 3, 8, Q$, tedy

3-8-Q, 2-4-7, 4-Q-6, 3-4-0, 2-3-9, 2-6-0 ... R-79

a zbývá

$0 : 4$, čili 4-Q-6, 3-Q-0, 2-6-0, 2-3-8, aby bod 6 nebyl typu D, pak

3-9-4, 2-4-7 a dostáváme schéma N-15.

(n) *Nechť* $2 : 9$. Aby již nenastal případ (d), musí být 2-8 a možno volit 2-4-8, 2-6-0, 3-4-9, 3-P-8, 4-P-6, 2-3-7, (jinak žádný C-bod) a jediným E-bodem je 0 v případě $0 : 3, 8, P$, čili 3-Q-5, 4-Q-0. Toto úplné schéma však odporuje základnímu předpokladu, neboť bod 9 je typu B^3 s oddělenými póly $7 : 8$.

(o) *Nechť* $0 : Q$, pak možno volit 2-4-9, 2-6-0, 3-4-0, $P : 5, 9, 0$ a mohou nastat případy:

2-5, pak 2-3-$5a$ jediný E-bod je 9 v případě 3-6-P, 4-P-8, 4-Q-7,

a 3-Q-8, čímž dostáváme schéma R-80.

4-5, pak 4-Q-5; $4 : 1, 6, 7$; 4-P-8, 3-6-P a aby schéma obsahovalo

aspoň jeden C-bod, musí být $8 : Q$, čili 2-3-8, 3-Q-7, ale toto schéma nemusíme registrovat, neboť přechází na schéma R-63 permutací (12), ($3549QP7$), (80).

$8 : 2$, čili 2-3-7, 3-Q-5, 4-Q-8, 4-P-6, 3-P-8 a dostaneme R-81.

Zbývá tedy poslední možnost 8-2, čili 2-3-8, 3-Q-5, 3-P-6, 4-P-8, 4-Q-7, ale toto schéma přechází permutací (12), (80), (35), ($49QP7$) na schéma R-62.

(p) *Nechť* 6-9, pak možno volit 2-4-0, 2-6-9, 3-Q-0 a nastanou případy:

7-2, potom 2-3-7, 4-Q-8, 3-P-8 a aby schéma obsahovalo C-body, musí být $6 : P$, tedy 3-4-6, 4-P-5, ale toto úplné schéma přechází permutací (1394), ($26Q5P7$), (80) na typ R-50.

5-P, pak 2-3-8, 4-P-8, 4-Q-7, 3-4-6, 3-P-5, ale toto schéma přechází permutací (13), ($25P7$), (49), ($6Q$), (80) na R-51.

5-2, čili 2-3-5, 3-4-7, 4-Q-8, 4-P-6, 3-P-8 a permutace (1493), ($27Q5P6$) převádí toto schéma na R-50.

Zbývá tedy konečně možnost 2-3-8, 4-P-8, 3-P-6, takže musí být $Q : 7$, aby schéma obsahovalo C-body, z čehož 4-Q-5, 3-4-7, ale pak je schéma nepřípustné, neboť neobsahuje E-body.

Uvážíme-li všechny dosavadní výsledky, vidíme, že (vzhledem k permutaci (*34*)) můžeme nadále již předpokládat:

2-4-9, 2-6-0, 2-P-Q, 6 : Q, Q-0, P-8

a další schémata dostaneme takto:

(q) *Nechť 4-Q-5,* pak *4-P-8, 3-Q-0, 3-P-6, 3-4-7, 2-3-8* ... R-82.

(r) *Nechť 5 : 3,* pak *4-P-5, 4-Q-8, 2-3-7, 3-4-6, 3-P-8, 3-Q-0* ... R-83.

(s) *Nechť 5-Q,* pak *Q : 6, 7, 8, 3-Q-5, 4-P-8, 4-Q-0, 3-P-6, 3-4-7, 2-3-8* ... R-84.

(t) *Nechť 2-8,* pak *2-3-8, 4-P-8,* a aby schéma obsahovalo *C*-body, nutně musí být *6 : P,* čili *3-P-5, 3-4-6, 3-Q-0,* (jinak žádný *E*-bod) *4-Q-7* a dostaneme R-85.

(u) *Nechť 5-4,* pak *2-3-7, 3-4-5* a pro existenci *C*-bodů nutně *3 : 6,* čili *3-P-8, 3-Q-0, 4-P-6, 4-Q-8* ... R-86.

(v) *Nechť 0-3,* pak *3-Q-0, 4-Q-8, 3-P-8, 4-P-6, 3-4-7, 2-3-5* ... R-87.

(w) *Nechť 5-2,* pak *2-3-5, 3-Q-8, 4-P-8, 4-Q-0, 3-P-6, 3-4-7* ... R-88 a zbývá již jen případ:

3-Q-8, 4-P-8, 4-Q-0, 2-3-7, 3-4-6, 3-P-5 ,

vedoucí na schéma R-89.

Tım jsou vyčerpány všechny možnosti a také nalezena všechna schémata za daného předpokladu, že konfigurace neobsahuje body typů *A*, *D* a B^4, ale naopak na ní leží aspoň jeden B^3-bod, *E*-bod a *C*-bod.

Nedokazoval jsme v této kapitole, že všechna zjištěná schémata patří do různých tříd a pokud tedy jsou realisovatelná, vedou ke konfiguracím neekvivalentním. Že tomu tak skutečně je, to uvidíme z následujících kapitol.

Která z těchto schémat jsou realisovatelná (body a přímkami v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel), a jakým způsobem je možno realisovat, to si ukážeme v kapitole třetí.

KAPITOLA 2

Tato kapitola je věnována celkovému přehledu konfiguračních schémat, která jsem rozdělil jednak do skupiny N-schémat (označených N-1 až N-15), jednak do skupiny, obsahující 89 R-schémat.

Komentář k tabulkám

V posledním sloupci je zaznamenáno pořadí schématu. V předposledním sloupci je uveden typ schématu a to takto: První tři čísla uvádějí počet bodů typu B^3, B^2, B^1, další dvojice počet C^2 a C^1-bodů a poslední dvojice počet E^2 a E^1-bodů. Tedy ku příkladu: Typ 4213020 říká, že schéma obsahuje 4 body typu B^3, dva B^2-body, jeden B^1-bod, tři C^2-body, žádný C^1-bod, dva E^2, body a žádný E^1-bod. Ostatní sloupce tabulky jsou jistě srozumitelné.

Tabulka schémat skupiny N

5-6-7	*1*	*2*	*3*	*4*		
5-8-9	*5 7 9 P*	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*	4301211	N 1
7-0-9	*0 8 6 Q*	*6 5 8 7*	*8 9 0*	*0 6*		
	5 7 9 6	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*P Q*		
	0 8 P Q	. . . .	. . .	. .		
		0 8 9 Q	*5 8 7*	*6 0*	4301211	N 2
		5 9 0 Q	*7 8 0*	*6 8*	1401222	N 3
		7 8 0 Q	*6 8 5*	*0 9*	2513001	N 4
		7 8 0 Q	*6 5 8*	*0 9*	2423010	N 5
		9 8 0 Q	*6 5 8*	*0 7*	2603010	N 6
		3 4 P Q	*4 P Q*	*P Q*		
		. . . .	. . .	. .		
		5 0 6 8	*6 0 9*	*8 7*	2304201	N 7
		0 5 6 9	*6 8 7*	*0 8*	2204202	N 8
	5 7 9 6	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*		
	0 P Q 8	. . . .	. . .	. .		
		8 5 6 0	*0 9 6*	*8 7*	1402401	N 9
		7 9 6 5	*6 8 0*	*0 8*	2601210	N 10
		7 9 8 6	*6 0 8*	*5 0*	1402401	N 11
		5 8 0 6	*9 8 7*	*6 0*	1402401	N 12
		3 4 6 *P*	4 *P Q*	*P Q*		
		. . . *Q*	. . .	. .		
		9 5 0	*6 8 7*	*0 8*	1402401	N 13
		8 5 0	*7 9 0*	*8 6*	1333011	N 14
		8 7 0	*9 5 0*	*8 6*	1302411	N 15

Tabulka schémat skupiny R

5-6-7	*1*	*2*	*3*	*4*		
5-8-9	*5 7 9 P*	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*	4311201	R 1
7-0-9	*0 8 6 Q*	*5 0 8 6*	*6 0 7*	*9 8*		
	5 7 9 6	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*P Q*		
	0 8 P Q	. . . .	. . .	. .		

		0 7 9 Q	*6 8 5*	*0 8*	4303011	R 2
		7 0 9 Q	*5 8 0*	*6 8*	4311201	R 3
		7 9 0 Q	*5 8 0*	*6 8*	1511211	R 4
		5 9 0 Q	*0 8 7*	*6 8*	1601211	R 5
		7 9 0 Q	*0 8 5*	*6 8*	1601211	R 6
		5 8 0 Q	*6 8 7*	*0 9*	2513001	R 7
		5 8 0 Q	*6 8 9*	*0 7*	2513010	R 8
		7 8 0 Q	*6 8 9*	*0 5*	2413011	R 9
		9 8 0 Q	*6 8 5*	*0 7*	3601201	R 10
		9 8 0 Q	*6 8 7*	*0 5*	2501202	R 11
		5 8 0 Q	*7 8 0*	*6 9*	1511202	R 12
		7 8 0 Q	*5 8 0*	*6 9*	1611201	R 13
		5 8 0 Q	*7 0 8*	*6 9*	1511202	R 14
		7 8 0 Q	*5 0 8*	*6 9*	1611201	R 15
		7 8 0 Q	*9 6 8*	*5 0*	2511201	R 16
		9 8 0 Q	*7 6 8*	*5 0*	2202402	R 17
		9 8 0 Q	*5 6 8*	*7 0*	2302401	R 18
		9 8 0 Q	*7 5 8*	*6 0*	3501201	R 19
		9 8 0 Q	*5 7 8*	*6 0*	3501201	R 20
		9 8 0 Q	*7 6 8*	*0 5*	1401222	R 21
		9 8 0 Q	*5 6 8*	*0 7*	1511211	R 22
		9 8 0 Q	*6 7 8*	*0 5*	2401212	R 23
		5 8 0 Q	*6 7 8*	*0 9*	2421210	R 24
		9 8 0 Q	*0 7 8*	*6 5*	2513001	R 25
		3 4 P Q	*4 P Q*	*P Q*		
		. . . .	. . .	. .		
		9 7 6 8	*6 0 5*	*8 0*	1304211	R 26
		5 9 6 0	*6 8 7*	*0 8*	1312401	R 27
5-6-7	*1*	*2*	*3*	*4*		
5-8-9	*5 7 9 6*	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*		
7-0-9	*0 P Q 8*	. . . .	. . .	. .		
		5 7 9 0	*0 6 8*	*8 6*	1513011	R 28
		7 5 9 0	*0 6 8*	*8 6*	1523001	R 29
		8 5 0 6	*6 9 0*	*8 7*	2603001	R 30
		6 8 0 5	*7 8 0*	*9 6*	1603002	R 31
		7 9 8 0	*0 6 8*	*5 6*	1523001	R 32

		7 9 0 6	*5 8 0*	*6 8*	1136001	R 33
		7 9 6 8	*5 8 0*	*0 6*	1019010	R 34
		7 9 8 6	*5 0 8*	*6 0*	1015410	R 35
		7 9 6 0	*5 8 6*	*0 8*	2333010	R 36
		7 9 8 6	*5 6 0*	*0 8*	2133030	R 37
		7 9 6 8	*5 0 6*	*8 0*	1433010	R 38
		7 9 0 6	*5 6 8*	*8 0*	1343001	R 39
		7 9 5 6	*6 8 0*	*0 8*	1404201	R 40
		7 9 0 6	*6 8 0*	*5 8*	1523001	R 41
		7 9 6 8	*6 8 0*	*0 5*	2603001	R 42
		7 9 8 6	*6 5 0*	*0 8*	2413002	R 43
		5 6 0 8	*9 6 0*	*8 7*	1222410	R 44
		5 8 6 7	*9 8 0*	*0 6*	1521201	R 45
		5 8 0 6	*9 8 0*	*6 7*	1521210	R 46
		5 8 6 0	*9 8 6*	*0 7*	2511210	R 47
		5 8 6 0	*9 8 7*	*0 6*	1302411	R 48
		0 5 6 8	*9 8 7*	*0 6*	1134210	R 49
5-6-7	*1*	*2*	*3*	*4*		
5-8-9	*5 6 7 9*	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*P Q*		
7-0-9	*0 8 P Q*	*. . . Q*	*. . .*	*. .*		
		7 8 9	*5 8 0*	*0 6*	4213020	R 50
		7 8 9	*6 8 0*	*0 5*	4401201	R 51
		8 9 0	*7 0 5*	*6 8*	2401212	R 52
		8 9 0	*5 0 7*	*6 8*	1411221	R 53
		8 5 0	*7 9 6*	*0 8*	1611201	R 54
		9 8 0	*0 5 8*	*6 7*	1431210	R 55
		7 8 0	*9 5 8*	*6 0*	1611201	R 56
		8 7 0	*9 5 0*	*6 8*	1601202	R 57
		9 8 0	*7 5 8*	*6 0*	1511211	R 58
		8 9 0	*7 5 0*	*6 8*	1302402	R 59
		8 9 0	*6 0 7*	*5 8*	1613001	R 60
		8 7 0	*0 5 6*	*9 8*	2241210	R 61
		8 7 0	*6 5 0*	*9 8*	2233011	R 62
		7 8 0	*6 5 8*	*9 0*	2423001	R 63
		7 9 0	*5 8 6*	*0 8*	1243011	R 64
		7 9 0	*6 8 5*	*0 8*	1523001	R 65

5 8 0	*9 8 7*	*0 6*	1404201	R 66
9 8 0	*6 8 7*	*0 5*	2204202	R 67
9 8 0	*5 8 7*	*0 6*	1304211	R 68
8 7 0	*5 6 0*	*9 8*	1333020	R 69
7 8 0	*5 6 8*	*9 0*	1513011	R 70
5 8 0	*7 6 8*	*9 0*	1433001	R 71
8 5 0	*7 6 0*	*9 8*	1433010	R 72
8 5 0	*0 9 6*	*8 7*	1312401	R 73
8 7 0	*6 9 0*	*8 5*	1431210	R 74
8 5 0	*7 9 6*	*8 0*	1224201	R 75
8 7 0	*5 9 0*	*8 6*	1321230	R 76
8 7 0	*5 9 6*	*8 0*	1222410	R 77
8 9 0	*0 5 6*	*8 7*	1316001	R 78
9 7 0	*0 5 8*	*8 6*	1523001	R 79
5 9 0	*0 6 8*	*8 7*	1611210	R 80
7 9 0	*0 8 5*	*6 8*	1521201	R 81
8 9 0	*7 6 0*	*8 5*	1513011	R 82
7 9 0	*6 8 0*	*5 8*	1423011	R 83
8 9 0	*7 6 5*	*8 0*	1343001	R 84
8 9 0	*6 5 0*	*8 7*	1503012	R 85
7 9 0	*5 8 0*	*6 8*	1141221	R 86
5 9 0	*7 8 0*	*6 8*	1214211	R 87
5 9 0	*7 6 8*	*8 0*	1333002	R 88
7 9 0	*6 5 8*	*8 0*	1431201	R 89

KAPITOLA 3

V této kapitole dokážeme, že schémata skupiny N nejsou realisovatelná.

Zaměříme se nejprve na schémata, obsahující aspoň jeden B^{30}-bod. Pro ně platí

$$\begin{array}{cccc|l} & 1 & & & 5\text{-}6\text{-}7 \\ \hline 5 & 7 & 9 & P & 5\text{-}8\text{-}9\,. \\ 0 & 8 & 6 & Q & 7\text{-}0\text{-}9 \end{array}$$

Žádné tři z bodů *1*, *7*, *9*, *5* neleží na jedné přímce (konfigurační, nebo nekonfigurační) a proto můžeme jejich souřadnice volit takto: $1 = (1, 0, 0)$, $7 = (0, 1, 0)$, $9 = (0, 0, 1)$, $5 = (1, 1, 1)$. Na přímkách $1\text{-}7 = (0, 0, 1)$, $5\text{-}9 = (1, -1, 0)$, (zapsaných v přímkových souřadnicích) leží bod *8*, tedy $8 = (1, 1, 0)$. Obdobně z přímek $1\text{-}9 = (0, 1, 0)$, *5-7* $= (1, 0, -1)$ vypočítáme souřadnice bodu *6* $= (1, 0, 1)$ a z přímek *7-9* $= (1, 0, 0)$, *1-5* $= (0, 1, -1)$ souřadnice bodu *0* $= (0, 1, 1)$.

Bod P neleží na přímce *1-9* $= (0, 1, 0)$, neboť jinak by splynuly přímky *1-9-6* a *1-P-Q*. Můžeme tedy volit $P = (x, 1, t)$ a protože na přímce *1-P* $= (0, t, -1)$ má ležet bod Q, lze volit ještě $Q = (y, 1, t)$. Tyto výsledky shrneme:

$$\text{U.1} \qquad 1 = (1, 0, 0)\,, \quad 5 = (1, 1, 1)\,, \quad 6 = (1, 0, 1)\,, \quad 7 = (0, 1, 0)\,,$$
$$8 = (1, 1, 0)\,, \quad 9 = (0, 0, 1)\,, \quad 0 = (0, 1, 1)\,, \quad P = (x, 1, t)\,, \quad Q = (y, 1, t)\,.$$

Zaměříme se nejprve na schéma N-1. Z rovnic přímek *Q-7* $= (t, 0, -y)$ a *P-8* $= (-t, t, x - 1)$ vypočítáme souřadnice bodu *2* $= (y, 1 + y - x, t)$ a obdobně z přímek *2-5* $= (1 - x - t + y,\ t - y,\ x - 1)$, *Q-6* $= (1, t - y, -1)$ získáme souřadnice bodu *4* $= (x, 1, x + t - y)$. Bod *4* má ležet také na přímce *P-0* $= (1 - t, -x, x)$, čili $x \,.\, (x - y) = 0$ a v tom je spor, neboť v případě $x = 0$ splynou konfigurační přímky *4-P-0*, *7-9-0* a v případě $x = y$ splynou konfigurační body P a Q. Schéma N-1 tedy nemůže být realisovatelné.

Výsledku U.1 využijeme ještě při výpočtu souřadnic bodů *2*, *3*, *4* schématu R-1, o němž dokážeme, že realisovatelné je a to způsobem, popsaným v následující kapitole.

Uvažujme dále schémata N-2 až N-8 (o nichž dokážeme, že nemohou být realisovatelná) a schémata R-2 až R-27. Pro všechny z nich platí:

$$\begin{array}{cccc|l} \multicolumn{4}{c}{1} & 5\text{-}6\text{-}7 \\ \hline 5 & 7 & 9 & 6 & 5\text{-}8\text{-}9\,. \\ 0 & 8 & P & Q & 7\text{-}0\text{-}9 \end{array}$$

Body *5*, *7*, *9*, *1* můžeme zřejmě volit takto: *5* $= (1, 0, 0)$, *7* $= (0, 1, 0)$, *9* $= (0, 0, 1)$, *1* $= (1, 1, 1)$. Na přímce *5-7* $= (0, 0, 1)$ upevníme bod *6* $= (1, x, 0)$, na přímce *1-6* $= (x, -1, 1 - x)$ bod $Q = (y + 1,\ x + y, y)$ a konečně na přímce *1-9* $= (1, -1, 0)$ bod $P = (1, 1, 1 - t)$. Z přímek *5-9* $= (0, 1, 0)$, *1-7* $= (1, 0, -1)$ vypočítáme souřadnice bodu *8* $= (1, 0, 1)$ a z přímek *7-9* $= (1, 0, 0)$, *1-5* $= (0, 1, -1)$ souřadnice bodu *0* $= (0, 1, 1)$. Tyto výsledky shrneme:

$$\text{U.2} \qquad 1 = (1, 1, 1)\,, \quad 5 = (1, 0, 0)\,, \quad 6 = (1, x, 0)\,, \quad 7 = (0, 1, 0)\,,$$
$$8 = (1, 0, 1)\,, \quad 9 = (0, 0, 1)\,, \quad 0 = (0, 1, 1)\,, \quad P = (1, 1, 1 - t)\,,$$
$$Q = (y + 1, x + y, y)\,, \quad \text{kde} \quad x \,.\, y \,.\, t \,.\, (x - 1) \neq 0\,.$$

Uvažme totiž, že v případě $x = 1$ by splynuly přímky *1-6-Q*, *1-9-P*, v případě $t = 0$ splynou body *1* a P; v případě $y = 0$ splynou body *6* a Q; v případě $x = 0$ splynou body *6* a *5*. Je tedy podmínka nahoře napsaná nutná k realisaci schématu.

Zkoumejme schéma N-2. Z přímek *P-Q* a *6-9* vypočítáme snadno souřadnice bodu *2* $= (1, x, ty)$. Podmínka, aby na přímkách *2-8*, *P-6*, *Q-0* ležel bod *4* zní $x \,.\, y \,.\, A = 0$, kde $A = t \,.\, (ty + t - 2x - y) + 1$ a zřejmě vzhledem k podmínce, uvedené v U.2 musí být $A = 0$. Obdobně podmínka, aby na přímkách *2-0*, *P-8*, *Q-7* ležel bod *3* zní $B = 0$, kde $B = ty \,.\, (ty + t - x - 1) + 1 - tx$. Vidíme, že také $B \,.\, x -$

$- x . y . A = x . (tx + ty - 1) . (y - 1) = 0$. V případě $x = 0$ již víme, že splynou body *5* a *6*, v případě $tx + ty - 1 = 0$ splynou přímky *2-P-Q*, *3-P-8*, musí tedy být $y = 1$. Z podmínky $A = 0$ dostaneme $C = 0$, kde $C = (2t - 1) . (t - x) + 1 - x$. Z těchto výsledků vypočítáme souřadnice bodu $3 = (2t, 1, t)$, ležícího na přímkách *2-0* a *Q-7*. Obdobně z přímek *P-6* a *Q-0* souřadnice bodu $4 = (2, 2tx + x, 2tx)$. Podmínka, aby body *3, 4, 5* ležely na jedné přímce tedy zní $tx . (2t - 1) = 0$ a víme již že nesmí být $tx = 0$, čili je $2t = 1$. Pak ale z podmínky $C = 0$ plyne $x = 1$, čili shrnujeme $x = y = 1$, $2t = 1$ a vidíme, že body *2, 3, 4* splynou. Schéma N-2 není realisovatelné.

Schéma N-3. Z přímek *P-8*, *Q-0* vypočítáme souřadnice bodu $3 = (ty + t + y + 1, x + y + 1, y + 1 - tx)$, obdobně z přímek *6-0* a *3-5* souřadnice $2 = (t + 1, x + y + 1, y + 1 - tx)$ a konečně z přímek *2-9* a *3-7* souřadnice $4 = (ty + t + y + 1, y^2 + xy + x + 2y + 1, y + 1 - tx)$. Pak souřadnice přímky *4-8* jsou $4\text{-}8 = (-y - 1, t, y + 1)$ a podmínka, aby na ní ležel bod *Q* zní $tx + ty - y - 1 = 0$. Obdobně podmínka. aby bod *4* ležel na přímce *P-6* zní $(tx + ty - y - 1) . (t - x - y) + ty . (x - 1) . (t + 1) = 0$, tedy vzhledem k předchozímu $ty . (x - 1) . (t + 1) = 0$ a z podmínky, uvedené v U.2 plyne $t + 1 = 0$, což je ale sporné, neboť v takovém případě splynou body *2* a *3*.

Schéma N-4. Označme $A = t^2x^2 + t^2xy - t^2x - t^2y + txy + t - x$, $C = x^2 + = tx + ty - x - 1$. Podmínka 2-P-Q zní $Ay = 0$, čili podle U.2 $A = 0$. Aby na přímkách *2-8*, *3-6*, *Q-9* ležel bod *4*, pak $y . (x + y) . (Ax + C) = 0$. V případě $x + y = 0$ by splynuly body *3* a *8*, z čehož je patrno, že také $C = 0$. Protože $A + C . (t - x - tx) = x^2 . (1 - x) . (t + 1) = 0$, pak dle U.2 musí být $t = -1$, ale v tom případě splynou přímky *4-P-0*, 3-*P-8*.

Schéma N-5. Z přímek *P-0*, *Q-9* vypočítáme $4 = (y + 1, x + y, x + y - ty - t)$. Obdobně z *6-0* a *P-Q* plyne $2 = (t + ty - x, tx + ty - x^2 . ty - txy)$ a z *2-7* *Q-8* bod $3 = (t + ty - x, tx^2y + txy^2 - x^2 + tx + ty - xy, ty - txy)$. Podmínku, aby body *3, P, 5* ležely na jedné přímce můžeme pak vyjádřit ve tvaru $B = C + tx . (t - x) = 0$, kde $C = xy . (t - 1) . (tx + ty - 1) + (t - x) . (ty - x)$. Obdobná podmínka pro body *3, 4, 6* zní $A = C + t . (t - x) . (x^2 - x + 1) = 0$. Protože je také $0 = A - B = t . (t - x) . (x - 1)^2$, vidíme z U.2, že by muselo platit $t = x$. V tom případě ale splynou body *2* a *P*.

Schéma N-6. Označme $Ay = t + ty - x$. Pomocí přímek *P-0* a *Q-7* vypočítáme souřadnice bodu $4 = (y + 1, x + y + Ay, y)$. Z přímek *4-6* a *Q-8* souřadnice bodu $3 = (y + 1 + A, x + y + Ay + Ax, y)$ a konečně souřadnice bodu $2 = (y + 1 + A, x + y + Ay + Ax, y + Ay - xy)$ pomocí přímek *3-9* a *6-0*. Podmínka, aby bod *2* ležel na přímce *P-Q* zní $C = Ay . (t - tx - Ay) - xy . (x - 1) = 0$ a podmínka, aby na jedné přímce ležely body *3, P, 5* zní $B = -A . (t - tx - Ay) + t . (x - 1) = 0$, takže je také $0 = C + By = y . (x - 1) . (t - x)$ a podle U.2 by muselo být $t = x$. V tom je však spor, neboť splynou body *2* a *3*.

Schéma N-7. Označme $a = ty + t - x$. Z přímek *P-0* a *Q-9* vypočítáme souřadnice bodu $3 = (y + 1, x + y, y - a)$, obdobně z přímek *3-5* a *Q-8* souřadnice bodu $2 = (y + 1 - a, x + y, y - a)$. Aby na přímkách *2-0*, *3-6* a *Q 7* ležel bod *4* musí být $a \cdot (y + 1) \cdot B = 0$, kde $B = a + ax - ty - xy = 0$, neboť v případě $a = 0$ by splynuly body *2*, *3* a v případě $y = -1$ přímky *3-Q-9*, *4-Q-7*. Podmínka, aby na přímce *P-6* ležel bod *2* je $(t + 1) \cdot (x - t) + Bt = 0$, čili buď $t = -1$, nebo $x = t$, ale v prvém případě splynou přímky *3-P-0*, *4-P-8* a v druhém přímky *3-P-0*, *2-P-6*.

Schéma N-8. Pomocí přímek *P-6* a *Q-9* vypočítáme souřadnice bodu $2 = (y + 1, x + y, y - ty)$. Obdobně z přímek *2-0* a *Q-7* souřadnice bodu $3 = (y + 1, x + y + ty, y)$ a bod $4 = (1 + y - ty, x + y, y - ty)$ získáme z přímek *2-5* a *Q-8*. Přímka *3-4* má souřadnice $3\text{-}4 = (x + ty, -1, 1 - x - ty)$ a má-li na ní ležet bod *6*, musí být $ty = 0$, ale to je spor s U.2.

V následující kapitole ukážeme, jak možno pomocí souřadnic U.2 realisovat všechna schémata R-2 až R-27.

Přicházíme k předpokladu, že každý B^3-bod je typu B^{32}. Pro schémata tohoto typu platí

$$\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c}{1} & 5\text{-}6\text{-}7 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 9 & 5\text{-}8\text{-}9\,. \\ 0 & 8 & P & Q & 7\text{-}0\text{-}9 \end{array}$$

Zřejmě můžeme souřadnicový systém v tomto případě volit takto: $5 = (1, 0, 0)$, $7 = (0, 1, 0)$, $9 = (0, 0, 1)$, $1 = (1, 1, 1)$. Na přímce $5\text{-}7 = (0, 0, 1)$ upevníme bod $6 = (x, 1, 0)$, na přímce $1\text{-}7 = (1, 0, -1)$ bod $P = (1, y, 1)$ a na přímce $1\text{-}9 = (1, -1, 0)$ bod $Q = (1, 1, t)$. Pak bod *0* leží na přímce $1\text{-}5 = (0, 1, -1)$ a na přímce $7\text{-}9 = (1, 0, 0)$, čili pro jeho souřadnice platí $0 = (0, 1, 1)$. Obdobně z přímek *1-6* a *5-9* vypočítáme souřadnice bodu $8 = (1 - x, 0, 1)$. Shrnujeme:

U.3 $\quad 1 = (1, 1, 1)\,,\quad 5 = (1, 0, 0)\,,\quad 6 = (x, 1, 0)\,,\quad 7 = (0, 1, 0)\,,$

$8 = (1 - x, 0, 1)\,,\quad 9 = (0, 0, 1)\,,\quad 0 = (0, 1, 1)\,,\quad P = (1, y, 1)\,,\quad Q = (1, 1, t)\,.$

Schéma N-9. Z přímek *P-8* a *Q-7* vypočítáme souřadnice bodu $4 = (x, txy - ty + y, tx)$. Z přímek *4-0*, *P-9* souřadnice bodu $3 = (x, xy, xy + tx - txy + ty - y)$. Podmínku, aby body *3*, *Q*, *6* ležely na jedné přímce můžeme zapsat ve tvaru $A = (x - 1) \cdot (2txy - xy + y - tx) + t \cdot (y - x) = 0$. Z přímek *4-5* a *P-6* vypočítáme ještě souřadnice bodu $2 = (tx - txy + xy, txy + y - ty, tx)$ a zjistíme, že podmínka, aby body *2*, *Q*, *0* ležely na přímce zní: $B = tx \cdot (ty - t - 3y + 2) + y \cdot (x + t - 1) = 0$. Tedy také $0 = A \cdot (t - 2) - B \cdot x = y \cdot (t - 1) \cdot (x - 1) \cdot C = 0$, kde $C = tx - x - t + 2$. V případě $y = 0$ splynou body *3*, *4*; v případě $t = 1$ splyne bod *Q* s bodem *1* a v případě $x = 1$ bod *8* s bodem *9*. Musí tedy být $C = 0$ a přímku *2-3* můžeme upravit na tvar $2\text{-}3 = (txy - xy - tx, x^2 - x - 1 + xy, x - x^2y)$ a má-li na této přímce ležet bod *8*, pak $x \cdot (y - 1) \cdot D = 0$, kde

$D = t - 1 - tx = 0$, neboť v případě $y = 1$ by splynuly body *P* a *1* a v případě $x = 0$ body *6* a *7*. Je tedy také $0 = C + D = 1 - x$ a splynou body *8*, *9*. Schéma N-9 tedy není realisovatelné.

Schéma N-10. Z přímek *6-P* a *5 Q* vypočítáme $2 = (x + t - txy, 1, t)$, dále z *2-7* a *Q-0* bod $3 = (x + t - txy, 2t - txy + x + t^2xy - tx - t^2, t)$ a konečně z přímek *P-0* a *2-9* bod $4 = (x + t - txy, 1, 1 - txy + x + t + txy^2 - xy - ty)$. Označme ještě $A = t + y - 2$; $B = xy - x - y$; $C = txy - tx - 1$; $D = (txy - x - t + 1) . B + (1 - x) . A$; $E = txy . (t - 1) + ty . (y - 1) + t . (2 - t - x) + x - y$. Ukažme ještě, že musí platit:

$$\text{(Z)} \qquad txy . (x - 1) . (y - 1) . (txy - x - t + 1) \neq 0 .$$

V případě $x = 0$ splynou body *6*, *7*, v případě $y = 0$ přímky *8-5-3* a *5-8-9*; v případě $t = 0$ body *2*, *6*; v případě $x = 1$ body *8*, *9*; v případě $y = 1$ body *1*, *P* a v případě $txy - x - t + 1 = 0$ body *2*, *Q*.

Podmínka, aby na jedné přímce ležely body *3*, *P*, *8* zní $x . E = 0$, tedy $E = 0$, obdobně pro body *4*, *Q*, *8* platí $D = 0$. Souřadnice přímky *3-4* můžeme nyní napsat ve tvaru $(txy - tx - ty + t - 1, 1, tx + 1 - t - x)$ a má-li na ní ležet bod *6*, pak $(x - 1) . C = 0$, z čehož podle (Z) je $C = 0$. Dále se ihned přesvědčíme, že je také $0 = E + C . (ty - txy + x - y) + D . t = ty . (1 - x) . A$, čili podle (Z) také $A = 0$ a kromě toho z podmínky $D = 0$ plyne $B = 0$. Protože ale $0 = C . (y - 2) + t . (2 - y) . A + B = t . (y - 1)^2$ vidíme spor s podmínkou (Z). Schéma N-10 není realisovatelné.

Schéma N-11. Z přímek *P-5* a *Q-0* vypočítáme souřadnice bodu $4 = (1 - y, ty - y, t - 1)$ a obdobně z přímek *Q-6* a *4-9* souřadnice $2 = (1 - y + xy - x, xy - txy - y + ty, txy - t^2xy + t - ty)$. Podmínka, aby body *2*, *P*, *8* ležely na přímce zní: $y . (t - 1) . (x - 1) . (txy - x + y - 1) = 0$. V případě $y = 0$ splynou přímky *2-P-8*, *5-8-9*. V případě $t = 1$ (resp. $x = 1$) body *1*, *Q* (resp. *8*, *9*) a musí tedy být $txy - xty = 1$. Lze tedy souřadnice bodů *2* a *4* upravit takto: $2 = (x^2 - x, x^2 - 1, tx^2)$, $4 = (x, x + 1, 1 + tx)$. Pak z přímek *2-7* a *P-0* vypočítáme $3 = (x - 1, tx + xy - x - y + 1, tx)$ a souřadnice přímky $3\text{-}4 = (tx - x, 1, xy - y - x)$. Na ní má ležet bod *6*, čili $tx^2 - x^2 + 1 = 0$. Pak ale $2 = (x, x + 1, x + 1)$ a bod *2* leží na konfigurační přímce *1-5-0*. Spor je v tom, že má být oddělen od bodů *1*, *5*, *0*. K tomuto schématu se ještě později vrátíme.

Schéma N-12. Z přímek *P-8* a *Q-7* vypočítáme $3 = (x, txy - ty + y, tx)$. Dále z přímek *3-9* a *0-Q* bod $4 = (x, txy - ty + y, txy - ty + y + tx - x)$ a konečně bod $2 = (tx^2y - txy - x^2 + x + xy, txy - ty + y, tx)$ z přímek *3-5* a *6-Q*. Na přímce *2-4* má ležet bod *8*, pak ale $ty - txy - y = 0$ a splynou přímky *2-4-8*, *5-8-9*.

Schéma N-13. Označme $A = x - y . (tx + 1 - t)$. Z přímek *P-8* a *Q-7* vypočítáme souřadnice bodu *3* $= (x, x - A, tx)$. Podobně z přímek *3-9* a *6-0* souřadnice bodu *2* $= (x, x - A, x - A - 1)$. Podmínka, aby na přímkách *2-5* a *Q-8* a *3-6* ležel bod *4* tedy zní $(tx + 1 - t) . B = 0$, kde $B = (2 - y - t) . A + tx - ty + xy - 2x + 1 = 0$, neboť v případě $tx + 1 = t$ je $A = x$ a splynou přímky *2-4-5*, *2-3-9*. Podmínka, aby bod *2* ležel na přímce *P-Q* se dá zapsat ve tvaru $A + B = 0$, čili také $A = 0$, ale to je spor, neboť pak splynou body *3* a *Q*.

Schéma N-14. Označme $a = ty - 1$, $b = 1 - x - y$. Z přímek *P-9* a *Q-0* vypočítáme *3* $= (1, y, t + y - 1)$; z přímek *Q-6* a *3-7* souřadnice bodu *4* $= (tx, tx + xy + b, t^2x + txy - tx)$, z čehož plyne $tx \neq 0$, neboť jinak splynou body *4* a *7*. Podmínka, aby bod *2* ležel na třech přímkách *3-8*, *4-5*, *6-0* zní $(x - 1 - tx) . A = 0$, kde $A = x + 2b - bt - by = 0$, neboť v případě $x - 1 = tx$ splynou body *3*, *4*. Z přímek *6-0*, *4-5* vypočítáme *2* $= (x - xy - tx^2, 1 - y, tx)$. Podmínka, aby bod *4* ležel na přímce *P-8* se dá napsat ve tvaru $x . (t + y - 1) . B - A . tx = 0$, kde $B = ax - a - bt = 0$, neboť v případě $t + y = 1$ splynou přímky *3-4-7*, *2-4-5*. Konečně podmínka, aby bod *2* ležel na přímce *P-Q* zní $B . (1 - y) - atx^2 = 0$, čili $a = 0$, takže také z $B = 0$ plyne $b = 0$ a z $A = 0$ také $x = 0$, což je ovšem ve sporu s výsledkem $tx \neq 0$.

Schéma N-15. Z přímek *Q-6*, *P-8* vypočítáme souřadnice bodu *4* $= (tyx^2 - x^2 + x - txy, txy - ty - xy + y, tx - txy)$. Obdobně z *4-9*, *P-5* vypočítáme souřadnice bodu *3* $= (x - txy, y - ty, 1 - t)$. Podmínka, aby bod *3* ležel na přímce *0-Q* potom zní: $(1 - t) . A = 0$, kde $A = txy - x + y - 1 = 0$ neboť v případě $t = 1$ splynou body *1*, *Q*. Z přímek *6-0*, *P-Q* pak již pomocí $A = 0$ snadno vypočítáme souřadnice bodu *2* $= (x, 0 -1)$. Protože *4-7* $= (ty - t, 0, txy - x + 1 - ty)$, pak podmínka, aby na této přímce ležel bod *2* zní $B = ty - tx + x - 1 = 0$. Rovnici přímky *2-3* pak můžeme upravit na tvar *2-3* $= (1, -x - tx^2, x)$ a ihned je patrno, že na ní nemůže ležet bod *8* $= (1 - x, 0, 1)$.

Tím jsme ukázali, že všechna tato schémata nemohou být realisovatelná. Jedinou vyjímkou je zde schéma N-11, jestliže ovšem přijmeme definici schémat singulárních (viz kapitola poslední). V následující kapitole ukážeme, že ostatní schémata (skupiny R) již realisovat lze a to takto:

KAPITOLA 4

Užijeme nejprve zápisu U.1 z předchozí kapitoly a dokážeme realisovatelnost schématu R-1. V U.1 jsou zapsány již souřadnice všech konfiguračních bodů, kromě *2*, *3*, *4*. Souřadnice těchto bodů a zároveň podmínky pro neznámé x, y, t vyjádříme v tomto schématu (a obdobně i v následujících) tímto způsobem:

Schémata skupiny U.1

R-1: $2 = (2 - 2t, 1, 2 - y - t)$; $3 = (x, 2 - t - x, 1 - x)$; $4 = (2x, 2, 2 - y)$, kde $ty = x$, $x = 1 - t^2$, $2t^3 + 3t^2 + t = 1$.

Schémata skupiny U.2

R-2: $2 = (1, x, ty)$; $3 = (x + 1, 1, 1 + x - t)$; $4 = (1, ty + t, ty)$, kde $x = t^2 + t - 1$, $y = t^4 + 2t^3 - 1$; $t^6 + 2t^5 - t^3 - 2t^2 + 1 = 0$.

R-3: $2 = (1, x, ty)$; $3 = (1, ty - y - x - 1, ty)$; $4 = (2 + y - ty,\ x + y,\ 1 + y - ty)$, kde $tx + t + 2 + y = 0$; $t^2y + y + 1 = 0$; $t^5 + 4t^4 + 3t^3 + 4t^2 + t + 1 = 0$.

R-4: $2 = (t - tx, x, ty + t + x - 1)$; $3 = (1 - t, tx + ty, 1 - t - x)$; $4 = (1 - x, tx + ty, 1 - t - x)$, kde $t^2y = x - t^2x$; $3x = 2t^5 - 7t^4 + 5t^3 - 4t^2 + 2$; $t^7 - 4t^6 + 4t^5 - 2t^4 + t = 1$.

R-5: $2 = (y + 1, 1, ty)$; $3 = (ty + t, 1, ty)$; $4 = (y + 1, 1, xy + x + y - 2tx)$, kde $y = t - x$; $x = t^3$; $t^5 + t^4 + t^3 - t = 1$.

R-6: $2 = (y + 1 - t, xy, y + 1)$; $3 = (y + 1 - t, -1, y + 1)$; $4 = (y + 1 - t, xy, ty + 2y + 2)$, kde $y = tx - x - 1$; $x = t + 1$; $t^4 + t^3 - t^2 - t = 1$.

R-7: $2 = (1 + t - x, 1, ty)$; $3 = (ty + t, 1, ty)$; $4 = (u, tu + ty, ty)$, kde $x^2 = u$; $1 - ux - x = xy$; $tu = ux + x + 1$; $u^3 + u^2 = 1$.

R-8: $2 = (x, y + x^2, y)$; $3 = (a, a - 1, a + y)$; $4 = (y + 1, y + ty + t, y)$, kde $y = t - at = a - 1 - ax$; $x \cdot (a - 3) = a^4 - a^3 + 2a^2 - 2a + 2$; $a^7 + a^5 - 3a^4 + 4a^3 + 2a^2 + 1 = 0$.

R-9: $2 = (1, x - t, -t)$; $3 = (1, x + ax, -t)$; $4 = (1, t - a^5, -a^5)$, kde $tx = 1 - a$, $y = a^2 - a$, $t = -a^2$, $a^6 - a^5 + 2a^3 - 2a^2 + 2a = 1$.

R-10: $2 = (1, t + y, 2t - xy)$; $3 = (1, t + y, 2y + 3t + 1)$; $4 = (1, -t - y, -2y - 2t)$, kde $xy + y + 2 = t + x + 2 = 0$, $y^3 + 2y + 4 = 0$.

R-11: $2 = (-1, 1, 1 + x)$, $3 = (1, -1, t + 1)$, $4 = (-1, tx, tx + t)$, kde $ty + t + 1 = xy + 1 - x = 0$, $y^3 - 2y^2 + 2 = 0$.

R-12: $2 = (y + 3 - 3a, x + y + 2 - 2a, 1)$, $3 = (x + y + 3 - a, x + y + 2 - 2a, 1)$, $4 = (x + y + 3 - a, t + 1, 1)$, kde $y - t + 2x = tx + x - 1 = at - t - a^2 = a^4 + a - 1 = 0$.

R-13: $2 = (tx + y, tx^2 + x + y - ty, y - ty)$, $3 = (tx + y, x + y, y - ty)$, $4 = (y + 1,\ x + y,\ y - ty)$, kde $x \cdot (t - 2) = 1 - t$, $y = t^3 + 2t^2 + 6x^2 + 6t - 14x - 9$, $t^7 - 2t^6 + t^5 - 5t^4 + 7t^3 + 3t^2 - 2t = 4$.

R-14: $2 = (a, 2 - y, 2 - y - t)$, $3 = (1, 2 - y, 2 - y - t)$, $4 = (y + 1, a, y + a - t)$, kde $t = ax$, $x + y = a$, $x + 1 = a^2$, $a^4 - a^3 - a^2 + a = 1$.

R-15: $2 = (a, 1 + ax, 1)$, $3 = (a, 2 + ax, 1)$, $4 = (2a, 2 + ax, 1)$, kde $t + x^2 = 0$, $x + 1 = a$, $xy - x = 2$, $a^3 - a^2 + 1 = 0$.

R-16: $2 = (t + at, x + 1, 1 - tx + axy), 3 = (atx + aty, x + y, atx + aty - 1)$, $4 = (at, 1, 1 - t)$, kde $at = 1 - ay$, $y = ax - 1$, $x . (x + 1) . (2 - x^2 - 3ax) = 1 + 2x$, $x^8 - x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 5x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$.

R-17: $2 = (1, 1 + 2x + 3y, 1 + 3y - x)$, $3 = (1, 1 + 2x + 3y, -t)$, $4 = (1, 3x + 4y + 2, -t)$, kde $x = t + y$, $t = 7y^2 - 2$, $7y^2 . (y + 1) = 1$.

R-18: $2 = (at + a, y - at, 2a - ay)$, $3 = (at + a, y - at, y - 1)$, $4 = (y, y - at, y - 1)$, kde $t + y = 3a$, $ty = 1$, $x = 2ay - a - 1$, $3a^2 = a + 1$.

R-19: $2 = (1, a + x, a), 3 = (1, a + x, a + 1), 4 = (2, a + 1 - ax, 2a + 2)$, kde $t . (x + a) = x - 1$, $ax . (a + 1) + a^2 + 1 = 0$, $ay + ax + a + x = 0$, $a^5 - 2a^4 - 2a^3 - 4a^2 - 2a = 1$.

R-20: $2 = (t, t + x, t + x - tx), 3 = (t, t + x, t + x - tx + 1), 4 = (t + 1, t + x, t + x - tx + 1)$, kde $t^5 + t^3 + 2t^2 - t + 1 = t^4 + t^3 + t^2 + 2t - y = tx + x + y = 0$.

R-21: $2 = (10, 1, 9)$, $3 = (10, 1, 15)$, $4 = (2, -1, 3)$, kde $t = -2$, $5y = 3$, $5x = -4$.

R-22: $2 = (1, 2x + 2t, 2t + x), 3 = (1, 2x + 2t, 2y - 3), 4 = (y + 1, 2t + 2, y)$, kde $tx = 1 - 2ty$, $ty + y = t + 2$, $y^4 - 2y^3 = y - 3$.

R-23: $2 = (1, u - t, u - t - x), 3 = (1, u - t, 1 - t), 4 = (x, u - t, u - t - 1)$, kde $y = ux - 1 - x$, $tx = 1$, $x^3 - ux^2 + x . (u - 1)^2 + 2 = u$.

R-24: Toto schéma je ekvivalentní se schématem S_1, popsaným v Časopise pro pěstování matematiky, ročník *91* (1966), str. 303. Konfigurace leží na kubice. Schéma R-24 přechází na S_1 permutací $(PQ), (59), (806)$.

R-25: $2 = (1, u + 1, u + 1 - x), 3 = (1, u + 1, -y), 4 = (1 - tu, u + u^2, tuy)$, kde $y = t - 1$, $x = u . (1 + t + u)$, $tu = 1 - u^2 - u^3 - u^4$, $u^6 + 2u^5 + u^4 - u^3 - 2u^2 - u + 1 = 0$.

R-26: $2 = (x, tx + ty, -xy)$, $3 = (x, tx + ty, ty)$, $4 = (x, 1, -xy)$, kde $t = xy + x$, $y . (x + 2) = -2x - 3$, $x^4 + 2x^3 + 2 = 0$.

R-27: $2 = (1, a, aty)$, $3 = (ty + t, t, ty)$, $4 = (1, a, a - t)$, kde $a = t^3 - t^2$, $tx = t^2 - ty - y$, $t^2y + y = t - 1$, $t^7 - t^5 - 2t^4 - t^2 = 1$.

Schémata skupiny U.3

R-28: $2 = (x, xy, 1)$, $3 = (x + 2, 2xy, 2)$, $4 = (2x, y + 2, 2)$, kde $2y = 3 - t$, $4x = 6 - t$, $t^2 - 5t + 2 = 0$.

R-29: $2 = (1, y, t + y - 1)$, $3 = (t - 1 - a + y - x, y - a, t - 1)$, $4 = (1, 6 - 2t - 2y, 3 - a - t)$, kde $at = a + 1$, $x + a = ax$, $ay + y = 2a$, $a^4 + a^2 + a + 1 = 0$.

R-30: $2 = (1, 1 + u, 2 + u - y)$, $3 = (1, y, t + y - 1)$, $4 = (x, txy - ty - y, tx)$, kde $xy = -t - u$, $t . (u + y) = u + 1$, $y . (3u - 2) = 2u^4 - u^3 - 4u^2 + 2$, $2u^7 + u^6 - 4u^5 - u^4 + 11u^3 + 12u^2 + 3u = 1$.

R = 31: *2* = (ty, 1, t), *3* = (1, a, t + a − 1), *4* = (1, y, t + a − 1), kde $ax = a + y$, $ty = y + 1 - a$, $y = a^2 - 1$, $a^5 - 3a^3 + 2a = 1$.

R-32: *2* = (a + 2, 2, t), *3* = (a + 2, t + 1, t), *4* = (a + 2, 2, 1), kde $y = 2$, $t.(a + 1) = a$, $x = 3a + 3 - t$, $a^3 = a + 1$.

R-33: *2* = (1, t + u + y − 2, t + u − 1), *3* = (1, u, t + u − 1), *4* = (1, t + u + y − 2, 2x + y − t), kde $y = t - tx$, $tu = x - 1 + 2u$, $u^3 - u^2x + u^2 + 3ux - 2u - x = x^2 - x + 1 = 0$.

R-34: *2* = (1, 2 − x, x + 1), *3* = (1, 2, x + 1), *4* = (1, 2 − x, 2), kde $t = x$, $y = 1 - x$, $x^2 - x + 2 = 0$.

R-35: *2* = (3 − t − x, 5 − 2t − 2x − y, 1), *3* = (3 − t − x, 2 + y − t, 1), *4* = (x + y, 2 + y − t, 1), kde $t = ax + 1 - a$, $y = a + 1$, $x = a^2$, $x^2 - x + 1 = 0$.

R-36: *2* = (1, a, t + a − 1), *3* = (1, a − a^3, t + a − 1), *4* = (1, a, a + 1 − y), kde $a^2x = 1$, $t = ax + y + 1 - 2a$, $y = a^5 - 2a^4 - 2a^3 + 4a^2 - a$, $a^6 - 5a^4 - 2a^3 + 3a^2 = a + 1$.

R-37: *2* = (u + t − 1, 1, 1), *3* = (u + t − 1, x + u, 1), *4* = (1 − x, x + u, 1), kde $xy = 1$, $ut = y$, $y = 1 + u$, $u^5 = 1$, $u \neq 1$.

R-38: *2* = (1, v^2, *u*), *3* = (1, v, u), *4* = (1, v^2, vu), kde $t = xy$, $x^2 = x - 1$, $y = v + 1 - u$, $u = v^3x$, $v^8 + v^7 - v^5 - v^4 - v^3 + v + 1 = 0$.

R-39: *2* = (1, 1 − u, 2 − y − u), *3* = (2, 2t − ux − uy + 4u + 2, 4 − 2u − 2y), *4* = (1, 1 − u, t − u), kde $x = 2u^6 - 3u^5 + 6u^4 - 7u^3 + 3u^2 - u - 2$, $y = -u^6 + u^5 - 2u^4 + 3u^3 + 3$, $t = u^4 - u^3 + u^2 - u - 1$.

R-40: *2* = (−x, 3y − t, *y*), *3* = (−x, 1 + tx, y), *4* = (−x, 3y − t, 2xy + 1), kde $t = y.(2 - x)$, $y = x + 1$, $x^4 - 2x^2 - 3x = 1$.

R-41: *2* = (a + 1, ay + y − a, 1), *3* = (a + 1, 2y − 1, 1), *4* = (1 + a − ay, y, 1), kde $2ty = 2 - x$, $xy = ay + x$, $ax = a - 2$, $a^5 + a^4 - a^3 + 3a^2 - 4a + 4 = 0$.

R-42: *2* = (x, t, x − 1), *3* = (x, 2x − tx − 1, x − 1), *4* = (x, t, at − 1), kde $ay = a + t - x$, $x = at.(a - 1)$, $t = a.(a - 1)^2$, $a^6 - 4a^5 + 5a^4 - 2a^3 + 1 = 0$.

R-43: *2* = (xy − x, xy − 2x + t + y − 3, x − tx), *3* = (y − 1, y − ty, 1 − t), *4* = (xy − x, xy − 2x + t + y − 3, xy − tx + y − 1), kde $t = 2 + x - y - xy + y^2$, $y = x^2$, $x^7 - 2x^6 + 2x^4 = x + 1$.

R-44: *2* = (ay + 1, a + y, a), *3* = (1, a + y, a), *4* = (1, a + y, t), kde $x.(a + y - 1) = 1$, $t = 1 - y$, $y^2 = y + 1 - a$, $a^2 = a - 1$.

R-45: *2* = (1, t + x, t). *3* = (1, t + x + y − 1, x + y + 2t − 2), *4* = (1, *t* + x + y − 1, t + x), kde $y = 2 - t - x^2$, $tx = -1$, $x^5 - x^4 + x^2 - x = 1$.

R-46: *2* = (1, ay^2 − 2ay + a + y − 1, ay^2 − 2ay + a), *3* = (1, ty + 1 − 2t, ty − t), *4* = (1, ty + 1 − 2t, t), kde $y.(x + 1) = 2x - a + 1$, $x.(1 - a) = 1$, $t.(1 + a) = a$, $a^5 - a^4 + 2a^3 + 3a = 2$.

R-47: $2 = (1, tux - ux + 2 + u - t, tux + u - ux)$, $3 = (u - tuy, x - tx, t)$, $4 = (1, t + y - 1, t)$, kde $uy = x^2$, $u = x^2 - x + 1$, $t \,.\, (1 - 2ux) = u \,.\, (2 - x - u)$, $x^9 - 4x^8 + 7x^7 - 8x^6 + 7x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x = 1$.

R-48: $2 = (1, 5 - 2a, 6 - 3t)$, $3 = (3, a, 3t)$, $4 = (3, a, 2 + a)$, kde $2t = a + 1$, $3y = 1$, $x = -1$, $a^2 = 5$.

R-49: $2 = (1, t + y + 1 - at, t + 1 - at)$, $3 = (1, t + y, t)$, $4 = (1, t + y, t + 1)$, kde $xy = 1 - a$, $x \,.\, (a + 1) = t + 1 - at$, $t^2 = t - a$, $a^7 - 2a^3 - 3a^2 + a + 4 = 0$.

R-50: $2 = (x, 1, 1)$, $3 = (x, ty + 2 - t, 1)$, $4 = (ty + x, ty + 2 - t, 1)$, kde $2x = 3 - 2y - t$, $2y = (t - 1)^2$, $t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t + 2 = 0$.

R-51: $2 = (t - x, 1 - tu, 1)$, $3 = (t - x, ty, 1)$, $4 = (u + 1 - t, 1 - x, 1)$, kde $t = 1 + u^2$, $ty = t - x + 1 - u$, $tx = t - 1$, $u^4 + u^2 = u - 1$.

R-52: $2 = (2, 1 - 2x, 1)$, $3 = (2, -4 - 2x, x - 1)$, $4 = (2, 1 - 2x, x - 1)$, kde $2ty = -1$, $2y = -3x - 1$, $x^2 + 1 = 0$.

R-53: $2 = (2, 2 - 2u, 2 - 2u - y)$, $3 = (1, y + u, t)$, $4 = (1, 1 - u, u - ut)$, kde $x = t = 1 + u$, $ty = 2$, $u^4 + u^2 + u + 1 = 0$.

R-54: $2 = (vx, a, a - v)$, $3 = (1, y, a - v)$, $4 = (1, a, a - v)$, kde $y = 1 + v$, $vx = ty + y - a$, $vt = (a - 1)^2 + v \,.\, (2v - 1)$, $av \,.\, (2v^2 + 11v + 5) = 1 + 5v + 8v^2 - 6v^4$, $7v^8 - 13v^7 - 40v^6 - 20v^5 + 12v^4 + 13v^3 - v^2 - 4v = 1$.

R-55: $2 = (x, txy + vy, txy + vy - 1)$, $3 = (x, txy + vy, tx + v)$, $4 = (x, txy + 1 - t, tx)$, kde $xy \,.\, (3ty - y - t - 2) = 1 + y - t - y^3$, $tv - t = v^2$, $vy = 1 + v - t$, $v^{12} - 5v^{11} + 14v^{10} - 24v^9 + 29v^8 - 25v^7 + 14v^6 - 7v^4 + 4v^3 + 2v^2 = 3v - 1$.

R-56: $2 = (ax, a + x, x)$, $3 = (a, y, 1)$, $4 = (a, y, at + y - a)$, kde $ty \,.\, (x - 1) = x + a - 1 - y$, $xy = 2x - 2ax + 3a - 1 - a^3$, $x \,.\, (2a + 1) \,.\, a^3 = -a^7 + a^6 - 2a^5 - a^4 + 9a^3 - 3a^2 - 1$, $a^{10} - 2a^9 - a^8 + 6a^7 + 12a^6 + 2a^5 + 18a^4 - 13a^3 + 3a^2 = 2a - 1$.

R-57: $2 = (b, ay, 1)$, $3 = (a + 1, y, 1)$, $4 = (b, ab + b - a - a^2, 1)$, kde $ay = 2 - x$, $t \,.\, (a + 1) = a + 2 - y$, $b = a^3 + a^2 + 1$, $ax - x = a^3$, $a^6 + a^5 - 2a^4 + 2a^2 - 2a + 1 = 0$.

R-58: $2 = (ax + x, x, t - 2)$, $3 = (1, y - ay, 1 - a)$, $4 = (1, 1 - x, 1 - a)$, kde $t = x + 1 - a$, $y \,.\, (1 - a^2) = 1$, $ax = a^5 + 6a^2 + 6a + 2$; $a^6 + a^4 + 5a^3 + 7a^2 + 4a + 1 = 0$.

R-59: $2 = (a + 1, 1 - a - x, 2 - a)$, $3 = (x + 1, x + 1 + a, x + 1 - a)$, $4 = (a + 1, 1 - a - x, x + 1 + 2a)$, kde $x^3 + x = 1$, $3t = 6 - 2a - 3y$, $a + x = ax$, $3y + 2x = 1$.

R-60: $2 = (tx + xy - 2x, txy - x - 1 + y, 1 - t + txy - x)$, $3 = (1, t + y - 1, t)$, $4 = (txy + 1 - tx - xy + x, ty, t)$, kde $y \,.\, (x^2 + x - 1) = -tx^2 + 2x^2 + x - 1$, $t \,.\, (x^5 + x^4 - x + 1) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 1$, $x^{10} - 2x^9 - 4x^8 + x^7 - x^6 + x^5 + 5x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x = 1$.

R-61: $2 = (vx, av - a + 1, av - a + 1 - v)$, $3 = (1, y - ay, 1 - a)$, $4 = (1, y, 1 - a + ay)$, kde $2x = 3a + 1 - v$, $2t = av - v - 2a$, $2ay = av + a - 1$, $3a^2 = 1 + 2v$, $v^2 + 2 = 0$.

R-62: $2 = (ux, u + x, x)$, $3 = (1, 1 - x - u, t - u - x)$, $4 = (u, uy, 1)$, kde $tx = 2x - 1 - ux$, $y . (u - t + x) = u + x - 1$, $x . (u^2 + u - 1) = -u^3$, $u^8 - u^7 - 2u^6 - 4u^5 + 5u^4 + u^3 + u^2 - 3u + 1 = 0$.

R-63: $2 = (2 - t, 1 + y - ty, 1)$, $3 = (2 - t, y, 1)$, $4 = (t - 1 - y, 3t - 2x - 4, 1)$, kde $t = 1 + y - y^2$, $2x = (y - 1)^3$, $y^4 - 2y^3 = 1$.

R-64: $2 = (1, a, 2y - t)$, $3 = (1, t + 1 - a - y, 2y - t)$, $4 = (1, a, a + 1 - y)$, kde $x = 2y - 4 - 10a$, $t = 4y - 6a + 1$, $2y = 1 + 4a^3$, $4a^2 . (a + 1) = 2a + 1$.

R-65: $2 = (ux, u + y - 1, y - 1)$, $3 = (ux, u - 1, y - 1)$, $4 = (ux, u + y - 1, 2y - 1 - y^2)$, kde $u^7 - 2u^5 + u^4 + 3u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$, $x . (y - 1) = u . (y - 1) + 1$, $y = u^2$, $t = u + 1$.

R-66: $2 = (1, u + 2 + t - y, 1 + x + 2t - y)$, $3 = (1, u + 1, t)$, $4 = (1, u + 1, 2 + u - y)$, kde $x = tu = uy - y$, $y = u^5 + 2u^4 - u^3 - 3u^2$, $u^7 + u^6 - 4u^5 - 3u^4 + 5u^3 + u^2 - u + 1 = 0$.

R-67: $2 = (t + 1, 1, at)$, $3 = (t + 1, 1, x + 2a - 1)$, $4 = (t + 1 - a, 1, t)$, kde $t^2 = at - 1$, $a^2 = a + 1$, $x = at + t - 2a$, $y = 1 - t$.

R-68: $2 = (1, 2y - y^2, xy - x)$, $3 = (1, 2y - y^2, t)$, $4 = (1, x + y, x + 1)$, kde $t = 2 + 2y - y^2 - 2y^3 + y^4$, $x = 1 + y^3 - y^4$, $y^5 - 2y^4 + y^2 + 1 = 0$.

R-69: $2 = (x - tx, 1, t)$, $3 = (1 - u, xy - x, t)$, $4 = (x - tx, xy - x, t)$, kde $x = 2 + u$, $ty = 1$, $tu^2 = 1 - u$, $u^4 + 2u^3 + 2u^2 - u - 1 = 0$.

R-70: $2 = (1, xy, 1 + ax)$, $3 = (1, 1 - t + axy, 1 + ax)$, $4 = (1, y, a)$, kde $x^5 - x^4 + 2x^2 = 1$, $t = -x^4 + x^2 - 2x - 1$, $y . (x^2 - tx + a - 3) + a = 0$, $t + y = 1 + a$.

R-71: $2 = (vx - x, v, 1)$, $3 = (v, av, a)$, $4 = (v, vy, a)$, kde $vt = v + a - vy$, $vy = v . (a + vx) + a - 1$, $a = (1 - v + v^3) . (1 - vx)$, $vx = 1 - v - 2v^2 + 2v^3 - v^5$, $v^9 - v^8 - 3v^7 + 6v^6 + v^5 - 8v^4 + 4v^3 + 3v^2 - 3v + 1 = 0$.

R-72: $2 = (1, vy, va)$, $3 = (1, 1 + a - t, a)$, $4 = (1, y, a)$, kde $vx . (y - a) = 1$, $t = a + x - vx$, $ax = a + v - 1$, $v . (a^3 - a^2 + a - 1) = a^5 - 2a^4 + a^3 + a^2$, $a^{11} - 5a^{10} + 10a^9 - 8a^8 - 2a^7 + 9a^6 - 6a^5 - 3a^4 + 8a^3 - 7a^2 = 1 - 3a$.

R-73: $2 = (t - y + xy - txy,\ ay + t - ty, at)$, $3 = (a, ay, at + ty - t)$, $4 = (a, ay + t - ty, at)$, kde $(x + a - at) . a^2 = tx$, $axy = a + x$, $x . (1 - a) = 1$, $a^9 - 2a^8 + a^6 - a^3 + a^2 = 1$.

R-74: $2 = (txy + x^2 - tyx^2, x + ty, txy)$, $3 = (1, y, t + y - 1)$, $4 = (x + ty - txy, y, ty)$, kde $x . (t - 1) = (1 - t) . (y - 1) . y - 1$, $(y - 1) . ty^2 = -y^5 + 3y^4 - 2y^3 + y^2 - y + 1$, $y^{11} - 5y^{10} + 11y^9 - 15y^8 + 14y^7 - 12y^6 + 12y^5 - 12y^4 + 8y^3 - 4y^2 + 2y = 1$.

R-75: $2 = (x - y - tx, 1, t - txy)$, $3 = (1 - x, y - xy, t - txy)$, $4 = (1 - x, 1, t - txy)$, kde $y = ux = 1 + x^2$, $ty = t - 1$, $u^3 - 2u^2 = 1$.

R-76: $2 = (3x - 2, a + x, x - 2)$, $3 = (1, y, a)$, $4 = (a + 2, y, a)$, kde $x \,.\, (1 - a) = 2$, $t = a + 1 - y$, $y^2 - 3y + 3 = 0$, $t \,.\, (t + 1) = 1$.

R-77: $2 = (x, t, a)$, $3 = (1 - x, y - xy, y)$, $4 = (x, a - ax, a)$, kde $a^6 - 2a^4 + a + 1 = 0$, $y = a^4 - a^5$, $x = a^4 - a^2$, $t = a + 1$.

R-78: $2 = (1, 2a + 3 - t, a + 2 - t)$, $3 = (1 - a, y + 1 - a, y - 2a)$, $4 = (1, 2a + 3 - t, t)$, kde $x \,.\, (a + 1) = 1$, $2y = x + 2 + 3a - t$, $t \,.\, (a - 1) = a^2 + a - 1$, $a^6 - a^4 - 2a^2 + 1 = 0$.

R-79: $2 = (2, 2y - a - 1, x + 2 - a)$, $3 = (1, y - ay, 1 - a)$, $4 = (2, 2y + x - 1, x + 2 - a)$, kde $a^4 + 4a^2 - 2a + 1 = 0$, $4t = 7 - x - 2y$, $axy = 1 - a - y$, $2ay = a + 1$.

R-80: $2 = (1, ay, a^2 - a^3)$, $3 = (1, xy, xy - ay + t)$, $4 = (1, ay, t)$, kde $x \,.\, (t - a) = t - 1$, $at + 1 = a \,.\, (a + y)$, $ay - y = a$, $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1 = 0$.

R-81: $2 = (2, x + 1, 2a)$, $3 = (t, a, at)$, $4 = (2a - x, a - 1, 2a)$, kde $2a^4 - 5a^2 + 6a + 1 = 0$, $tx = x + a - 1$, $x \,.\, (a + y) = a \,.\, (a - 2)$, $2y = 1$.

R-82: $2 = (tu - t, 1, tu - ty)$, $3 = (u^2 - u, 1, u)$, $4 = (tu - t, 1, t)$, kde $x = uy + y - 2u + 1$, $2y - uy = t - 1$, $tu = u + 1$, $u^5 - 4u^4 + 5u^3 - 2u = 1$.

R-83: $2 = (x, a + 1, a)$, $3 = (x, a + x - tx, a)$, $4 = (xy, ay + y, a + 1)$, kde $3x = 4a^5 - a^3 + 3a^2 + 2a + 1$, $3y = 2 + a + a^3 - 4a^5$, $t = 2 + a + 2a^3 - a^4 + 2a^5$, $2a^6 + a^5 + a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1 = 0$.

R-84: $2 = (a, a + t, aty + a^2y - ay)$, $3 = (a, a + 1, at + t)$, $4 = (a, a + t, at + t)$, kde $t = (y - 1) \,.\, ya^2$, $axy = ay + y - 1$, $y \,.\, (1 + a^4) = a^4 - a^2 + 2a + 1$, $a^8 - a^6 + 2a^5 + 3a^4 - a^3 - a^2 - a = 1$.

R-85: $2 = (1, 1 + 2u - v, u - uv)$, $3 = (2t, 2, 1)$, $4 = (1, 1 + 2u - v, t)$, kde $2u^2 + 1 = 0$, $v^2 + 1 = 0$, $x = u - uv + 2t$, $2t = 1 + v$, $y = 2$.

R-86: $2 = (2u - t, y, 1)$, $3 = (2u - t, u, 1)$, $4 = (u + 1, u, 1)$, kde $u^3 - u^2 = 1$, $tu + t - 2u + 1 = ty - 1 = x - 2 - 5u + 2t = 0$.

R-87: $2 = (2 - t, 1 + y - ty, 1)$, $3 = (y, y + 1 - ty, 1)$, $4 = (y, y + ty - t, 1)$, kde $x = y^2$, $tx = 1$, $y^5 - y^3 - 2y^2 + 1 = 0$.

R-88: $2 = (3t, a, 1)$, $3 = (y, a, 1)$, $4 = (3y, 2a + 2, 3)$, kde $x = 2$, $t = y - 1$, $3y = 1 + 2a$, $ay = y + 1$.

R-89: $2 = (u, v + u, 1)$, $3 = (u, y, 1)$, $4 = (u, v + u, tu + v)$, kde $x = -u^2$, $vy \,.\, (v - 1) = x - 2uv$, $t \,.\, (y + u - 1) = y + u - uy$, $uv^3 = v^5 - v^4 - v^3 - 2v^2 - 3v - 1$, $v^9 - 2v^8 - v^7 - v^6 + 7v^4 + 7v^3 + 8v^2 + 5v + 1 = 0$.

KAPITOLA 5

Rovinné konfigurace $(12_4, 16_3)$ v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel tvoří – jak známo – množina dvanácti navzájem různých bodů a šestnáct navzájem různých přímek uspořádaných tak, že každým z bodů procházejí (právě) čtyři přímky a na každé z přímek leží (právě) tři body.

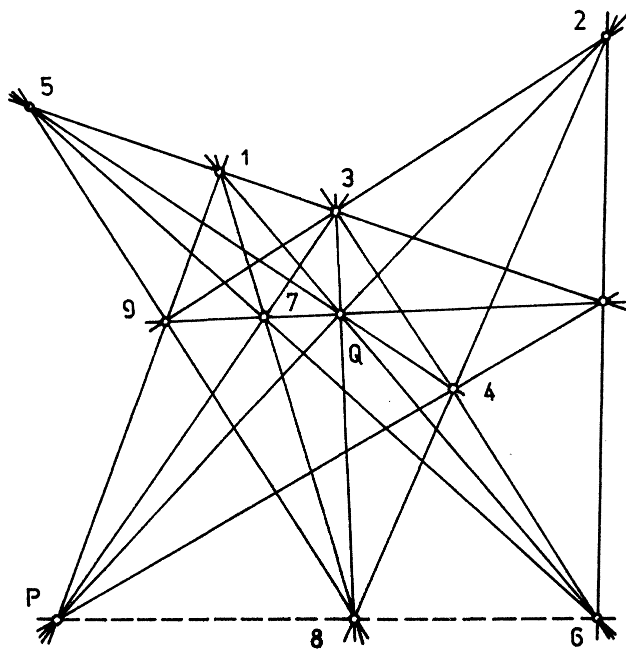
Takto definované rovinné konfigurace nazývejme *regulární*. Jestliže v definici nahradíme slova (právě) slovy (nejméně), mohl by nastat i případ, kdy některým z konfiguračních bodů prochází více přímek a na některé z přímek leží více bodů. Takové konfigurace nazývejme *singulární*. Že skutečně singulární konfigurace existují, ukážeme si v následujícím a uvážíme zároveň, že to umožňuje existence E-bodů. Má-li totiž konfiguračním bodem procházet přímka pátá, pak na ní musí ležet všechny tři body, od nichž je zkoumaný bod oddělen, čili zkoumaný bod musí být typu E.

Zaměříme se nejprve na konfigurace R-23.

Konfigurace R-23. Pro pohodlí čtenáři vypíši podrobně její schéma a souřadnice všech konfiguračních bodů:

1	*2*	*3*	*4*	*5-6-7*
5 7 9 6	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*P Q*	*5-8-9*
0 8 P Q	*9 8 0 Q*	*6 7 8*	*0 5*	*7-0-9*.

$$1 = (1, 1, 1), \quad 2 = (1, \mathrm{u} - \mathrm{t}, \mathrm{u} - \mathrm{t} - \mathrm{x}), \quad 3 = (1, \mathrm{u} - \mathrm{t}, 1 - \mathrm{t}),$$
$$4 = (\mathrm{x}, \mathrm{u} - \mathrm{t}, \mathrm{u} - \mathrm{t} - 1), \quad 5 = (1, 0, 0), \quad 6 = (1, \mathrm{x}, 0), \quad 7 = (0, 1, 0),$$
$$8 = (1, 0, 1), \quad 9 = (0, 0, 1), \quad 0 = (0, 1, 1), \quad P = (1, 1, 1 - \mathrm{t}),$$
$$Q = (\mathrm{y} + 1, \mathrm{x} + \mathrm{y}, \mathrm{y}), \quad \text{kde} \quad \mathrm{x}^3 - \mathrm{ux}^2 + \mathrm{x}\,.(\mathrm{u} - 1)^2 + 2 = \mathrm{u},$$
$$\mathrm{y} = \mathrm{ux} - 1 - \mathrm{x}, \quad \mathrm{tx} = 1\,.$$



Tato jednoparametrická konfigurace (obecně regulární), umožňuje dva případy singulárního řešení.

a) Pro hodnotu $u \doteq 0$, tedy $x^3 + x + 2 = 0$, leží E-bod *0* oddělený od bodů *3*, *8*, *Q* na konfigurační přímce *3-8-Q*.

b) V případě $u = 1$, tedy $x^3 - x^2 + 1 = 0$ dostaneme dokonce dvě singularity, které tvoří bod *Q* (oddělený od bodů *7*, *9*, *0*) a bod *3*, (oddělený od bodů *1*, *5*, *0*).

Tato singulární konfigurace je nakreslena na přiloženém obrázku. Poznamenávám k tomu, že v konfiguraci existuje vždy (pro libovolnou přípustnou volbu parametru u) jedna „cizí" přímka *P-8-6*. Dá se poměrně snadno dokázat, že konfigurační body nemohou ležet na kubice.

Konfigurace R-37.

1	*2*	*3*	*4*	*5-6-7*
5 7 9 6	*3 4 P Q*	*4 P Q*	*P Q*	*5-8-9*.
0 P Q 8	*7 9 8 6*	*5 6 0*	*0 8*	*7-0-9*.

$$1 = (1, 1, 1), \quad 2 = (u + t - 1, 1, 1), \quad 3 = (u + t - 1,\ x + u, 1),$$
$$4 = (1 - x, x + u, 1), \quad 5 = (1, 0, 0), \quad 6 = (x, 1, 0), \quad 7 = (0, 1, 0),$$
$$8 = (1 - x, 0, 1), \quad 9 = (0, 0, 1), \quad 0 = (0, 1, 1), \quad P = (1, y, 1),$$
$$Q = (1, 1, t), \quad \text{kde}$$
$$xy = 1, \quad y = ut, \quad y = u + 1, \quad u^5 = 1, \quad u \neq 1.$$

Lze dokázat, že toto schéma je možno realisovat jen tímto způsobem a vždy při něm nastanou singularity:

E-bod *2* (oddělený od bodů *1*, *5*, *0*) leží na přímce *1-5-0*,
E-bod *7* (oddělený od bodů *4*, *8*, *Q*) leží na přímce *4-8-Q*,
E-bod *9* (oddělený od bodů *3*, *6*, *P*) leží na přímce *3-6-P*.

Konfigurace R-69.

1	*2*	*3*	*4*	*5-6-7*
5 6 7 9	*3 4 6 P*	*4 P Q*	*Q P*	*5-8-9*.
0 8 P Q	*8 7 0 Q*	*5 6 0*	*8 9*	*7-0-9*

$$1 = (1, 1, 1), \quad 2 = (x - tx, 1, t), \quad 3 = (1 - u, xy - x, t),$$
$$4 = (x - tx, xy - x, t), \quad 5 = (1, 0, 0), \quad 6 = (x, 1, 0), \quad 7 = (0, 1, 0),$$
$$8 = (1 - x, 0, 1), \quad 9 = (0, 0, 1), \quad 0 = (0, 1, 1), \quad P = (1, y, 1),$$
$$Q = (1, 1, t), \quad \text{kde}$$
$$x = 2 + u, \quad ty = 1, \quad tu^2 = 1 - u, \quad u^4 + 2u^3 + 2u^2 - u - 1 = 0.$$

Je to jediná možná realisace a nastává u ní vždy singularita u E-bodu *5*, který je oddělen od bodů *2*, *P*, *Q* a leží na přímce *2-P-Q*, jejíž souřadnice jsou $(0, -t, 1)$.

Konfigurace N-11.

$$\begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & 5\text{-}6\text{-}7 \\ 5\ 7\ 9\ 6 & 3\ 4\ P\ Q & 4\ P\ Q & P\ Q & 5\text{-}8\text{-}9\,. \\ 0\ P\ Q\ 8 & 7\ 9\ 8\ 6 & 6\ 0\ 8 & 5\ 0 & 7\text{-}0\text{-}9 \end{array}$$

$$1 = (1, 1, 1)\,,\quad 2 = (x, x + 1, x + 1)\,,\quad 3 = (x, 1 + xy, x + 1)\,,$$
$$4 = (x, x + 1, 1 + tx)\,,\quad 5 = (1, 0, 0)\,,\quad 6 = (x, 1, 0)\,,\quad 7 = (0, 1, 0)\,,$$
$$8 = (1 - x, 0, 1)\,,\quad 9 = (0, 0, 1)\,,\quad 0 = (0, 1, 1)\,.\quad P = (1, y, 1)\,,$$
$$Q = (1, 1, t)\,,\ \text{kde}$$
$$t = -2x^3 - x^2 - 3\,,\quad y = -x^3 - x^2 - 2\,,\quad x^4 + 2x - 1 = 0\,.$$

Tato jediná možná realisace vede na singulární konfiguraci, kde E-bod *2*, oddělený od bodů *1*, *5*, *0* leží na přímce *1-5-0*. Výsledky této práce lze shrnout do tohoto

Tvrzení. *Existuje celkem* 104 *schémat konfigurací* $(12_4, 16_3)$ *typu*

$$B_a^3 B_b^2 B_c^1 C_d E_e\,,\quad kde\quad ade \neq 0\,.$$

Tato schémata patří do různých tříd a pokud jsou realisovatelná (v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel) vedou ke konfiguracím navzájem neekvivalentním.

Devadesát z těchto schémat je realisovatelných. Jsou to schémata R-1 *až* R-89 *a* N-11. *Z nich tři* (R-37, R-69 *a* N-11) *pouze konfiguracemi singulárními. Jedno schéma* (R-23) *připouští realisaci singulární i regulární.*

Jen jedna z těchto konfigurací byla již v literatuře popsána. Je to konfigurace R-24, jejíž body leží na kubice. Je ekvivalentní s konfigurací S_1, uvedené v Časopise pro pěstování matematiky, ročník *91* (1966), str. 303.

Literatura

[1] *J. de Vries:* Über gewisse ebene Konfigurationen. Acta matematica *12*, 1889, 67.

[2] *J. Metelka:* O jistých konfiguracích $(12_4, 16_3)$ v rovině. Věstník Královské české společnosti nauk, 1944, XXI, 1—8.

[3] *J. Metelka:* O rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$. Časopis pro pěstování matematiky *80*, 1955, 133 a násl.

[4] *V. Metelka:* Rovinné konfigurace $(12_4, 16_3)$ s D-body. Časopis pro pěstování matematiky *82*, 1957, 385 a násl.

[5] *V. Metelka:* Über ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, die mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren. Časopis pro pěstování matematiky, *91*, 1966, 261 a násl.

Adresa autora: 461 17 Liberec, Hálkova 6 (Katedra natematiky VŠST).

Zusamenfassung

ÜBER GEWISSE EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$, DIE *B*-, *C*- UND *E*-PUNKTE ENTHALTEN UND ÜBER SINGULÄRE KONFIGURATIONEN

VÁCLAV METELKA, Liberec

Die ebene Konfiguration $(12_4, 16_3)$ besteht – bekanntlich – aus zwölf Punkten und sechzehn Geraden, die in einer Projektionsebene liegen. Jeder Punkt inzidiert (eben) mit vier Geraden und auf jeder von diesen Geraden liegen (eben) drei Punkte.

Die Gerade, auf der Z. B. die Punkte *0*, *P*, *Q* liegen bezeichnen wir kurz *0-P-Q*. Man sagt, dass diese drei Punkte *verbunden* sind. Im anderen Falle, wenn zwei Konfigurationspunkte (z. B. *1* und *2*) auf keiner der Geraden liegen, können wir kurz diesen Umstand als *1* : *2* bezeichnen und man spricht von zwei *getrennten* Punkten.

Nach der Definition der Konfiguration ist also jeder Punkt (gerade) mit acht anderen verbunden und eben deswegen von den drei übrigen getrennt.

Wenn z. B. ein Punkt *9* von den Punkten *0*, *P*, *Q* getrennt ist (kurz *9* : *0*, *P*, *Q*) ergeben sich folgende Möglichkeiten. Den Punkt *9* bezeichnen wir als:

A-Punkt, wenn *0* : *P*; *0* : *Q*; *P* : *Q* ist;

B-Punkt, wenn *0-P*; *0-Q*; *P-Q*, aber nich *0-P-Q* ist;

C-Punkt, wenn nur zwei von den Punkten *0*, *P*, *Q* getrennt sind;

D-Punkt, wenn nur zwei von den Punkten *0*, *P*, *Q* verbunden sind und

E-Punkt, wenn *0-P-Q* ist.

So sind wir imstande alle Konfigurationspunkte zu klassifizieren. Für unsere Aufgabe ist aber diese Klassifikation noch ungenügend und es ist daher notwendig eine ausdruckvolle Klassifikation einzuführen, besonders bei den Konfigurationen, die *B*-, *C*- und *E*-Punkte haben.

Wir betrachten vorerst einen *B*-Punkt *9* (der von den Punkten *0*, *P*, *Q* getrennt ist), dann sehen wir fast auf den ersten Blick, dass aus der Menge der sechzehn Konfigurationsgeraden nur dreizehn mit Punkten *9*, *0*, *P*, *Q* inzidieren. Mit den Schnittpunkten der drei übrigen Konfigurationsgeraden werden wir uns jetzt näher beschäftigen:

Unter der Voraussetzen, dass diese Geraden drei verschiedenen Schnittpunkte haben, können folgende Möglichkeiten vorkommen:

1. Entweder ein, oder zwei, oder alle drei Schnittpunkte sin Konfigurationspunkte, dann ist der betrachtete Punkt *9* entweder vom Type B^1, oder B^2, oder B^3.
2. In den übrigen Fällen, wo alle drei Geraden nur einen Schnittpunkt haben, ist dieser betrachtete Punkt *9* vom Type B^4.

Analogisch könnte man auch für die C- und E-Punkte eine feinere Klassifikation einführen.

In der Literatur sind schon alle Konfigurationen, die A-, oder D-Punkte enthalten vollbeschrieben, ebenso wie die Konfigurationen, welche keine B-Punkte haben. Die umfangreiche Menge der Konfigurationen mit B-, C- und E-Punkten in einer übersichtlichen Arbeit beschreiben ist fast unmöglich. Eben deswegen beschränke ich mich in diesem Artikel nur auf die Fälle mit B^3-, C-, E- und ohne B^4-Punkten.

Die Schemas dieser Konfigurationen sind in dem Kapitel 2 eingeführt. Gerade neunzig von diesen (und zwar R-1 bis R-89 und N-11) sind realisierbar in der Projektionsebene, wie in dem Kapitel 4 bewiesen ist.

Und noch eine Bemerkung: Ersetzen wir in der Definition der Konfiguration (siehe den ersten Absatz) den Ausdruck „eben" durch den Ausdruck „mindestens", bekommen wir die Definition der s i n g u l ä r e n Konfiguration. Die Schemas R-23, R-37, R-69 und N-11 bilden solche singuläre Konfigurationen und die erste von ihnen ist auf dem zugelegten Bilde gezeichnet.