Časopis pro pěstování matematiky, roč. 111 (1986), Praha

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУСТОРОННИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. А. РЯБОВ, Москва

*Посвящается профессору Ярославу Курцвейлю по случаю его шестидесятилетия*

(Поступило в редакцию 26.IV. 1985 г.)

1. Рассматривается система интегродифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon \int_{-\infty}^{t} R(t - s)\, x(s)\, ds\,, \tag{1}$$

где $x$ – $n$-вектор, $A$ – постоянная $n \times n$-матрица, $\varepsilon$ – положительный малый параметр, $R(t - s)$-матрица, называемая ядром системы, интеграл в правой части риманов. Примем, что матрица $R(t)$ непрерывна при $t > 0$ и удовлетворяет оценке

$$\|R(t)\| \leqq c\,\frac{e^{-\gamma t}}{t^{1-\alpha}}\,, \tag{2}$$

где $c, \gamma, \alpha$ – положительные постоянные, $0 < \alpha \leqq 1$. Постоянную $c$ „объединим“ с $\varepsilon$ и положим $c = 1$. Можно трактовать (1) как систему с бесконечно далеким последействием или с бесконечно большим распределенным запаздыванием в аргументе.

Обычная постановка задачи Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом включает в себя задание так называемой начальной функции [1], [2]. Если $t = 0$ – начальный момент, то для системы (1) начальная функция $\varphi(t)$ задается на левой полуоси $-\infty < t \leqq 0$, то есть принимается, что $x = \varphi(t)$, $-\infty < t \leqq 0$. При условии сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{0} R(t - s)\, \varphi(s)\, ds \tag{3}$$

к непрерывной при $t \geqq 0$ функции мы имеем тогда для искомой функции $x(t)$ при $t > 0$ уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon \int_{0}^{t} R(t - s)\, x(s)\, ds + \varepsilon \int_{-\infty}^{0} R(t - s)\, \varphi(s)\, ds \tag{4}$$

и начальное условие $x(0) = \varphi(0)$. Такое интегродифференциальное уравнение обладает [3] единственным решением, определенным на правой полуоси $0 \leqq \leqq t < \infty$. Это решение называют в теории уравнений с запаздыванием односторонним.

Мы рассмотрим в данной статье вопрос о существовании двусторонних решений системы (1), то есть решений, отвечающих задаваемым начальным векторам

$$x\big|_{t=0} = x_0 \tag{5}$$

и определенных на всей оси $t$. Кроме того, от искомых двусторонних решений потребуем, чтобы они были непрерывными по $\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$, то есть, чтобы они стремились при $\varepsilon \to 0$ к соответствующим решениям $x = x^0(t)$ вырожденной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax\,. \tag{6}$$

2. Ситуацию с интересующими нас двусторонними решениями системы (1) мы проиллюстрируем на примере скалярного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, x(s)\, ds\,. \tag{7}$$

Пусть $x = x(t, \varepsilon)$ – двустороннее решение этого уравнения. Подставив $x(t, \varepsilon)$ в (7), получим тождество. После дифференцирования этого тождества (интеграл справа таков, что он допускает дифференцирование под знаком интеграла) и исключения интегрального члена придем к следующему дифференциальному уравнению относительно $x(t, \varepsilon)$:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \gamma \frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon x = 0\,. \tag{8}$$

Таким образом, если функция $x(t, \varepsilon)$ есть двустороннее решение интегродифференциального уравнения (7), то эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (8). Отсюда следует, что все двусторонние решения уравнения (7) содержатся в множестве решений уравнения (8). Поэтому можно искать частные линейно независимые решения уравнения (7) в том же виде, в каком мы искали бы решения уравнения (8), то есть в виде

$$x = e^{\lambda t}\,, \tag{9}$$

где $\lambda$ – постоянная. Подставив (9) в (7), получим

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = \varepsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)} e^{\lambda s}\, ds\,. \tag{10}$$

Необходимо дополнительно потребовать, чтобы интеграл в правой части (10) сходился (иначе функция (9) не является решением уравнения (7)), то есть чтобы выполнялось условие

$$(11) \qquad \gamma + \operatorname{Re}\lambda > 0\,.$$

Тогда (10) перепишется в виде алгебраического уравнения

$$(12) \qquad \lambda^2 = \frac{\varepsilon}{\gamma + \lambda}\,,$$

эквивалентного характеристическому уравнению для дифференциального уравнения (8). Любые корни дают нам решения вида (9) уравнения (8), но только те корни, которые удовлетворяют условию (11), дают нам решения (9) исходного уравнения (7).

Кроме того, мы требуем, чтобы решение $x(t, \varepsilon)$ уравнения (7) стремилось при $\varepsilon \to 0$ к решению вырожденного уравнения

$$(13) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0\,.$$

Отсюда вытекает, что искомым решениям $x(t, \varepsilon)$ соответствуют лишь те корни $\lambda(\varepsilon)$ уравнения (12), которые удовлетворяют не только условию (11), но и условию $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda(\varepsilon) = 0$. Остальные корни уравнения (12) и соответствующие решения вида (9) назовем „лишними".

Исследование уравнения (12) приводит к следующему:

1. Если $\varepsilon < 4\gamma^3/27$, то уравнение (12) имеет три различных действительных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в интегралах $(0, \frac{1}{3}\gamma)$, $(-\frac{2}{3}\gamma, 0)$, $(-\gamma, -\frac{2}{3}\gamma)$ соответственно, причем $\lambda_1 \to 0, \lambda_2 \to 0, \lambda_3 \to -\gamma$ при $\varepsilon \to 0$ и $\lambda_1 \to \frac{1}{3}\gamma, \lambda_2 \to -\frac{2}{3}\gamma, \lambda_3 \to -\frac{2}{3}\gamma$ при $\varepsilon \to 4\gamma^3/27$. Корень $\lambda_3$ является „лишним".

2. Если $4\gamma^3/27 < \varepsilon < 2\gamma^3$, то уравнение (12) имеет один действительный корень $\lambda_1$ в интервале $(\frac{1}{3}\gamma, \gamma)$ и два комплексных $\lambda_2, \lambda_3$, причем $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_3 = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \gamma) \geqq -\gamma$. При $\varepsilon = 2\gamma^3$ имеем $\lambda_1 = \gamma$, $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_3 = -\gamma$ и корни $\lambda_2, \lambda_3$ становятся „лишними".

3. Если $\varepsilon > 2\gamma^3$, то уравнение (12) также имеет один действительный корень $\lambda_1 > 0$ и два комплексных $\lambda_2, \lambda_3$, но $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_3 < -\gamma$, так что корни $\lambda_2, \lambda_3$ „лишние".

Из этого анализа корней уравнения (12) вытекает, что

а) При $\varepsilon \leqq 4\gamma^3/27$ исходное интегродифференциальное уравнение (7) имеет два линейно независимые двусторонние решения, стремящиеся к решениям вырожденного уравнения (13) при $\varepsilon \to 0$ и имеет, следовательно, единственное двустороннее решение $x(t, \varepsilon)$ при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$;

б) при $4\gamma^3/27 < \varepsilon < 2\gamma^3$ уравнение (7) имеет три линейно независимые решения и, следовательно, одномерное множество двусторонних решений при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$;

в) при $\varepsilon \geqq 2\gamma^3$ уравнение (7) имеет только одно линейно независимое решение двустороннее решение и, следовательно, при начальных условиях, не удовлетворяющих равенству $\dot{x}_0 = \lambda_1 x_0$, уравнение (7) не имеет двусторонних решений.

Наше нижеследующее исследование системы (1) относится к случаю а), то есть к тому, когда система (1) имеет единственное двустороннее решение при любом заданном начальном векторе, причем такое, которое стремится при $\varepsilon \to 0$ к решению вырожденной системы (6) с тем же начальным вектором.

3. Назовем двусторонней фундаментальной матрицей системы (1) такую $n \times n$ матрицу $X(t, \varepsilon)$, столбцы которой являются линейно независимыми двусторонними решениями системы (1), причем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} X(t, \varepsilon) = X_0(t)\,, \tag{14}$$

где $X_0(t)$ — фундаментальная матрица вырожденной системы (6). Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Если ядро $R(t)$ системы* (1) *удовлетворяет оценке* (2), *а собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $A$ удовлетворяют условию*

$$\min_j \operatorname{Re} \lambda_j > -\gamma\,, \tag{15}$$

*то система* (1) *при значениях $\varepsilon$, не превышающих некоторой границы, обладает двусторонней фундаментальной матрицей вида*

$$X(t, \varepsilon) = \mathrm{e}^{Dt}\,, \tag{16}$$

*где $D = D(\varepsilon)$ — постоянная матрица такая, что $D(\varepsilon) \to A$ при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим вместо (1) соответствующее матричное интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX + \varepsilon \int_{-\infty}^{t} R(t-s)\, X(s)\, \mathrm{d}s\,. \tag{17}$$

Подставив (16) в (17) и положив $D = A + Q$, получим матричное нелинейное уравнение

$$Q = \varepsilon \int_0^\infty R(\theta)\, \mathrm{e}^{-(A+Q)\theta}\, \mathrm{d}\theta\,. \tag{18}$$

Анализ этого уравнения проведем далее следующим образом.

Ввиду условия (15) справедлива оценка [3]

$$\|\mathrm{e}^{-A\theta}\| \leqq k\mathrm{e}^{-\mu\theta}\,, \quad \theta \geqq 0\,, \quad k \geqq 1\,, \tag{19}$$

где $\mu$ — такая постоянная, что $-\gamma < \mu < \min\limits_j \operatorname{Re} \lambda_j$, а $k$ — постоянная, зависящая от $\mu$. Будем рассматривать теперь уравнение (18) в области

$$(20) \qquad \|Q\| < \frac{\gamma + \mu}{k}.$$

Матрицу $e^{-(A+Q)\theta}$ можно разложить в ряд

$$(21) \qquad e^{-(A+Q)\theta} = e^{-A\theta} + Z_1 + Z_2 + \dots$$

в котором матрицы $Z_m = Z_m(\theta, Q)$ удовлетворяют оценкам

$$(22) \qquad \|Z_m\| \leqq k^{m+1}\|Q\|^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\mu\theta}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Ряд (21) сходится при любой конечной матрице $Q$. Выполняя в правой части уравнения (18) почленное интегрирование в соответствие с (21), перепишем это уравнение в виде

$$(23) \qquad Q = \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} B_m(Q),$$

где

$$B_0 = \int_0^\infty R(\theta)\, e^{-A\theta}\, d\theta, \quad B_1 = \int_0^\infty R(\theta)\, Z_1(\theta, Q)\, d\theta, \dots .$$

С помощью (2), (22) получим оценку

$$(24) \qquad \|B_m\| \leqq \frac{k^{m+1}}{m!} \|Q\| \frac{\Gamma(\alpha + m)}{(\gamma + \mu)^{\alpha+m}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

где $\Gamma(\alpha + m)$ – гамма-функция Эйлера, свидетельствующую о том, что для $Q$ в области (20) ряд в правой части (23) сходится и, следовательно, выполненное почленное интегрирование справедливо. Эта оценка позволяет также построить уравнение

$$(25) \qquad u = \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^{m+1}}{m!} \frac{\Gamma(\alpha + m)}{(\gamma + \mu)^{\alpha+m}} u^m,$$

которое является мажорирующим в смысле Ляпунова по отношению к матричному уравнению (18) в той области, где уравнение (18) может быть записано в виде (23).

Ряд в правой части (25) сходится, если

$$(26) \qquad u < \frac{\gamma + \mu}{k}$$

и его сумма равна

$$(27) \qquad \frac{\varepsilon k\, \Gamma(\alpha)}{(\gamma + \mu - ku)^\alpha}.$$

Таким образом уравнение (25) переписывается в виде

$$(28) \qquad u = \varepsilon \frac{k\,\Gamma(\alpha)}{(\gamma + \mu - ku)^{\alpha}}\,.$$

Правая часть этого уравнения является аналитической мажорантой Ляпунова по отношению к правой части матричного уравнения (18) в области (20), так как в этой области правая часть в (18) разлагается в ряд, мажорируемый рядом, в который разлагается функция (27). В соответствие со свойствами мажорирующих уравнений Ляпунова с аналитической мажорантой [5, 6]:

1. Матричное уравнение (18) имеет единственное решение $Q = Q(\varepsilon)$ стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$, по крайней мере, при всех тех значениях $\varepsilon$, при которых уравнение (28) имеет положительное решение $u = u(\varepsilon)$, стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$;

2. Решение $Q(\varepsilon)$ представимо при таких $\varepsilon$ сходящимся рядом по степеням $\varepsilon$ и

$$(29) \qquad \|Q(\varepsilon)\| \leqq u(\varepsilon)\,.$$

Анализ алгебраического уравнения (28) показывает, что оно имеет такое решение $u = u(\varepsilon)$, если

$$(30) \qquad \varepsilon \leqq \varepsilon_* = \frac{(\gamma + \mu)^{\alpha+1}\,\alpha^{\alpha}}{k^2\,\Gamma(\alpha)\,(\alpha + 1)^{\alpha+1}}\,,$$

и при этом

$$(31) \qquad u(\varepsilon) \leqq u_* = \frac{\gamma + \mu}{(\alpha + 1)\,k}\,.$$

Таким образом, если $\varepsilon$ удовлетворяет оценке (30), то матричное уравнение (18) имеет единственное решение $Q = Q(\varepsilon)$, разлагающееся в ряд по степеням $\varepsilon$ и такое, что $Q(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $\|Q(\varepsilon)\| \leqq u(\varepsilon)$. Последняя оценка вместе с (31) указывает на то, что $Q(\varepsilon)$ остается в области (20), в которой мы рассматривали уравнение (18).

В силу смысла матрицы $Q$ заключаем, что при $\varepsilon \leqq \varepsilon_*$ существует матричное решение системы (1) в виде матрицы (16), причем $D = D(\varepsilon) = A + Q(\varepsilon) \to A$ при $\varepsilon \to 0$ и матрица $D$ представима рядом по степеням $\varepsilon$. Из свойств матричных экспонент далее вытекает [4], что матрица (16) является фундаментальной матрицей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Dx$$

и, следовательно, состоит из $n$ линейно-независимых столбцов. Теорема доказана.

Построим для иллюстрации оценку параметра $\varepsilon$ в случае уравнения (7). Мы получим

$$\mathrm{e}^{-A\theta} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|\mathrm{e}^{-A\theta}\| = 1 + \theta\,, \quad \theta > 0\,,$$

$$\|e^{-A\theta}\| \leqq k e^{-\mu\theta}, \quad k = \frac{e^{-\mu}}{-\mu e}, \quad \forall \mu \in (-\gamma, 0),$$

$$\varepsilon_* = \frac{(\gamma + \mu)^2}{4k^2} = \frac{(\gamma + \mu)^2 \mu^2 e^2}{4e^{-2\mu}}.$$

Максимальное значение $\varepsilon_*$, вычисляемое по этой формуле, получим, если выберем число $\mu$ равным

$$\mu = \mu_0 = -\tfrac{1}{2}(2 + \gamma) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(4 + \gamma^2)}.$$

В частности, если $\gamma = 1$, то $\mu_0 \approx -0{,}382$, $k \approx 1{,}41$,

$$\varepsilon_* \approx 0{,}0677.$$

Как показано в п. 2, точная граница значений $\varepsilon$, при которых уравнение (7) имеет интересущие нас двусторонние решения, равна $\bar{\varepsilon} = 4\gamma^3/27 \approx 0{,}148\gamma^3$. Наша оценка при $\gamma = 1$ удовлетворительна.

4. Матрица (16) позволяет построит двустороннее решение системы (1) при любом начальном векторе $x(0) = x_0$ в виде

$$x(t, \varepsilon) = e^{Dt} x_0. \tag{33}$$

Дальнейшему изучению подлежит вопрос о единственности решения (33). Существует ли при $\varepsilon \leqq \varepsilon_*$, кроме (33), другое двустороннее решение системы (1) с тем же начальным вектором $x_0$, стремящееся при $\varepsilon \to 0$ к решению вырожденной системы (6)? В случае иллюстративного примера (7) такого другого двустороннего решения не существует. Сформулируем без доказательства полученный результат в общем случае.

Обозначим через $U_q$ множество непрерывных по $t$ функций $x(t, \varepsilon)$ на всей оси $t$, для которых произведение

$$x(t, \varepsilon)\, e^{qt},$$

где $q$ — некоторое положительное число, остается ограниченным при всех $t \leqq 0$. Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $\varepsilon_*$ *— величина, определяемая согласно* (30). *Тогда при всех* $\varepsilon < \varepsilon_*$ *система* (1) *обладает при заданном начальном векторе единственным двусторонним решением, обращающимся при* $\varepsilon \to 0$ *в решение вырожденной системы при том же начальном векторе и принадлежащим множеству* $U_q$, $q < \gamma$.

*Литература*

[1] *А. Д. Мышкис:* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Москва, изд. „Наука", 1972 г.

[2] *Дж. Хейл:* Теория функционально-дифференциальных уравнений. Москва, изд. ,,Мир", 1984 г. (перевод с англ.)

[3] *Я. В. Быков:* О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений. Фрунзе, изд. ,,Илим", 1957 г.

[4] *Б. П. Демидович:* Лекции по математической теории устойчивости. Москва, изд. ,,Наука", 1967 г.

[5] *Д. К. Лика, Ю. А. Рябов:* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев, изд. ,,Штиинца", 1974 г.

[6] *Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов:* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. Москва, изд. ,,Наука", 1979 г.

*Адрес автора:* МАДИ, кафедра высшей математики, Ленинградский проспект 64, Москва 125 829, ГСП-47, СССР.