Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček; Antonín Vrba

K šedesátinám profesora Miroslava Fiedlera

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 111 (1986), No. 2, 210--224

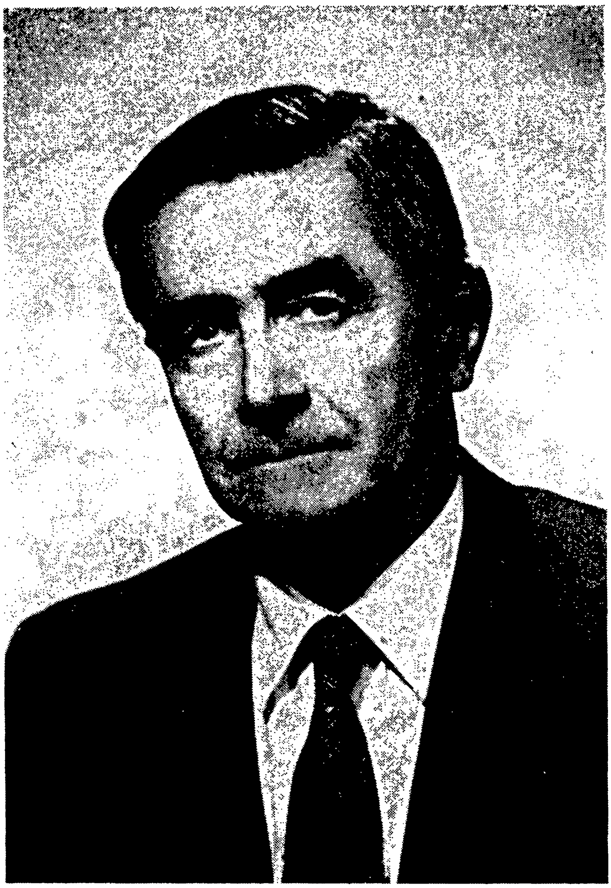
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118269

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 111 (1986), Praha

ZPRÁVY

K ŠEDESÁTINÁM PROFESORA MIROSLAVA FIEDLERA

JIŘÍ SEDLÁČEK a ANTONÍN VRBA, Praha



Letos vstupuje mezi šedesátníky náš přední matematik prof. RNDr Miroslav Fiedler, DrSc, člen korespondent ČSAV, a to nám dává příležitost zamyslet se nad jeho dosavadní vědeckou, pedagogickou a organizační činností.

Narodil se 7. dubna 1926 v Praze a středoškolská studia absolvoval na Vančurově státním reálném gymnáziu v Praze-Smíchově. Už tehdy se projevilo jeho nevšední matematické nadání, když zvítězil v matematické soutěži Rozhledů matematicko-přírodovědeckých. Po maturitě r. 1945 studoval matematiku a fyziku na přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity v Praze, kde r. 1950 promoval na doktora přírodních věd. V disertační práci [1] zobecnil některé výsledky svého učitele prof. B. Bydžovského z klasické algebraické geometrie.

Po promoci nastoupil M. Fiedler jako vědecký aspirant do tehdejšího Ústředního ústavu matematického, který byl po založení akademie věd r. 1952 do ní včleněn jako Matematický ústav ČSAV. Tomuto pracovišti zůstal věren až do současnosti. Během aspirantury v ústavě byl jeho školitelem akademik E. Čech. Za téma své kandidátské práce si M. Fiedler vybral geometrii simplexů [5], [6], [7] a byl jeden z prvních, komu byla udělena tehdy nově zavedená hodnost kandidáta fyzikálně-matematických věd. Jako vědecký pracovník ústavu se věnuje i nadále geometrii, brzy však rozšiřuje svůj zájem i na teorii matic, numerické metody, teorii grafů a na aplikace matematiky v ekonomii. V roce 1963 obhajuje disertaci doktora fyzikálně-matematických věd, r. 1965 je jmenován vysokoškolským profesorem matematiky a r. 1981 zvolen členem korespondentem ČSAV. V Matematickém ústavu ČSAV vedl řadu let oddělení, a když se r. 1984 ústav organizačně rozdělil na dva úseky, byl prof. Fiedler pověřen vedením jednoho z nich.

Už od počátku šedesátých let získává světovou proslulost zejména svými výsledky z teorie matic. Půlroční pobyt v USA, kam ho r. 1964 jako hostujícího profesora pozval California Institute of Technology, byl první z dlouhodobých zahraničních cest, které prof. Fiedler absolvoval. K přednáškám na kongresy a konference je zván velmi často a jeho vystoupení v zahraničí můžeme počítat na desítky. Výrazem mezinárodní autority prof. Fiedlera je i dlouholeté členství v redakčních radách časopisů Numerische Mathematik, Linear Algebra and its Applications a Linear and Multilinear Algebra.

I když nejvíce energie prof. Fiedler stále věnuje vědecké práci, velmi rozsáhlá je i jeho činnost pedagogická, ediční a organizační. Výběrovými přednáškami a semináři, které vedl na matematicko-fyzikální fakultě v Praze, přírodovědeckých fakultách v Bratislavě a v Košicích i na bývalé Vysoké škole pedagogické v Praze, prošla řada studentů a aspirantů a mnozí z nich vypracovali pod jeho vedením své diplomové a kandidátské práce. Je vedoucím redaktorem časopisu Czechoslovak Mathematical Journal a členem redakční rady časopisů Mathematica Slovaca a Ekonomicko-matematický obzor. Z mnoha konferencí, které organizoval, a jejichž sborníky redigoval, měly průkopnický význam grafové symposium ve Smolenicích 1962, jedna z prvních mezinárodních konferencí na toto téma, a letní škola z numerických metod ve Svitu 1965, kde se vlastně poprvé setkali přední specialisté z Východu i Západu. Dlouhodobý charakter má jeho spolupráce s Encyklopedickým institutem ČSAV, s nakladatelstvím Academia i Státním nakladatelstvím technické literatury. S prof. K. Rektorysem a dalšími matematiky spolupracoval na Přehledu užité matematiky, knize, z níž se učilo už několik generací inženýrů, a na mnohých knihách se podílel jako vědecký redaktor či lektor. Významná je i jeho překladatelská práce: přeložil Gelfandovu Lineární algebru, známou Minorského Sbírku úloh z vyšší matematiky a Numerické metody lineární algebry od D. K. Fadďějeva a V. N. Fadďějevové.

Mnoho času věnuje prof. Fiedler matematické olympiádě. Spolupracuje s touto soutěží už od jejího založení, takže dnes je jedním z mála pamětníků jejího zrodu. Je místopředsedou jejího ústředního výboru, především se však o kvalitu soutěže zasloužil originálními úlohami, jejichž počet už dávno překročil stovku. Sepisoval instruktivní řešení pro publikace MO a s J. Zemánkem sestavil sbírku soutěžních úloh [B]. S velkým zaujetím také přednášíval na přípravných seminářích reprezentantů pro mezinárodní MO.

Sotva by se nám podařilo vyjmenovat všechny funkce, které prof. Fiedler zastával, a všechny komise, v nichž pracoval. Do Jednoty čs. matematiků a fyziků vstoupil už v mládí, dnes je členem hlavního výboru, předsedou komise pro talentované žáky a významná je i jeho činnost v terminologické komisi. Jiný charakter má práce v čs. národním komitétu matematickém, jehož je předsedou a ve vědeckém kolegiu matematiky, kde je místopředsedou. Zasedá v několika komisích pro obhajoby kandidátských a doktorských disertačních prací a významné funkce zastává i v plánování základního vědeckého výzkumu. Spolupracuje i se školskými orgány při tvorbě středoškolských osnov a učebnic, především pro gymnázia se zaměřením na matematiku.

Z ocenění, která za svou práci prof. Fiedler dostal, zde uvedeme jen ty nejdůležitější. Roku 1962 to byla stříbrná medaile JČSMF současně s první cenou ve vědecké soutěži. Spolu s akademikem J. Novákem a docentem J. Vyšínem dostal r. 1968 cenu ČSAV za vědeckopopularizační činnost. O národní ceně ČSR, kterou prof. Fiedler dostal r. 1978 společně s prof. V. Ptákem, informoval tehdy náš časopis podrobným článkem. Téhož roku mu matematicko-fyzikální fakulta Karlovy univerzity udělila medaili prvního stupně a r. 1981 — u příležitosti svých pětapadesátin — se rozhodnutím prezídia ČSAV stal nositelem stříbrné medaile B. Bolzana Za zásluhy o matematické vědy. Za monografii [C] dostal r. 1983 literární cenu České matice technické a SNTL. A na konec nám v tomto výčtu vychází čestné členství, které mu r. 1984 udělila Jednota čs. matematiků a fyziků, když jejím zasloužilým členem byl zvolen už čtyři roky předtím.

Jak už jsme se zmínili, na počátku své vědecké dráhy se M. Fiedler zaměřil na geometrii. První jeho publikace [1], [3], [4] byly věnovány algebraické geometrii křivek a nadploch v n-rozměrném prostoru. Pak se soustředil na podrobný výzkum n-rozměrných simplexů [5], [6], [7], [11], [14]. Připomeňme, že simplex je tvořen $n + 1$ lineárně nezávislými body v n-rozměrném prostoru, je to tedy zobecnění trojúhelníku a čtyřstěnu. Tato tématika se ukázala velmi podnětná a prof. Fiedler se k ní později ještě několikrát vrátil [24], [25], [38], [81], [97]. Kromě metrických vlastností charakterizoval i kombinatorické vlastnosti simplexů, což byla tehdy novinka. Tak např. přiřaďme n-rozměrnému simplexu graf na $n + 1$ uzlech, které odpovídají stěnám simplexu, a spojme hranou právě ty uzly, jimž odpovídají stěny svírající ostrý úhel. M. Fiedler dokázal, že tento graf je souvislý, a že obráceně ke každému souvislému grafu na $n + 1$ uzlech existuje příslušný simplex. (Dokonce u každé nespojené dvojice může být předepsáno, zda odpovídající úhel je pravý nebo tupý.) Odtud je vidět, že mezi všemi úhly, které svírají stěny simplexu, je jich vždy alespoň n ostrých. Takové simplexy, které jich mají právě n ostrých a všechny ostatní pravé, nazval pravoúhlé a jednoduše je charakterizoval: $n + 1$ vrcholů pravoúhlého simplexu lze vždy doplnit na 2^n vrcholů n-rozměrného kvádru tak, aby odvěsny (tj. hrany ležící proti pravému úhlu) simplexu byly vzájemně kolmé hrany tohoto kvádru. Obráceně, vezmeme-li z libovolného n-rozměrného kvádru takových n navzájem kolmých hran, že tvoří strom, jsou to odvěsny pravoúhlého simplexu. Přitom střed kulové nadplochy opsané tomuto simplexu má barycentrické souřadnice $1 - \frac{1}{2}s_i$, kde s_i jsou stupně uzlů ve zmíněném odvěsnovém stromě. Polohu středu kulové nadplochy opsané simplexu se M. Fiedlerovi podařilo popsat i pro obecný simplex pomocí konfigurace stěnových úhlů. Zvláště hluboké byly pak jeho nové poznatky o souvislostech ortocentrických simplexů (všechny výšky se protínají v jednom bodě) s rovnoosými nadkvadrikami a Hankelovými maticemi (k těm se pak vrací ještě v poslední době).

Analytický aparát, který používal k vyšetřování simplexů, vyžadoval jemnou práci s pozitivně definitními maticemi. To přivedlo M. Fiedlera k jejich podrobnějšímu zkoumání. Tak v [19] odhadl zdola stopu matice $(A - B)(B^{-1} - A^{-1})$ pomocí norem matic $A, B, A - B$. Z odhadu vyplynul důležitý důsledek: Pozitivně definitní matice je jednoznačně určena, jsou-li dány některé její prvky a na zbývajících místech prvky matice k ní inverzní. V [23] a [37] jsou pak nalezeny vzájemné vztahy mezi diagonálními prvky a_{ii}, α_{ii} dvou navzájem inverzních pozitivně definitních matic. Ukazuje se, že pro ně platí

$$a_{ii} > 0\,, \quad \alpha_{ii} > 0\,, \quad a_{ii}\alpha_{ii} \geqq 1\,, \quad \sqrt{(a_{ii}\,\alpha_{ii})} - 1 \leqq \sum_{j \neq i} (\sqrt{(a_{jj}\alpha_{jj})} - 1)$$

a obráceně, splňuje-li $2n$ čísel a_{ii}, α_{ii} tyto nerovnosti, jsou to diagonální prvky dvou vzájemně inverzních pozitivně definitních matic. Tato věta má i zajímavou geometrickou interpretaci — dává totiž nutné a postačující podmínky pro délky $2n$ vektorů, aby tvořily biortogonální bázi n-rozměrného prostoru, dále pro úhly svírané odpovídajícími si vektory biortogonální báze a také pro velikosti výšek sférického simplexu. Podobné nutné a postačující podmínky odvodil [28] i pro diagonální prvky M-matice (brzy tento pojem připomeneme) a matice k ní inverzní.

Od poloviny padesátých let se v souvislosti se začínajícím využíváním počítačů zvyšuje zájem matematiků o numerické metody. I prof. Fiedler se o ně již v té době začíná zajímat. Nejprve přispěl k numerickým metodám řešení algebraické rovnice o jedné neznámé [8], [9], [12], [30] klasickými metodami Bernoulliovou-Whittakerovou a Gräffeovou. Obě metody mají společné slabé místo, totiž případ, kdy rovnice má všechny kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě, a právě tímto případem se zabývá práce [9]. Poprvé v ní byla použita perturbační metoda, která pak i v řadě dalších prací zjednodušila důkazovou techniku, když umožnila vyhnout se limitním přechodům. Obzvlášť důkladně M. Fiedler analyzoval Gräffeovu metodu a podstatně ji vylepšil. Zvýšil tak její účinnost a zaručil konvergenci i v původně nejasných situacích. Upravil ji též pro výpočet v absolutní hodnotě největšího vlastního čísla matice. Dostáváme se tak k numerickým metodám lineární algebry. Zprvu se jeho zájem soustředil na otázky konvergence iteračních metod. Zde začíná rozsáhlá spolupráce s V. Ptákem, který je spoluautorem mnoha významných Fiedlerových prací z teorie matic.*) V [10] je klasická Gaussova-Seidelova iterační metoda řešení soustavy lineárních rovnic $(I - A)\,x = b$

$$x_{n+1} = Ax_n + b$$

modifikována na iterační proces

$$(I - B)\,x_{n+1} = (A - B)\,x_n + b$$

a je vyšetřována rychlost jeho konvergence v závislosti na volbě matice B. Oba autoři rádi vzpomínají na idylickou pohodu při lyžování na Skalíkově louce v Beskydech, kde se práce zrodila, i na pozdější diskusi s R. S. Vargou a jeho spolupracovníky, kteří se, jak se ukázalo, simultánně zabývali podobnou problematikou. V [18] je pak navržena iterační metoda výpočtu spektra symetrické matice založená na konstrukci unitárních matic $U_1, U_2, \ldots$ takových, že posloupnost matic $U_k A U_k^*$ kvadraticky konverguje k diagonální matici. Iterační procesy konvergující k vlastnímu číslu „skoro rozložitelné“ matice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

tj. matice, kde některá z dílčích matic A_{12}, A_{21} má malou normu [34], [36], [41], jsou založeny na precizaci myšlenky, že za určitých předpokladů bude spektrum matice A blízké ke sjednocení spekter matic A_{11}, A_{22}. Pro numerickou praxi je důležitý zejména případ, kdy A_{11} má rozměr 1×1. Další otázka řešená v raných pracích [31], [33] z numerických metod lineární algebry je snižování rozměru invertované matice. Metody zde odvozené mají důležité praktické aplikace, zejména při řešení Dirichletovy úlohy metodou sítí a při invertování špatně podmíněných Leontievových matic. Referát o Fiedlerově příspěvku k numerickým metodám ukončeme tím, že i jeho práce z teorie matic byly často inspirovány problémy numerické povahy, a že jejich výsledky většinou mají význam i pro numerickou praxi.

Než se však pustíme do rozboru stěžejní části Fiedlerova díla, všimněme si ještě jeho prací souvisejících s aplikacemi bezprostředně. V [17] se zabýval tzv. deformační-

*) V tomto přehledném článku nemůžeme z praktických důvodů rozlišovat Fiedlerovy práce samostatné od společných. Nebudeme se tedy o spoluautorech zmiňovat a v tomto ohledu čtenáře odkazujeme na seznam prací na konci článku, kde jsou spoluautoři uváděni.

mi rovnicemi, což jsou soustavy lineárních algebraických rovnic, na jejichž řešení je založen výpočet rámových konstrukcí, a souvisejí také s řešením elektrických obvodů. Obzvlášť významný je jeho přínos pro ekonomické aplikace matematiky. V pracích [16], [22], [39] a [40] podstatně přispěl k vybudování metodiky optimalizace dopravních sítí.

Těžištěm odborných zájmů prof. Fiedlera je teorie matic. K nejcitovanějším pracím patří série [26], [43], [45], [47], [50], která vlastně tvoří monografii věnovanou tzv. M-maticím. Jsou to matice s nekladnými nediagonálními prvky a s kladnými hlavními minory. Tato třída matic se vyskytuje v rozmanitých souvislostech, praktických, numerických i teoretických (stabilita, elektrické obvody, konvergence iteračních procesů, majorizace jiných tříd matic, lokalizace spektra aj.). Vlastnosti a aplikace M-matic studovali již dříve z různých stran mj. A. Ostrowski, Ky Fan, D. M. Kotěljanskij a R. S. Varga. Zmíněná série prací syntetizuje tehdejší poznatky, podstatně je doplňuje o nové výsledky a aplikace a podává jednotný a přehledný výklad této teorie. Jsou tu uvedeny desítky nutných a postačujících podmínek, které charakterizují M-matice a matice tříd příbuzných. Podstatnou vlastností M-matic je, že mají reálné části všech vlastních čísel kladné, a že inverzní matice k M-maticím mají nezáporné prvky. V mnohých svých vlastnostech se podobají pozitivně definitním maticím — tato podobnost je zde vysvětlena a studovány jsou i souvislosti s maticemi s převládající diagonálou. Ty pak souvisejí s majorantní úlohou, kterou M-matice hrají v některých třídách matic. Ukazuje to např. klasická Kotěljanského věta, která je zde přirozeně dokázána (a vylepšena): Je-li $U = (u_{ij})$ komplexní matice a $V = (v_{ij})$ je M-matice, přičemž $|u_{ii}| \geqq v_{ii}$, $|u_{ik}| \leqq |v_{ik}|$, pak $|\det U| \geqq \det V$. Z aplikací této teorie připomeňme souvislosti s konvergencí relaxačních metod i zobecněných procesů Gaussova-Seidelova typu.

Zde vypracovaná teorie M-matic byla pak v dalších pracích využita k lokalizaci spektra obecných matic.. To je základní úloha spektrální teorie matic — jde v ní o vymezení co nejužší oblasti komplexní roviny, která obsahuje všechna vlastní čísla matice. Tato otázka úzce souvisí s kritérii regularity matice A, aplikujeme-li takové kritérium na matici $A - \lambda I$. Tak např. klasická Hadamardova věta o regularitě matice s převládající diagonálou dává klasické Geršgorinovy kruhy. V [21], [27] se podstatně uplatnily právě majorantní vlastnosti M-matic. Uvažujme lineární operátor A na konečněrozměrném prostoru rozloženém na direktní součet r podprostorů $X_1 + X_2 + \ldots + X_r$. Zvolme dále v každém z těchto podprostorů (ne nutně stejnou) vektorovou normu g_i. Označme

$$p_{ij} = \sup_x \{g_i(P_i A P_j x);\ g_j(P_j(x)) \leqq 1\} \quad \text{pro} \quad i \neq j\,,$$

$$p_{ii} = \inf_x \{g_i(P_i A P_i x);\ g_i(P_i(x)) \geqq 1\}\,,$$

kde P_i značí projekci na podprostor X_i. Ukazuje se, že matice A je regulární, pokud matice

$$\begin{pmatrix} p_{11}, & -p_{12}, & \ldots, & -p_{1r} \\ -p_{21}, & p_{22}, & \ldots, & -p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{r1}, & -p_{r2}, & \ldots, & p_{rr} \end{pmatrix}$$

je M-matice. Z tohoto kritéria regularity pak plyne následující lokalizace spektra: Mějme dána reálná čísla $c_1, \ldots, c_r$ taková, že

$$\begin{pmatrix} c_1, & -p_{12}, & \ldots, & -p_{1r} \\ -p_{21}, & c_2, & \ldots, & -p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_{r1}, & -p_{r2}, & \ldots, & c_r \end{pmatrix}$$

je M-matice, a označme R_i množinu všech komplexních čísel z, pro která platí

$$\inf_x \{g_i(P_i(A - zI)\,P_ix);\ g_i(P_i(x)) \geqq 1\} \leqq c_i\,.$$

Pak spektrum matice A je obsaženo v $R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_r$. Volbou rozkladu prostoru a konkrétních norem g_i dostáváme nejen klasické věty o lokalizaci spektra, jako jsou např. známé Geršgorinovy kruhy a Cassiniovy ovály, ale odhady ještě daleko jemnější. Průkopnický význam měla též práce [20]. V odhadech polohy spektra známých před jejím uveřejněním vystupovaly jen hodnoty prvků matice. V [20] byly odvozeny odhady daleko obecnější, v nichž figuruje jen norma nediagonální části matice, přičemž výsledky platí pro širokou třídu norem včetně norem nejfrekventovanějších. Formulují-li se výsledky pro matice rozdělené na bloky, vyniká právě odlišná role diagonálních a nediagonálních bloků.

K lokalizaci spektra symetrických a hermitovských matic na reálné ose vyvinul prof. Fiedler elementární metodu, která dala silné výsledky. Všiml si totiž, že má-li reálná nebo hermitovská matice A (resp. B) vlastní čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (resp. $\beta_1, \ldots, \beta_m$), u_1 (resp. v_1) je jednotkový vlastní vektor příslušný k α_1 (resp. β_1) a matice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \varrho \\ \varrho & \beta_1 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla γ_1, γ_2, potom má matice

$$\begin{pmatrix} A & \varrho u v^{\mathrm{T}} \\ \varrho v u^{\mathrm{T}} & B \end{pmatrix}$$

vlastní čísla $\alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_2, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \gamma_2$. Získal tak [67] jednoduchou techniku k odhadování vlastních čísel symetrických matic a ke konstrukci speciálních matic s daným spektrem. Odvodil tím velmi jednoduše i Hornovy podmínky, které jsou nutné a stačí k tomu, aby čísla $\lambda_1 \geqq \ldots \geqq \lambda_n$, $a_1 \geqq \ldots \geqq a_n$ byla vlastními čísly a diagonálními prvky symetrické matice n-tého řádu:

$$\sum_{i=1}^{s} a_i \leqq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \quad (s = 1, \ldots, n-1)\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.$$

Pro nezáporné matice je analogický, avšak daleko obtížnější problém řešen obdobnou metodou v [62]. Zde jsou odvozeny nutné podmínky

$$\lambda_1 \geqq a_1 , \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_i , \quad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i + \lambda_k \geqq \sum_{i=1}^{s-1} a_i + a_{k-1} + a_k \quad (1 \leqq s < k \leqq n)$$

a je ukázáno, že Hornovy podmínky doplněné podmínkou $\lambda_k \leqq a_{k-1}$ $(k = 2, \ldots \ldots, n - 1)$ jsou v tomto případě postačující. Práce [62] přináší podstatný příspěvek i k dosud neuzavřenému hledání charakterizace vlastních čísel nezáporných matic.

Jinou originální metodou užitou ke studiu spektra nezáporných matic je metoda založená na odhadu velikosti poruchy, kterou vnese do spektra rozložitelné matice

$$\begin{pmatrix} U & O \\ W & V \end{pmatrix}$$

složeného z vlastních čísel matic U, V, změna nulové matice O. Hlavní roli tu hraje tzv. míra nerozložitelnosti matice (a_{ij}), tj. veličina

$$\min_{M \neq \emptyset} \sum_{\substack{i \in M \\ k \notin M}} a_{ik}$$

čili nejmenší ze součtů prvků nediagonálního rohového pole matice. Připomeňme ještě, že známá Perronova-Frobeniova věta tvrdí, že spektrální poloměr nerozložitelné nezáporné matice je jejím jednoduchým kladným vlastním číslem (tzv. Perronovo vlastní číslo). V [57] je pomocí míry nerozložitelnosti přesně aproximována vzdálenost Perronova vlastního čísla od ostatních vlastních čísel a v [55], [69] a [72] slouží míra nerozložitelnosti k lokalizaci spektra dvojitě stochastických matic, tj. nezáporných matic s jednotkovými řádkovými i sloupcovými součty. K dalšímu zkvalitnění těchto odhadů pak ještě přispěla kombinace zmíněné metody s technikou tzv. složených matic [61], [88]. Složenou maticí k-tého stupně příslušnou k dané matici A rozměru $n \times n$ rozumíme matici typu $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ složenou ze všech subdeterminantů k-tého řádu matice A. Míra nerozložitelnosti a spektrum matice A jednoduše souvisí s mírou nerozložitelnosti a spektrem složené matice a aplikujeme-li odhady spektra na složenou matici, odvodíme odtud jemnější odhady pro původní matici A.

Dalším příbuzným základním problémem, k němž prof. Fiedler významně přispěl prací [95], je studium geometrických vlastností oboru hodnot matice A, tj. množiny $W(A) = \{(Ax, x) \mid (x, x) = 1\}$ v Gaussově rovině. Je známo, že $W(A)$ je kompaktní a konvexní množina obsahující spektrum matice A. Duálním útvarem k množině všech opěrných přímek množiny $W(A)$ je algebraická křivka $C(A)$, přičemž $W(A)$ je jejím konvexním obalem a vlastní čísla matice A jsou jejími reálnými ohnisky. Prof. Fiedler vyjádřil bodovou rovnici křivky $C(A)$ a stanovil její křivost v hraničních bodech množiny $W(A)$. Ukázal dále, že obor hodnot nezáporné matice leží v kruhu

$|z| \leqq r$, kde r je Perronovo vlastní číslo matice $\frac{1}{2}(A + A^T)$, přičemž r je vrcholem množiny $W(A)$.

V poslední době se prof. Fiedler věnuje Hankelovým maticím a třídám matic s nimi příbuzných. Hankelovy matice mají v diagonálách kolmých na hlavní diagonálu vždy stejné prvky a objevují se při interpolaci racionálních funkcí, u reciprokých diferenčních kvocientů i v geometrických souvislostech. Ukázalo se, že tato zdánlivě starodávná teorie zdaleka není uzavřena. Zdokonalení klasických metod umožnilo prof. Fiedlerovi najít vzájemnou korespondenci mezi maticemi Hankelovými, Toeplitzovými (mají stejné prvky na diagonálách rovnoběžných s hlavní diagonálou), Bézoutovými (jsou to v podstatě matice inverzní k Hankelovým), Löwnerovými (mají prvky $(c_i - d_j)/(y_i - z_j)$, kde c, d, y, z jsou dané vektory) a Vandermondovými (mají prvky x_i^j, kde x je daný vektor), ukázat analogie mezi vlastnostmi těchto matic a na jejich základě klasické výsledky podstatně rozšířit [103]–[110], [114].

Jinou speciální třídou matic, o kterou se prof. Fiedler zajímá, jsou třídiagonální matice. Tyto matice jsou užitečné v numerické matematice. Mnohé metody hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice totiž problém převádějí z obecné matice na matici třídiagonální. Originální Fiedlerova metoda [89], [92] je založena na snižování řádu třídiagonální matice: známe-li jedno jednoduché vlastní číslo a odpovídající vlastní vektor, dovedeme sestavit třídiagonální matici řádu $n - 1$, jejíž vlastní čísla se shodují se zbývajícími vlastními čísly matice původní a z jejíchž vlastních vektorů lze vypočíst vlastní vektory původní matice. Výhodné je i to, že v případě třídiagonální M-matice a kladného vlastního vektoru dává tato metoda opět třídiagonální M-matici. Třídiagonální matice jsou zajímavé i z čistě teoretického hlediska [49], [90]. Tak třeba nerozložitelné symetrické třídiagonální matice a matice vzniklé současnými permutacemi jejich řádků a sloupců jsou právě ty symetrické matice, jejichž hodnost lze změnou diagonálních prvků snížit nanejvýš o 1.

Z nadhledu se lze na třídy matic dívat jako na množiny bodů v prostoru. U důležitých tříd jde přitom zpravidla o polyedry nebo o kužele, přičemž geometrické a topologické vlastnosti těchto množin souvisejí s algebraickými a operátorovými vlastnostmi matic příslušných tříd. Prof. Fiedler pracoval i v této oblasti a zajímal se především o třídu všech lineárních operátorů, které zobrazují jeden daný polyedrický kužel do druhého [63], [75], [82], [83]. Ukazuje se, že tato třída tvoří též polyedrický kužel, a jsou vyšetřovány jeho vlastnosti, zejména jsou popsány maticové vlastnosti operátorů, které odpovídají extremálním paprskům. Diagonály polyedrického kužele obecně souvisejí s lineární závislostí extremálních paprsků. Kužele, které mají právě dvě diagonály, jsou generovány $n + 1$ extremálními paprsky, mezi nimiž je jediná lineární závislost, a říká se jim minimální kužele. Při výzkumu kužele všech operátorů, které zobrazují minimální kužel do minimálního kužele, se ukázalo, že jejich extremální operátory mohou mít libovolnou hodnost h s výjimkou $h = 2$. Zobecněním tříd pozitivně definitních matic a M-matic jsou třídy operátorů pozitivních vzhledem k danému kuželi. Jejich vlastnosti jsou studovány v [58], [63], [64], [100].

Již v rané práci [13] popsal M. Fiedler vztahy mezi znaménky prvků symetrické matice a znaménky souřadnic vlastních vektorů příslušejících jejímu největšímu a nejmenšímu vlastnímu číslu a také vztahy mezi znaménky prvků pozitivně definitní matice a stejnolehlých prvků matice k ní inverzní. K problematice rozmístění kladných, záporných a nulových prvků v maticích splňujících určité podmínky se pak ještě několikrát vrátil v [73], [94], [99] a [113]. Vystižení souvislosti znamének souřadnic vlastního vektoru acyklické matice s polohou příslušného vlastního čísla mezi ostatními vlastními čísly, zejména pak s jeho násobností, mělo zajímavé důsledky v teorii grafů. Velký ohlas sklidilo Fiedlerovo řešení problému charakterizace znaménkové struktury matic inverzních k nezáporným maticím. Ukázal, že množina všech možných znaménkových struktur matic inverzních k úplně nerozložitelným nezáporným maticím je identická s množinou všech možných znaménkových struktur úplně nerozložitelných matic s nulovými řádkovými i sloupcovými součty. Přiřadíme-li každé znaménkové struktuře $S = (z_{ij})$ rozměru $n \times n$ orientovaný graf $G(S)$ na uzlech $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, v němž je hrana (a_i, b_j), právě když $z_{ij} > 0$, a hrana (b_i, a_j), právě když $z_{ij} < 0$, pak zmíněnou množinu tvoří právě ty struktury S, kterým je přiřazen silně souvislý graf $G(S)$.

Dostáváme se tak k Fiedlerovým pracím z pomezí teorie matic a grafů. Některé vlastnosti matic závisejí totiž jen na rozložení nulových a nenulových prvků a lze je tedy studovat čistě kombinatorickými metodami. Na druhé straně vyšetřování kombinatorických vlastností grafů lze někdy převést na studium algebraických vlastností jejich incidenčních matic. Už jsme se zmínili, že ve svých pracích o simplexech M. Fiedler této metodiky užíval. Další příležitost k jejímu uplatnění mu daly numerické metody lineární algebry, zejména při optimalizaci volby pivotů v eliminačních metodách [35], [76], [77], [84]. Grafové vyjadřování totiž podstatně zjednodušuje pohled na eliminační proces, neboť nezávisí na pořadí, v němž jsou pivoty vybírány, ani na konkrétních hodnotách nenulových prvků. To vedlo M. Fiedlera k vytvoření grafové analogie Schurova doplňku matice. Tento přístup se vyplácí zejména při numerice velkých řídkých matic. Umožňuje totiž volit strategii pivotování tak, aby eliminací zbytečně nepřibývalo nenulových prvků, a aby tzv. obrys matice, tj. část, v níž se vyskytnou nenulové prvky, byl co nejmenší. Pomocí grafů byl formulován i algoritmus [31], který převedl invertování velké matice na invertování jejích polí menšího rozměru.

Krásným příkladem kombinatorických aspektů lineární algebry je klasická Kirchhoffova věta, která enumeruje počet koster grafu pomocí hlavního minoru řádu $n - 1$ jeho Laplaceovy matice. V [15] je tento výsledek originálně dokázán a zobecněn na orientované ohodnocené grafy a minory ostatních řádů. Další hluboké souvislosti algebraických vlastností Laplaceovy matice $L(G)$ s kombinatorickými vlastnostmi neorientovaného grafu G jsou odvozeny v [59], [68], [70], [74]. Zmíněná matice má nediagonální prvky a_{ik} rovny -1 nebo 0 podle toho, je-li v grafu G hrana (i, k), a diagonální prvky a_{ii} rovny počtu hran incidujících s i-tým uzlem. Matice $L(G)$ je zřejmě symetrická, pozitivně semidefinitní a singulární. Její vlastní čísla jsou tedy nezáporná a nejmenší je rovno nule. Prof. Fiedler si všiml zajímavého chování druhého nejmenšího vlastního čísla $\lambda(G)$ matice $L(G)$, které je tím větší, čím je graf G souvislejší, a lze je pokládat za míru jeho souvislosti. Kombinatorické vlastnosti mají dokonce i souřadnice vlastního vektoru příslušného k vlastnímu číslu $\lambda(G)$.

Z přehledu Fiedlerova díla vyniká jeho zájem o postižení společných obecných principů algebry, kombinatoriky a geometrie. V [80] k tomu přistupuje ještě teorie elektrických obvodů. Zkoumají se tu čtyři objekty:

(A) Množina všech konečných neorientovaných grafů na n uzlech s hranami ohodnocenými kladnými čísly.

(B) Množina všech reálných symetrických $n \times n$ matic hodnosti $n - 1$ s nekladnými nediagonálními prvky a s nulovými řádkovými součty.

(C) Množina všech souvislých elektrických sítí s n uzly složených z rezistorů.

(D) Množina všech tříd navzájem shodných $(n - 1)$-rozměrných netupoúhlých simplexů.

Ukazuje se, že tyto čtyři modely i s příslušnými číselnými charakteristikami jsou navzájem izomorfní.

V našem přehledu jsme se soustředili především na obsáhlejší cykly tematicky příbuzných Fiedlerových prací. Z řady drobnějších prací, které nezapadají do referovaných okruhů, připomeňme alespoň několik snadno formulovatelných výsledků vynikajících i svými estetickými kvalitami:

[93] Je-li r stupeň minimálního polynomu matice, pak jistá její $r \times r$ podmatice má hodnost $r - 1$.

[102] Nejmenší vlastní číslo matice $(a_{ij}b_{ij})$, kde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou pozitivně definitní hermitovské matice, není menší než nejmenší vlastní číslo matice AB^{T}.

[54] Mají-li hermitovské matice A a B vlastní čísla $\alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_n$ a $\beta_1 \geqq \ldots \geqq \beta_n$, pak

$$\min_P \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_{P_i}) \leqq \det(A + B) \leqq \max_P \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_{P_i}),$$

kde minima a maxima bereme přes všechny permutace P indexů $1, \ldots, n$.

[111] Pro M-matici A řádu n je $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A^{-1}) \leqq n$ s rovností, právě když existuje kladná diagonální matice D tak, aby DAD^{-1} byla symetrická.

Fiedlerovy práce vynikají nejen silou výsledků, které jsou většinou definitivní a nedají se už dále zlepšovat, ale i brilantním výkladem a přehledným uspořádáním látky usnadňujícím čtenáři orientaci. Pro jeho metody jsou typické vtipné kombinace poměrně elementárních principů a přiměřenost použitých prostředků. Plody rozsáhlé vědecké činnosti prof. Fiedlera vešly do monografií, jsou často citovány v článcích jiných autorů a významně přispěly do zlatého fondu světové matematiky.

SEZNAM PUBLIKACÍ M. FIEDLERA

Články v časopisech a sbornících

[1] Hyperoskulační body algebraických rovinných křivek a jejich zobecnění v S_r. Disertace, Praha 1950.

[2] Řešení jedné úlohy prof. E. Čecha. Čas. pěst. mat. *77* (1952), 65—75.

[3] O jistých maticích a rovnici pro parametry singulárních bodů racionální křivky. Čas. pěst. mat. *77* (1952), 243—265, 321—346.

[4] (s *L. Granátem*) Racionální křivky s maximálním počtem reálných uzlových bodů. Čas. pěst. mat. *79* (1954), 157—161.

[5] Geometrie simplexu v E_n, část 1. Čas. pěst. mat. *79* (1954), 270—297.

[6] Geometrie simplexu v E_n, část 2. Čas. pěst. mat. *80* (1955), 462—476.

[7] Geometrie simplexu v E_n, část 3. Čas. pěst. mat. *81* (1956), 182—223.

[8] Über das Gräffesche Verfahren. Czechoslovak Math. J. *5* (*80*) (1955), 506—516.

[9] Numerické řešení algebraických rovnic, které mají kořeny o skoro stejné absolutní hodnotě. Apl. mat. *1* (1956), 4—22.

[10] (s *V. Ptákem*) Über die Konvergenz des verallgemeinerten Seidelschen Verfahrens zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen. Math. Nachrichten *15* (1956), 31—38.

[11] Einige Sätze aus der metrischen Geometrie der Simplexe in euklidischen Räumen. Schriftenreihe des Instituts für Math. DAW, Heft 1, Berlin 1957, 157.

[12] Numerické řešení algebraických rovnic Bernoulli-Whittakerovou metodou. Apl. mat. *2* (1957), 321—326.

[13] O některých vlastnostech hermitovských matic. Mat.-fyz. čas. SAV *7* (1957), 168—176.

[14] Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe. Czechoslovak Math. J. *7* (*82*) (1957), 463—478.

[15] (s *J. Sedláčkem*) O *W*-basích orientovaných grafů. Čas. pěst. mat. *83* (1958), 214—225.

[16] (s *J. Bílým* a *F. Nožičkou*) Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem. Czechoslovak Math. J. *8* (*83*) (1958), 94—121.

[17] (s *I. Babuškou*) Über Systeme linearer Gleichungen vom Typ der Rahmentragwerke. Apl. mat. *4* (1959), 441—455.

[18] (s *V. Ptákem*) O jedné iterační metodě diagonalisace symetrických matic. Čas. pěst. mat. *85* (1960), 18—36.

[19] Poznámka o positivně definitních maticích. Čas. pěst. mat. *85* (1960), 75—77.

[20] (s *V. Ptákem*) Some inequalities for the spectrum of a matrix. Mat.-fyz. čas. SAV *10* (1960), 148—166.

[21] Some estimates of spectra of matrices. Proc. Symp. PICC, Roma 1960, 33—36.

[22] (s *F. Nožičkou*) Об одном критерии в теории транспортной проблемы. Czechoslovak Math. J. *11* (*86*) (1961), 204—212.

[23] Über eine Ungleichung für positiv definite Matrizen, Math. Nachrichten *23* (1961), 197—199.

[24] Über die qualitative Lage des Mittelpunktes der umgeschriebenen Hyperkugel im *n*-Simplex. Comm. Math. Univ. Car. *2* (1961), 1, 3—51.

[25] Über zyklische *n*-Simplexe und konjugierte Raumvielecke, Comm. Math. Univ. Car. *2* (1961), 2, 3—26.

[26] (s *V. Ptákem*) On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. Czechoslovak Math. J. *12* (*87*) (1962), 382—400.

[27] (s *V. Ptákem*) Generalized norms of matrices and the location of the spectrum. Czechoslovak Math. J. 12 (87) (1962), 558—571.

[28] Соотношения между диагональными элементами M-матрицы и матрицы к ней обратной. Mat.-fyz. čas. SAV 12 (1962), 123—128.
[29] (s *V. Ptákem*) Sur la meilleure approximation des transformations linéaires par des transformations de rang préscrit. C.R. Acad. Sci. *254* (1962), 3805—3807.
[30] O zobecněné Gräffeho metodě a její modifikaci. Čas. pěst. mat. *88* (1963), 194—199.
[31] On inverting partitioned matrices. Czechoslovak Math. J. *13* (*88*) (1963), 574—586.
[32] Заметка к методу Лина. Čas. pěst. mat. *88* (1963), 438—443.
[33] (s *V. Ptákem*) On aggregation in matrix theory and its application to numerical inverting of large matrices. Bull. Acad. Polon., ser. math., astr. et phys. *11* (1963), 757—759.
[34] (s *V. Ptákem*) Оценки и итерационные методы для нахождения простого собственного числа почти разложимой матрицы. ДАН СССР 151 (1963), 790—792.
[35] Some applications of the theory of graphs in the matrix theory and geometry. Theory of Graphs and its Applications, Proc. Symp. Smolenice 1963, 37—41.
[36] (s *V. Ptákem*) Estimates and iteration procedures for proper values of almost decompossable matrices. Czechoslovak Math. J. *14* (*89*) (1964), 593—608.
[37] Relations between the diagonal elements of two mutually inverse positive definite matrices. Czechoslovak Math. J. *14* (*89*) (1964), 39—51.
[38] Hankel matrices and 2-apolarity. Notices AMS *11* (1964), 367—368.
[39] Optimierungsprobleme in den Transportnetzen. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie, DAW, Berlin 1964, II, 259—263.
[40] Dopravní problémy v sítích s omezeními. Ekonomicko-matematický obzor *1* (1965), 47—58.
[41] Some estimates of the proper values of matrices. J. Soc. Ind. Appl. Math. *13* (1965), 1—5.
[42] Some remarks on numerical solution of linear problems. Apl. mat. *10* (1965), 190—193.
[43] (s *V. Ptákem*) Some results on matrices of class K and their application to the convergence rate of iteration procedures. Czechoslovak Math. J. *16* (*91*) (1966), 260—273.
[44] Matrix inequalities. Num. Math. *9* (1966), 109—119.
[45] (s *V. Ptákem*) Some generalizations of positive definiteness and monotonicity. Num. Math. *9* (1966), 163—172.
[46] Graphs and linear algebra. Proc. Symp. ICC, Roma 1967, 131—134.
[47] (s *V. Ptákem*) Diagonally dominant matrices. Czechoslovak Math. J. *17* (*92*) (1967), 420—433.
[48] Metric problems in the space of matrices. Programmation en mathématiques numériques, Proc. Symp. CNRS, Paris 1968, 93—103.
[49] A characterization of tridiagonal matrices. Lin. Alg. Appl. *2* (1969), 191—197.
[50] (s *V. Ptákem*) Cyclic products and an inequality for determinants. Czechoslovak Math. J. *19* (*94*) (1969), 428—451.
[51] Signed distance graphs. J. Comb. Theory Appl. 7 (1969), 136—149.
[52] On some classes of matrices. Notices AMS *17* (1970), 412.
[53] Poznámka o distančních grafech. Matematika (geometrie a teorie grafů), Sb. ped. fak. UK, 1970, 85—88.
[54] Bounds for the determinant of the sum of hermitian matrices. Proc. AMS *30* (1971), 27—31.
[55] Bounds for eigenvalues of doubly stochastic matrices. Lin. Alg. Appl. *5* (1972), 299—310.
[56] Odhady v numerické algebře. Algoritmy vo výpočtovej technike, SVTS, Bratislava 1972, 32—41.
[57] A quantitative extension of the Perron-Frobenius theorem. Lin. Multilin. Alg. *1* (1973), 81—88.
[58] (s *E. V. Haynsworthovou*) Cones which are topheavy with respect to a norm. Lin. Multilin. Alg. *1* (1973), 203—211.

[59] Algebraic connectivity of graphs. Czechoslovak Math. J. *23* (*98*) (1973), 298—305.
[60] Some applications of graphs, matrices and geometry. Proc. Swedish-Czech. Seminar on Appl. Math., IVA Stockholm 1973, 28—36.
[61] Additive compound matrices and an inequality for eigenvalues of symmetric stochastic matrices. Czechoslovak Math. J. *24* (*99*) (1974), 392—402.
[62] Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices. Lin. Alg. Appl. *9* (1974), 119—142.
[63] (s *F. Burnsem* a *E. V. Haynsworthovou*) Polyhedral cones and positive operators. Lin. Alg. Appl. *8* (1974), 547—559.
[64] Positivity with respect to the round cone. Mat. čas. *24* (1974), 155—159.
[65] Některé problémy numerické algebry. Algoritmy vo výpočtovej technike, SVTS, Bratislava 1974, 58—65.
[66] Some results on eigenvalues of nonnegative matrices. Acta Univ. Car., math. et phys. 1974, 25—29.
[67] On a theorem by A. Horn. Math. Structures — Comput. Math. — Math. Modelling, Sofia 1975, 251—255.
[68] Algebraic approach to connectivity of graphs. Recent Advances in Graph Theory, Academia, Praha 1975, 193—196.
[69] A minimaximin formula and its application to doubly stochastic matrices. Mat. čas. *25* (1975), 139—144.
[70] Algebraische Zusammenhangszahl und ihre numerische Bedeutung. ISNM 29, Birkhäuser, Basel 1975, 69—85.
[71] Spectral properties of some classes of matrices. Dept. Comp. Sciences, Göteborg 1975.
[72] (s *Vl. Ptákem*) A quantitative extension of the Perron-Frobenius theorem for doubly stochastic matrices. Czechoslovak Math. J. *25* (*100*) (1975), 339—353.
[73] Eigenvectors of acyclic matrices. Czechoslovak Math. J. *25* (*100*) (1975), 607—618.
[74] A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. Czechoslovak Math. J. *25* (*100*) (1975), 619—633.
[75] (s *E. V. Haynsworthovou* a *V. Ptákem*) Extreme operators on polyhedral cones. Lin. Alg. Appl. *13* (1976), 163—172.
[76] Применения графов к методу исключения Гаусса. Зап. н. сем. ЛОМИ 58, Ленинград 1976, 72—79.
[77] Inversion of bigraphs and connections with the Gauss elimination. Graphs, Hypergraphs and Block Systems, Zielona Góra 1976, 57—68.
[78] A note on nonnegative matrices. Math. Slovaca *27* (1977), 33—36.
[79] Některé souvislosti mezi teorií grafů a numerickou matematikou. Numerické metódy a teória grafov, SVTS, Košice 1976, 1—14.
[80] Aggregation in graphs. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 18. Combinatorics, Keszthely 1976, 315—330.
[81] Isodynamic systems in Euclidean spaces and an n-dimensional analogue of a theorem by Pompeiu. Čas. pěst. mat. *102* (1977), 370—381.
[82] (s *V. Ptákem*) Diagonals of convex sets. Czechoslovak Math. J. *28* (*103*) (1978), 25—44.
[83] (s *V. Ptákem*) The rank of extreme positive operators on polyhedral cones. Czechoslovak Math. J. *28* (*103*) (1978), 45—55.
[84] (s *O. Pokornou*) Numerical methods of linear algebra, in particular for sparse linear systems. The Use of Finite Element Method and Finite Differences in Geophysics, GFÚ ČSAV, Praha 1978, 257—278.
[85] Minimal sets of vectors which generate R_n with excess k. Czechoslovak Math. J. *29* (*104*) (1979), 187—191.
[86] Optimierung und Graphentheorie. Fortschritte in der Math. Optimierung, Seminarbericht Nr. 15, Sekt. Math. Humboldt Univ., Berlin 1978, 31—37.

[87] Some combinatorical aspects in matrix theory and numerical algebra. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 22. Numerical Methods, Keszthely 1977, 185—201.
[88] Irreducibility of compound matrices. Comm. Math. Univ. Car. *20* (1979), 737—743.
[89] Deflation of tridiagonal matrices. Algorithms '79, ČSVTS, Bratislava 1979, 25—29.
[90] Tridiagonal matrices and no-positivity. Abstracts AMS *1* (1980), 38.
[91] (s *R. Merrisem*) Irreducibility of associated matrices. Lin. Alg. Appl. *37* (1981), 1—10.
[92] A deflation formula for tridiagonal matrices. Apl. mat. *25* (1980), 348—357.
[93] Minimal polynomial and the rank of principal submatrices of a matrix. Lin. Multilin. Alg. *10* (1981), 35—88.
[94] (s *R. Gronem*) Characterizations of sign-patterns of inverse-positive matrices. Lin. Alg. Appl. *40* (1981), 237—245.
[95] Geometry of the numerical range of matrices. Lin. Alg. Appl. *37* (1981), 81—96.
[96] Remarks on the Schur Complement. Lin. Alg. Appl. *39* (1981), 189—196.
[97] Invariant resistive networks in Euclidean spaces and their relation to geometry. Apl. mat. *27* (1982), 128—145.
[98] Kombinatorické aspekty v lineární a numerické algebře. Numerická matematika a teória grafov, Štrbské Pleso 1982, 10—15.
[99] Combinatorial properties of sign-patterns in some classes of matrices. Graph Theory, Lagów 1981, Springer 1983, 28—32.
[100] (s *H. Schneiderem*) Analytic functions of M-matrices. Lin. Multilin. Alg. *13* (1983), 185—201.
[101] (s *T. L. Markhamem* a *M. Neumannem*) Classes of products of M-matrices and inverse M-matrices. Lin. Alg. Appl. 52/53 (1983), 265—287.
[102] A note on the Hadamard product of matrices. Lin. Alg. Appl. *49* (1983), 233—235.
[103] Racionální interpolace. Algoritmy 1983, JSMF 1983, 69—75.
[104] S-matrices. Lin. Alg. Appl. *57* (1984), 157—167.
[105] Quasidirect decompositions of Hankel and Toeplitz matrices. Lin. Alg. Appl. *61* (1984), 155—174.
[106] Hankel and Loewner matrices. Lin. Alg. Appl. *58* (1984), 75—95.
[107] Binomial matrices. Math. Slovaca *34* (1984), 229—237.
[108] Polynomials and Hankel matrices. Lin. Alg. Appl. *66* (1985), 235—248.
[109] Löwnersche Matrizen und rationale Interpolation. Numerische Mathematik und ihre Anwendungen, Halle/Saale 1982.
[110] (s *C. Johnsonem, T. L. Markhamem* a *M. Neumannem*) A trace inequality for M-matrices and the symmetrizability of a real matrix by a positive diagonal matrix. Lin. Alg. Appl. *71* (1985), 81—94.
[111] (s *T. L. Markhamem*) Completing a matrix when certain entries of its inverse are specified. Lin. Alg. Appl. *74* (1986), 225—237.
[112] Signed bigraphs of monotone matrices. Graphs, Hypergraphs and Appl., Eyba 1984, Teubner 1985, 36—40.
[113] (s *V. Ptákem*) Intertwining and testing matrices corresponding to a polynomial. Lin. Alg. Appl. (v tisku).
[114] (s *T. L. Markhamem*) Rank-preservig diagonal completion of a matrix. Lin. Alg. Appl. (v tisku).

Knihy

[A] (s *K. Čulíkem* a *V. Doležalem*) Kombinatorická analýza v praxi. SNTL 1967.
[B] (s *J. Zemánkem*) Vybrané úlohy MO. SPN 1976.
[C] Speciální matice a jejich použití v numerické matematice. SNTL 1981.
[D] Special Matrices and their Applications to Numerical Mathematics. SNTL (v tisku).