Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Miroslav Laitoch

L'équation associée dans la théorie des transformations des équations différentielles du second ordre

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 4 (1963), No. 1, 45--62

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119800`

1963 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 12.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: doc. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

LÉQUATION ASSOCIÉE DANS LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

MIROSLAV LAITOCH

(Reçu le 26 octobre 1962)

Introduction. La théorie des transformations des intégrales des équations différentielles linéaires du second ordre, provenant de E. KUMMER [3] a été revue et élargie dans les dernières 10 années suivant les besoins de la théorie contemporaine des équations différentielles par O. BORŮVKA [1], [2] et par quelques uns de ses collaborateurs.

Ce travail présente une théorie contenant la théorie des transformations des intégrales et aussi des dérivées des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre du type JACOBI.

l-ère partie

1. Les propriétés des intégrales et leurs dérivées d'une équation différentielle du second ordre.

1. Nous nous occuperons des propriétés des intégrales et leurs dérivées d'une équation différentielle du second ordre du type JACOBI

$$y'' = q(t) \cdot y \tag{q}$$

Nous supposons, que la fonction q est définie dans l'intervalle ouvert j, qu'elle y est partout négative et admet la dérivée continue du second ordre.

Par intégrale de l'équation (q) nous entendrons une intégrale non identiquement nulle, qui est définie dans l'intervalle j toute entière. La circonstance, que la fonction $u(t)$ est une intégrale de l'équation (q), nous désignons par $u \in (q)$.

2. Du théorème classique, nous savons que par les conditions initiales cauchyennes est définie précisément une intégrale de l'équation (q), c'est-à-dire: soient $\tau_0 \in j$; u_0, u_0' des nombres arbitraires, il existe précisément une intégrale $u \in (q)$ définie dans l'intervalle j, qui satisfait aux conditions initiales cauchyennes $u(\tau_0) = u_0$, $u'(\tau_0) = u_0'$.

De là on déduit facilement, qu'il existe toujours l'intégrale $v \in (q)$ de telle propriété, que la fonction $\alpha v(t) + \beta v'(t)$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, s'annule en τ_0, c'est-à-dire $\alpha v(\tau_0) + \beta v'(\tau_0) = 0$.

En effet, il suffit de prendre pour l'intégrale $v(t)$ l'intégrale, qui satisfait aux conditions initiales cauchyennes $v(\tau_0) = \varkappa . \beta$, $v'(\tau_0) = \varkappa . \alpha$ $(\varkappa \neq 0)$.

Alors, toutes les intégrales $v(t)$, qui s'annulent en τ_0, sont linéairement dépendantes.

Nous désignons par $\tau_n(\tau_{-n})$, $n = 1, 2, \ldots$, la n-ième racine de la fonction $\alpha u(t) + \beta u'(t)$, qui suit à (précède) la racine τ_0, au cas qu'elle existe. Le nombre $\tau_n(\tau_{-n})$ nous appellons le n-ième nombre conjugué à τ_0, situé à droite (à gauche) de τ_0 par rapport à la base $[\alpha, \beta]$.

3. Soit u, v un couple ordonné d'intégrales de l'équation (q) et $w = (uv' - u'v)$ la Wronskienne correspondante. La valeur constante de la Wronskienne w est ou zéro ou différente de zéro si les intégrales u, v sont linéairement dépendentes ou linéairement indépendentes.

Nous déduisons facilement la formule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\alpha u + \beta u'}{\alpha v + \beta v'} = - \frac{w(\alpha^2 - \beta^2 q)}{(\alpha v + \beta v')^2}, \tag{1}$$

qui vaut pour chaque $t \in j$, dont le dénominateur est différent de zéro.

Si les intégrales u, v sont linéairment indépendentes, la fonction $(\alpha u + \beta u') : (\alpha v + \beta v')$ va constamment en croissant ou bien en décroissant pour chaque $t \in j$ vérifiant l'inégalité $\alpha v(t) + \beta v'(t) \neq 0$, suivant que $w < 0$ ou bien $w > 0$.

Soient $\eta < \xi$ des nombres arbitraires et soit la fonction $\alpha v(t) + \beta v'(t)$ dans l'intervalle $\langle \eta, \xi \rangle$ différente de zéro. En vertu de (1) nous obtenons la formule

$$\frac{\alpha u(\xi) + \beta u'(\xi)}{\alpha v(\xi) + \beta v'(\xi)} - \frac{\alpha u(\eta) + \beta u'(\eta)}{\alpha v(\eta) + \beta v'(\eta)} = - \int_\eta^\xi \frac{w . [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]}{[\alpha v(t) + \beta v'(t)]^2} \mathrm{d}t.$$

2. Les théorèmes sur les zéros de la fonction $\alpha u(t) + \beta u'(t)$, $u \in (q)$.

Théorème 1. *Soit $u \in (q)$. Si $\alpha u(\tau_0) + \beta u'(\tau_0) = 0$, $\tau_0 \in j$, la dérivée de la fonction $\alpha u(t) + \beta u'(t)$ est en τ_0 différente de zéro.*

En effet, nous avons $(\alpha u(t) + \beta u'(t))' = \alpha u'(t) + \beta q(t) u(t)$. Au cas contraire, nous aurions les équations

$$\alpha u(\tau_0) + \beta u'(\tau_0) = 0,$$
$$\beta q(\tau_0) u(\tau_0) + \alpha u'(\tau_0) = 0,$$

qui n'admettent, que la solution triviale $u(\tau_0) = 0$, $u'(\tau_0) = 0$. On en déduit que $u(t) \equiv 0$ contre les suppositions.

De là nous déduissons, que la fonction $\alpha u(t) + \beta u'(t)$ en passant par τ_0 change de signe.

Théorème 2. *Soit $u \in (q)$; α, β nombres arbitraires, tels que $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Dans l'intervalle fermée $\langle a, b \rangle \subset j$ la fonction $\alpha u(t) + \beta u'(t)$ ne peut avoir un nombre infini de zéros.*

En effet, s'il y avait une infinité de zéros dans cet intervalle $\langle a, b\rangle$ il y aurait un point limite, τ_0. Prenons une suite $\{\tau_n\}$, $\tau_n \neq \tau_0$, des zéros de la fonction $\alpha u(t) + \beta u'(t)$, convergeante vers τ_0. Il y a

$$\frac{[\alpha u(\tau_n) + \beta u'(\tau_n)] - [\alpha u(\tau_0) + \beta u'(\tau_0)]}{\tau_n - \tau_0} = 0.$$

Comme $\alpha u(t) + \beta u'(t)$ possède la dérivée première, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\alpha u(\tau_n) + \beta u'(\tau_n)] - [\alpha u(\tau_0) + \beta u'(\tau_0)]}{\tau_n - \tau_0} = \alpha u'(\tau_0) + \beta q(\tau_0)\, u(\tau_0) = 0.$$

Il en résulte que la fonction $\alpha u(t) + \beta u'(t)$ ainsi que sa dérivée $\alpha u'(t) + \beta q(t)\, u(t)$ s'annulent à τ_0, ce qui est imposible.

Théorème 3. *Soient, $u, v \in (q)$ linéairement indépendentes et α, β deux nombres arbitraires, tels que $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Si $\tau_0 < \tau_1$ sont deux zéros voisins de $\alpha u(t) + \beta u'(t)$, alors la fonction $\alpha v(t) + \beta v'(t)$ a précisément un zéro entre τ_0 et τ_1.*

D'abord il est évident que $\alpha v(t) + \beta v'(t)$ ne s'annule à τ_0 ni à τ_1. Dans ce cas on aurait

$$\alpha v(\tau_k) + \beta v'(\tau_k) = 0, \qquad (k = 0, 1),$$

et comme il y a de même

$$\alpha u(\tau_k) + \beta u'(\tau_k) = 0, \qquad (k = 0, 1),$$

il en résulte pour $k = 0, 1$ que le déterminant du système de ces équations, $-w(\tau_k) = 0$ (car nous avons $\alpha^2 + \beta^2 > 0$) et de là $w \equiv 0$. Donc les solutions u, v ne seraient pas indépendentes.

Supposons maintenant qu'il n'éxiste pas de zéro de la fonction $\alpha v(t) + \beta v'(t)$ dans (τ_0, τ_1). Nous avons naturellement $w > 0$ ou $w < 0$ pour tout $t \in j$. D'après (1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\alpha u + \beta u'}{\alpha v + \beta v'} = - \frac{w \,.\, (\alpha^2 - \beta^2 q)}{(\alpha v + \beta v')^2}$$

et cette dérivée est positive pour $w < 0$ et négative pour $w > 0$. En intégrant de τ_0 à τ_1, on obtient l'équation

$$\left[\frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\alpha v(t) + \beta v'(t)}\right]_{\tau_0}^{\tau_1} = - \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{w \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]}{[\alpha v(t) + \beta v'(t)]^2}\, \mathrm{d}t,$$

dont le membre à gauche est évidemment zéro et le membre à droite est positif pour $w < 0$ et négatif pour $w > 0$. Ainsi on obtient qu'entre τ_0 et τ_1 est situé au moins un zéro de $\alpha v(t) + \beta v'(t)$.

S'il y en avait deux zéros de $\alpha v(t) + \beta v'(t)$, $\bar{\tau}_0$, $\bar{\tau}_1$, on prouverait par le même raisonnement l'éxistence d'un zéro au moins τ de la fonction $\alpha u(t) + \beta u'(t)$ ce qui donnerait finalement $\tau_0 < \bar{\tau}_0 < \tau < \bar{\tau}_1 < \tau_1$, ce qui est imposible, comme les zéros τ_0 et τ_1 sont supposés voisins.

3. Les coordonnées polaires.

1. Soit u, v un couple ordonné des solutions de l'équation (q), $w = uv' - u'v$ leur Wronskienne. Soient α, β deux nombres arbitraires, tels que $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Définissons, dans l'intervalle j, la fonction

$$\varrho = \sqrt{[\alpha u(t) + \beta u'(t)]^2 + [\alpha v(t) + \beta v'(t)]^2}. \tag{1}$$

Nous nommerons cette fonction *amplitude* du couple ordonné u, v par rapport à la base $[\alpha, \beta]$. Pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$ nous obtenons de (1) *la première amplitude*, pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$ *la deuxième amplitude* du couple ordonné u, v [1].

La fonction ϱ remplit l'équation suivante du 2-ème ordre:

$$\varrho'' = q\varrho + \frac{w^2 . (\alpha^2 - \beta^2 q)^2}{\varrho^3} + \frac{\beta q'(\alpha\varrho - \beta\varrho')}{\alpha^2 - \beta^2 q}, \tag{2}$$

ce que l'on peut vérifier par un calcul simple.

Théorème 1. *Soient* $t_0 \in j$; $\varrho_0 \neq 0$, ϱ_0' *nombres arbitraires. La solution* $\varrho(t)$ *de l'équation différentielle* (2), *pour laquelle* $\varrho(t_0) = \varrho_0$, $\varrho'(t_0) = \varrho_0'$ *s'exprime par la formule*

$$\varrho(t) = \operatorname{sgn} \varrho_0 . \sqrt{[\alpha u(t) + \beta u'(t)]^2 + [\alpha v(t) + \beta v'(t)]^2}. \tag{3}$$

Ici u, v *forment le système fondamental de solutions de l'équation* (q), *qui remplit les condiotions initiales*

$$u(t_0) = (\alpha\varrho_0 - \beta\varrho_0') : [\alpha^2 - \beta^2 q(t_0)], \qquad u'(t_0) = [\alpha\varrho_0' - \beta q(t_0)\,\varrho_0] : [\alpha^2 - \beta^2 q(t_0)];$$
$$v(t_0) = -\beta k, \qquad v'(t_0) = \alpha k; \qquad k \neq 0.$$

En effet, on voit immédiatement que la fonction (3) représente une solution de l'équation (2). Pour que la fonction (3) remplisse les conditions initiales $\varrho(t_0) = \varrho_0$, $\varrho'(t_0) = \varrho_0$, il est nécessaire, que

$$\varrho_0 = \operatorname{sgn} \varrho_0 . [(\alpha u_0 + \beta u_0')^2 + (\alpha v_0 + \beta v_0')^2]^{\frac{1}{2}},$$
$$\varrho_0' = \operatorname{sgn} \varrho_0 . [(\alpha u_0 + \beta u_0')^2 + (\alpha v_0 + \beta v_0')^2]^{-\frac{1}{2}} . [(\alpha u_0 + \beta u_0')\,(\alpha u_0' + \beta q_0 v_0) + (\alpha v_0 +$$
$$+ \beta v_0')\,(\alpha v_0' + \beta q_0 v_0)],$$

où l'on a posé $u_0 = u(t_0)$, $u_0' = u'(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, $v_0' = v'(t_0)$, $q_0 = q(t_0)$.

Par un court calcul, il en résulte

$$\begin{aligned} \varrho_0\varrho_0' &= (\alpha u_0 + \beta u_0')\,(\alpha u_0' + \beta q_0 u_0) + (\alpha v_0 + \beta v_0')\,(\alpha v_0' + \beta q_0 v_0), \\ \varrho^2 &= (\alpha u_0 + \beta u_0')^2 + (\alpha v_0 + \beta v_0')^2, \end{aligned} \tag{4}$$

ce qui est un système de deux équations pour quatre inconnues, u_0, v_0, u_0', v_0'.

En choisissant encore deux conditions $\alpha u_0 + \beta u_0' = \varrho_0$, $\beta q_0 u_0 + \alpha u_0' = \varrho_0'$, nous obtenons alors

$$u_0 = (\alpha\varrho_0 - \beta\varrho_0') : (\alpha^2 - \beta^2 q_0), \qquad u_0' = \alpha\varrho_0' - \beta q_0 \varrho_0. \tag{5}$$

Les équations (4) prennent la forme

$$(\alpha v_0 + \beta v_0')(\alpha v_0' + \beta q_0 v_0) = 0,$$
$$(\alpha v_0 + \beta v_0')^2 = 0.$$

En résovlant, nous obtenons

$$\alpha v_0 + \beta v_0' = 0,$$

ainsi qu'on peut choisir

$$v_0 = -\beta k, \qquad v_0' = \alpha k. \tag{6}$$

Les formules (5) et (6) prouvent notre théorème.

Pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$ nous obtenons le cas considéré dans [4].

2. Soit τ_0 une racine quelqionque de la fonction $\alpha v(t) + \beta v'(t)$ et τ_λ $(\tau_{-\lambda})$ ont la signification mentionnée plus haut. Soit $\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ On sait, que la fonction $(\alpha u + \beta u') : (\alpha v + \beta v')$ croît de $-\infty$ à $+\infty$ dans tout intervalle $(\tau_\nu, \tau_{\nu+1})$ si $w < 0$ et décroît de $+\infty$ à $-\infty$ si $w > 0$. Dans ces deux cas, il existe pour tout $t \in (\tau_\nu, \tau_{\nu+1})$ précisément un nombre $\operatorname{arctg} \dfrac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\alpha v(t) + \beta v'(t)}$ de l'intervalle $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Alors, nous pouvons définir dans l'intervalle j la fonction

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - \nu\pi) \,.\, \operatorname{sgn} w & \text{pour } t = \tau_\nu, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\alpha v(t) + \beta v'(t)} - \nu\pi \,.\, \operatorname{sgn} w & \text{pour } t \in (\tau_\nu, \tau_{\nu+1}), \end{cases}$$

que nous nommerons *la phase* du couple ordonné u, v par rapport à la base $[\alpha, \beta]$. Nous en obtenons pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$ *la première phase*, pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$ *la deuxième phase* [1].

Il résulte de la definition que la phase est définie par le couple ordonné u, v, jusqu'un multiple additif de π.

La fonction φ possède les propriétès suivantes:

a) *Elle est continue dans chaque point $t \in j$ et même dérivable. Pour cette dérivée nous obtenons*

$$\varphi'(t) = -\frac{w \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]}{\varrho^2(t)}.$$

Par conséquence de la formule 3. (2), *la fonction φ remplit la relation différentielle suivante:*

$$\left(\sqrt{\frac{-w(\alpha^2 - \beta^2 q)}{\varphi'}}\right)'' = (q + \varphi'^2) \,.\, \sqrt{\frac{-w(\alpha^2 - \beta^2 q)}{\varphi'}} +$$
$$+ \frac{\beta q'}{\alpha^2 - \beta^2 q} \,.\, \left[\alpha \sqrt{\frac{-w(\alpha^2 - \beta^2 q)}{\varphi'}} - \beta \left(\sqrt{\frac{-w(\alpha^2 - \beta^2 q)}{\varphi'}}\right)'\right].$$

b) *Pour tout $t \in j$ sont valables les formules suivantes:*

$$\begin{aligned} \alpha u(t) + \beta u'(t) &= \operatorname{sgn}[\alpha v'(\tau_0) + \beta q(\tau_0)\, v(\tau_0)] \,.\, \varrho(t) \sin \varphi(t), \\ \alpha v(t) + \beta v'(t) &= \operatorname{sgn}[\alpha v'(\tau_0) + \beta q(\tau_0)\, v(\tau_0)] \,.\, \varrho(t) \cos \varphi(t). \end{aligned} \tag{7}$$

En effet, si $t \in (\tau_0, \tau_1)$, il y a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\alpha v(t) + \beta v'(t)}$ et $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

De là

$$\sin \varphi = k(\alpha u + \beta u'),$$

$$\cos \varphi = k(\alpha v + \beta v').$$

L'addition des carrés des expressions à gauche at à droite dans ces formules donne $1 = k^2 \varrho^2$, donc $|k| = \frac{1}{\varrho}$. Comme la fonction $\cos \varphi(t)$ est positive pour $t \in (\tau_0, \tau_1)$, nous pouvons choisir le signe en (5) de la sorte, que la deuxième équation est valable. La fonction $\alpha v(t) + \beta v'(t)$ est positive (négative) si $\alpha v'(\tau_0) + \beta q(\tau_0) v(\tau_0)$ est positif (négatif).

4. L'équation associée (q_1) du second ordre.

Théorème 1. *Soit $u \in (q)$; α, β deux nombres arbitraires, tels que $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. La fonction*

$$U = \frac{\alpha u + \beta u,}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q}}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$y'' = q_1(t) \cdot y, \tag{q_1}$$

où l'on a posé

$$q_1 = q + \frac{\alpha\beta q'}{\alpha^2 - \beta^2 q} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q}}\right)''.$$

On peut vérifier cela par un calcul direct.

L'équation (q_1) se nomme *première équation asscociée à l'équation différentielle* (q) *par rapport à la base* $[\alpha, \beta]$. La première équation associée à (q_1) s'appelle *deuxième équation associée* à l'équation (q) etc.

Théorème 2. *Soit $U \in (q_1)$ intégrale quelconque. Alors, il existe l'intégrale $u \in (q)$ elle, que*

$$(\alpha u + \beta u') : \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q} = U.$$

En effet, U est définie par les conditions initiales cauchyennes $\tau_0 \in j$; $U(\tau_0) = U_0$, $U'(\tau_0) = U'_0$. Il suffit de poser pour $u \in (q)$

$$(\alpha u_0 + \beta u'_0) : \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(\tau_0)} = U_0,$$

$$[\beta q(\tau_0)\, u_0 + \alpha u'_0] : \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(\tau_0)} + (\alpha u_0 + \beta u'_0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(t)}}\right)'_{t=\tau_0} = U'_0,$$

c'est-à-dire choisir l'intégrale $u \in (q)$ de sorte qu'elle remplisse les conditions initiales $u(\tau_0) = u_0$, $u'(\tau_0) = u'_0$ ou l'on a posé

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(\tau_0)}} \cdot \left\{ U_0 \left[\alpha - \beta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(\tau_0)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(t)}} \right)'_{t=\tau_0} \right] - \beta U'_0 \right\},$$

$$u'_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(\tau_0)}} \cdot \left\{ \alpha U'_0 - U_0 \left[\alpha \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(\tau_0)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(t)}} \right)'_{t=\tau_0} - \beta q(\tau_0) \right] \right\}.$$

La vérification se fait par un calcul direct.

2-ème partie

1. Les équations différentielles non linéaires du 3-ème ordre.

Considérons maintenant deux équations différentielles linéaires du type Jacobi

$$y'' = q(t) \cdot y \qquad (q), \qquad Y'' = Q(T) \cdot Y \qquad (Q)$$

à coefficients continus, $q(t)$ dans l'intervalle ouvert j et $Q(T)$ dans l'intervalle ouvert J.

Avec ces équations différentielles, nous étudierons encore ces 16 équations différentielles non linéaires du 3-ème ordre:

$$\begin{array}{ll}
-\{X, t\} + X'^2 \,.\, Q_1(X; \alpha, \beta) = q_1(t; \alpha, \beta), & (1)\ -(Q; \alpha, \beta; q; \alpha, \beta) \\
-\{X, t\} + X'^2 \,.\, Q_1(X; \alpha, \beta) = q_1(t; \gamma, \delta), & (2)\ -(Q; \alpha, \beta; q; \gamma, \delta) \\
-\{X, t\} + X'^2 \,.\, Q_1(X; \gamma, \delta) = q_1(t; \alpha, \beta), & (3)\ -(Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta) \\
-\{X, t\} + X'^2 \,.\, Q_1(X; \gamma, \delta) = q_1(t; \gamma, \delta), & (4)\ -(Q; \gamma, \delta; q; \gamma, \delta) \\
-\{x, T\} + \dot{x}^2 \,.\, q_1(x; \alpha, \beta) = Q_1(T; \alpha, \beta), & (5)\ -(q; \alpha, \beta; Q; \alpha, \beta) \\
-\{x, T\} + \dot{x}^2 \,.\, q_1(x; \alpha, \beta) = Q_1(T; \gamma, \delta), & (6)\ -(q; \alpha, \beta; Q; \gamma, \delta) \\
-\{x, T\} + \dot{x}^2 \,.\, q_1(x; \gamma, \delta) = Q_1(T; \alpha, \beta), & (7)\ -(q; \gamma, \delta; Q; \alpha, \beta) \\
-\{x, T\} + \dot{x}^2 \,.\, q_1(x; \gamma, \delta) = Q_1(T; \gamma, \delta), & (8)\ -(q; \gamma, \delta; Q; \gamma, \delta) \\
-\{X, t\} + X'^2 \,.\, q_1(X; \alpha, \beta) = q_1(t; \alpha, \beta), & (9)\ -(q; \alpha, \beta; q; \alpha, \beta) \\
-\{X, t\} + X'^2 \,.\, q_1(X; \alpha, \beta) = q_1(t; \gamma, \delta), & (10)\ -(q; \alpha, \beta; q; \gamma, \delta) \\
-\{X, t\} + X'^2 \,.\, q_1(X; \gamma, \delta) = q_1(t; \alpha, \beta), & (11)\ -(q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta) \\
-\{X, t\} + X'^2 \,.\, q_1(X; \gamma, \delta) = q_1(t; \gamma, \delta), & (12)\ -(q; \gamma, \delta; q; \gamma, \delta) \\
-\{x, T\} + \dot{x}^2 \,.\, Q_1(x; \alpha, \beta) = Q_1(T; \alpha, \beta), & (13)\ -(Q; \alpha, \beta; Q; \alpha, \beta) \\
-\{x, T\} + \dot{x}^2 \,.\, Q_1(x; \alpha, \beta) = Q_1(T; \gamma, \delta), & (14)\ -(Q; \alpha, \beta; Q; \gamma, \delta) \\
-\{x, T\} + \dot{x}^2 \,.\, Q_1(x; \gamma, \delta) = Q_1(T; \alpha, \beta), & (15)\ -(Q; \gamma, \delta; Q; \alpha, \beta) \\
-\{x, T\} + \dot{x}^2 \,.\, Q_1(x; \gamma, \delta) = Q_1(T; \gamma, \delta), & (16)\ -(Q; \gamma, \delta; Q; \gamma, \delta)
\end{array}$$

ou l'on a posé

$$Q_1(X; \alpha, \beta) = Q(X) + \frac{3}{4} \beta^4 \frac{Q'^2(X)}{[\alpha^2 - \beta^2 Q(X)]^2} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{Q''(X)}{\alpha^2 - \beta^2 Q(X)} + \alpha\beta \frac{Q'(X)}{\alpha^2 - \beta^2 Q(X)},$$

$$q_1(t; \alpha, \beta) = q(t) + \frac{3}{4} \beta^4 \frac{q'^2(t)}{[\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^2} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{q''(t)}{\alpha^2 - \beta^2 q(t)} + \alpha\beta \frac{q'(t)}{\alpha^2 - \beta^2 q(t)}.$$

et analoguement les autres coefficients; $X(t)$, $x(T)$ sont les fonctions inconnues. Les symboles $\{X, t\}$ et $\{x, T\}$ désignent les dérivées schwarziennes des fonctions X et x, définies par les formules

$$\{X, t\} = \frac{1}{2}\frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4}\frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}, \quad \{x, T\} = \frac{1}{2}\frac{\dddot{x}(T)}{\dot{x}(T)} - \frac{3}{4}\frac{\ddot{x}^2(T)}{\dot{x}^2(T)}.$$

2. Une transformation birationelle.

Soient $X(t)$ et $x(T)$ deux fonctions réciproquement inverses définies dans les intervalles i, I; la fonction X (x) soit proprement monotonne dans l'intervalle $i = x(I)$ $(I = X(i))$.

Deux nombres $t \in i$, $T \in I$ nous appellons associés (par rapport aux fonctions X, x), s'ils satisfont aux équations $T = X(t)$, $t = x(T)$. Nous dirons aussi que le nombre t (T) est associé au nombre T (t).

Supposons que les fonctions admettent les dérivées jusqu'au 3-ème ordre; nous avons les relations suivantes pour les valeurs des dérivées X', X'', X''' de X et $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ de x en deux nombres associés [2]:

$$X'\dot{x} = 1,$$
$$X''\dot{x} + X'^2\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{x}X' + \dot{x}^2X'' = 0,$$
$$X'''\dot{x}^2 + 3X''\ddot{x} + \dddot{x}X'^2 = 0.$$

On déduit facilement de là, que les valeurs des dérivées des fonctions X, x en deux nombres associés se transforment l'une à l'autre, suivant les équations:

$$X' = \dot{x}^{-1}, \quad X'' = -\ddot{x}\dot{x}^{-3}, \quad X''' = 3\ddot{x}^2\dot{x}^{-5} - \dddot{x}\dot{x}^{-4}; \qquad (\tau)$$
$$\dot{x} = X'^{1}, \quad \ddot{x} = X''X'^{-3}, \quad \dddot{x} = 3X''^2X'^{-5} - X'''X'^{-4}.$$

Ces équations définissent une transformation birationelle de l'éspace à 3 dimensions, qui fait correspondre réciproquement les points $[X', X'', X''']$ et $[\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}]$. Nous désignerons la transformation simplement par (τ).

Dans la transformation birationelle (τ) la fonction $X''^2X'^{-3}$ résulte invariante, c'est-à-dire

$$X''^2X'^{-3} = \ddot{x}^2\dot{x}^{-3}. \qquad (1)$$

3. La dérivée schwarzienne.

Nous allons indiquer quelques propriétés de la derivée schwarzienne [2], dont nous nous servirons dans la suite.

1. *Les fonctions* $S(X) = \frac{1}{2}X'''X'^{-1} - \frac{3}{4}X''^2X'^{-2}$ et $S(x) = \frac{1}{2}\dddot{x}\dot{x}^{-1} - \frac{3}{4}\ddot{x}^2\dot{x}^{-2}$ *se transforment par la transformation* (τ) *d'après la formule*

$$\frac{S(X)}{X'} + \frac{S(x)}{\dot{x}} = 0. \qquad (1)$$

2. *En deux nombres conjugués $t \in i$, $T \in I$ nous avons les formules*

$$\frac{\{X, t\}}{X'} = \frac{1}{4}\frac{X''^2}{X'^3} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X'}\right]'', \tag{2}$$

$$\frac{\{x, T\}}{\dot{x}} = \frac{1}{4}\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\dot{x}}\right]''. \tag{3}$$

3. *En vertu des formules* 2.(1) *et* 3.(1) *nous avons pour deux nombres conjugués $t \in i$, $T \in I$ cette relation symétrique:*

$$\frac{\{X, t\}}{X'} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X'}\right]'' = \frac{\{x\ T\}}{\dot{x}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\dot{x}}\right]^{\cdot\cdot}. \tag{4}$$

4. *Soit $Z(t)$ une fonction proprement monotonne, définie dans l'intervalle h. Nous supposons, que les valeurs de la fonction Z sont dans l'intervalle i et que cette fonction possède partout la dérivée du 3-ème ordre.*

Désignons par XZ la fonction composée $X[Z(t)]$ définie dans l'intervalle h. Dans ces suppositions, la fonction XZ admet en chaque nombre $t \in h$ une derivée schwarzienne, qui s'exprime par la formule

$$\{XZ, t\} = \{X, Z(t)\} \,.\, Z'^2(t) + \{Z, t\}. \tag{5}$$

4. Les relations entre les solutions de 16 équations non linéaires du 3-éme ordre.

Théorème 1. *Soit X l'intégrale de l'équation différentielle $(Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$ définie dans l'intervalle $i \subset j$. Alors la fonction inverse x, définie dans l'intervalle $I = X(i)$ est une solution de l'équation différentielle $(q; \alpha, \beta; Q; \gamma, \delta)$.*

Nous avons, en effet, comme $X \in (Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$, en deux nombres associés $T \in I$, $t = x(T) \in i$ l'équation

$$-\frac{\{X, t\}}{X'} + X' \,.\, Q_1(X; \gamma, \delta) = \frac{q_1(t; \alpha, \beta)}{X'}. \tag{1}$$

Comme, en vertu de 3.(1) et de la première équation de (τ), il y a $\frac{S(X)}{X'} + \frac{S(x)}{\dot{x}} = 0$ et $X' = \frac{1}{\dot{x}}$, on peut donner à (1) la forme:

$$\frac{\{x, T\}}{\dot{x}} + \frac{1}{\dot{x}} Q_1(T; \gamma, \delta) = \dot{x} q_1(x; \alpha, \beta).$$

On en tire $-\{x, T\} + \dot{x}^2 q_1(x; \alpha, \beta) = Q_1(T; \gamma, \delta)$, donc $x \in (q; \alpha, \beta; Q; \gamma, \delta)$.

Théorème 2. *Soient $X \in (Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$ et $x \in (q; \alpha, \beta; Q; \gamma, \delta)$ deux fonctions mutuellement inverses, définies dans les intervalles $i \subset j$, $I \subset J$. Alors, en deux nombres associés $t \in i$, $T \in I$ on a les rélations:*

$$X' \,.\, Q_1(X; \gamma, \delta) - \frac{1}{2}\frac{\{X, t\}}{X'} = \dot{x} \,.\, q_1(x; \alpha, \beta) - \frac{1}{2}\frac{\{x, T\}}{\dot{x}}, \tag{2}$$

$$X' \,.\, Q_1(X; \gamma, \delta) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{X'}\right]'' = \dot{x} \,.\, q_1(x; \alpha, \beta) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\dot{x}}\right]^{\cdot\cdot}. \tag{3}$$

En effet, de (1) nous tirons (2) et de là, en vue de 6.(1), résulte (2). La formule (3) s'obtient de (2) en tenant compte de 6.(3).

Théorème 3. *Soit* $X \in (Q; \alpha, \beta; q; \alpha, \beta)$ *et* $\bar{X} \in (q; \alpha, \beta; Q; \alpha, \beta)$. *Alors la fonction composée* $X\bar{X}$ *(si elle existe) satisfait à l'équation différentielle* $(Q; \alpha, \beta; Q; \alpha, \beta)$.

En effet, supposons par exemple, que les valeurs de la fonction $\bar{X}$ sont de l'intervalle de définition de la fonction X, de sorte que la fonction composée $X\bar{X}$ existe dans le même intervalle que $\bar{X}$. Comme $X \in (Q; \alpha, \beta; q; \alpha, \beta)$, $\bar{X} \in (q; \alpha, \beta; q; \alpha, \beta)$ nous obtenons pour chaque t de l'intervalle de définition de $\bar{X}$:

$$-\{\bar{X}, t\} + \bar{X}'^2 \,.\, q_1(\bar{X}; \alpha, \beta) = Q_1(t; \alpha, \beta),$$
$$-\{X, \bar{X}\} + X'^2\bar{X} \,.\, Q_1(X\bar{X}; \alpha, \beta) = q_1(\bar{X}; \alpha, \beta).$$

D'après 3.(5) nous avons $\{X\bar{X}, t\} = \{X, \bar{X}\} \,.\, \bar{X}'^2 + \{\bar{X}, t\}$ et cela donne avec les formules précèdentes $-\{X\bar{X}, t\} = [X'^2\bar{X} \,.\, Q_1(X\bar{X}; \alpha, \beta) + q_1(\bar{X}; \alpha, \beta)] \,.\, \bar{X}'^2 + Q_1(t; \alpha, \beta) - \bar{X}'^2 \,.\, q_1(\bar{X}; \alpha, \beta) = -\{X\bar{X})'^2 \,.\, Q_1(X\bar{X}; \alpha, \beta) + Q_1(t; \alpha, \beta)$, c'est-à-dire $XX' \in (Q; \alpha, \beta; Q; \alpha, \beta)$.

Remarque: One peut formuler 64 théorèmes concernant les rélations des intégrales des 16 équations différentielles du 3-ème ordre. Ces théorèmes sont exprimés par le tableau ci-dessous. En formant la fonction composée $X\bar{X}$ où X est l'intégrale de l'équation différentielle de i-ème ligne et $\bar{X}$ l'intégrale de l'équation de k-ème colonne, nous trouvons l'équation qui est satisfaite par $X\bar{X}$ oú i-ème ligne et k-ème colonne se croisent dans notre tableau.

$\bar{X} \in$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
$X \in$ (1) — $(Q; \alpha, \beta; q; \alpha, \beta)$					(13)	(14)			(1)	(2)						
(2) — $(Q; \alpha, \beta; q; \gamma, \delta)$							(13)	(14)			(1)	(2)				
(3) — $(Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$					(15)	(16)			(3)	(4)						
(4) — $(Q; \gamma, \delta; q; \gamma, \delta)$							(15)	(16)			(3)	(4)				
(5) — $(q; \alpha, \beta; Q; \alpha, \beta)$	(9)	(10)											(5)	(6)		
(6) — $(q; \alpha; \beta; Q; \gamma, \delta)$			(9)	(10)											(5)	(6)
(7) — $(q; \gamma; \delta; Q; \alpha, \beta)$	(11)	(12)											(7)	(8)		
(8) — $(q; \gamma, \delta; Q; \gamma, \delta)$			(11)	(12)											(7)	(8)
(9) — $(q; \alpha, \beta; q; \alpha, \beta)$					(5)	(6)			(9)	(10)						
(10) — $(q; \alpha, \beta; q; \gamma, \delta)$							(5)	(6)			(9)	(10)				
(11) — $(q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$					(7)	(8)			(11)	(12)						
(12) — $(q; \gamma, \delta; q; \gamma, \delta)$							(7)	(8)			(11)	(12)				
(13) — $(Q; \alpha, \beta; Q; \alpha, \beta)$	(1)	(2)											(13)	(14)		
(14) — $(Q; \alpha, \beta; Q; \gamma, \delta)$			(1)	(2)											(13)	(14)
(15) — $(Q; \gamma, \delta; Q; \alpha, \beta)$	(3)	(4)											(15)	(16)		
(16) — $(Q; \gamma, \delta; Q; \gamma, \delta)$			(3)	(4)											(15)	(16)

5. Les rélations entre les intégrales des équations (q), (Q) et les équations différentielles non linéaires du 3-ème ordre.

Dans ce qui suit nous allons considérer les solutions des équations différentielles (q), (Q) définies dans tout intervalle j, J.

Soit $X \in (Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$ définie dans l'intervalle $i \subset j$. D'après le théorème 4.1., la fonction inverse x, définie dans l'intervalle $I = X(i)$ est la solution de $(q; \alpha, \beta; Q; \gamma, \delta)$.

Soit $t_0 \in i$ nombre arbitraire; désignons par X_0, X_0' $(\neq 0)$, X_0'' les valeurs des fonctions X, X', X'' au nombre t_0. Posons $T_0 = X(t_0) = X_0 \in I$ et désignons par x_0, $\dot{x}_0$ $(\neq 0)$, $\ddot{x}_0$ les valeurs des fonctions x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ en nombre T_0. Les nombres X_0', X_0'', $\dot{x}_0$, $\ddot{x}_0$ se transforment réciproquement d'après les formules (τ).

Les rélations entre les intégrales des équations différentielles (q) et (Q) et des équations non linéaires du 3-ème ordre s'expriment par les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Soit $U \in (Q)$ et $X \in (Q;\ \gamma, \delta;\ q;\ \alpha, \beta)$. Alors la fonction*

$$u(t) = [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^{-\frac{1}{2}} . [\gamma^2 - \delta^2 QX(t)]^{-\frac{1}{2}} . |X'|^{-\frac{1}{2}} . D_1(UX, t), \tag{1}$$

où

$$D_1(UX,t) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \gamma UX(t) + \delta U'X(t) & ;\beta \\ [\gamma U'X(t) + \delta QX(t)\, UX(t)] . X'(t) + [\gamma UX(t) + \delta U'X(t)] . & ;\alpha + \frac{1}{2}\beta^3 q'(t) . [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^{-1} \\ . \{\frac{1}{2}\delta^2[\gamma^2 - \delta^2 QX(t)]^{-1} . Q'X(t) . X'(t) - \frac{1}{2} X''(t)\, X'^{-1}(t)\} & \end{array} \right|,$$

définie dans l'intervalle i est l'intégrale de l'équation différentielle (q), définie par les conditions initiales cauchyennes

$$\begin{aligned} u(t_0) &= [\alpha^2 - \beta^2 q(t_0)]^{-\frac{1}{2}} . [\gamma^2 - \delta^2 Q(X_0)]^{-\frac{1}{2}} . |X_0'|^{-\frac{1}{2}} . D_1(UX, t_0), \\ u'(t_0) &= [\alpha^2 - \beta^2 q(t_0)]^{-\frac{1}{2}} . [\gamma^2 - \delta^2 Q(X_0)]^{-\frac{1}{2}} . |X_0'|^{-\frac{1}{2}} . D_2(UX, t_0), \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$D_2(UX, t) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \alpha & ;\gamma UX(t) + \delta U'X(t) \\ \beta q(t) + \frac{1}{2}\alpha\beta^2 q'(t) . [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^{-1} & ;[\gamma U'X(t) + \delta QX(t)\, UX(t)] . X'(t) + [\gamma UX(t) + \delta U'X(t)] . \\ & . \{\frac{1}{2}\delta^2 [\gamma^2 - \delta^2 QX(t)]^{-1} . Q'X(t) . X'(t) - \frac{1}{2}X''(t) . X'(t)\} \end{array} \right|.$$

De plus a lieu la relation

$$\begin{aligned} &[\alpha u(t) + \beta u'(t)] . [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= [\gamma UX(t) + \delta U'X(t)] . [\gamma^2 - \delta^2 QX(t)]^{-\frac{1}{2}} . |X'(t)|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

En effet, on vérifie par un calcul direct que la fonction u possède pour tout $t \in i$ la derivée première et seconde qui sont exprimées par les équations

$$u'(t) = [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^{-\frac{1}{2}} . [\gamma^2 - \delta^2 QX(t)]^{-\frac{1}{2}} . |X'(t)|^{-\frac{1}{2}} . D_2(UX, t), \tag{4}$$

$$u''(t) = q(t) . u(t). \tag{5}$$

Théorème 2. *L'intégrale U considérée au théorème précedent remplit, avec l'intégrale u, dans l'intervalle I la formule inverse*

$$U(T) = [\gamma^2 - \delta^2 Q(T)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 qx(T)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}(T)|^{-\frac{1}{2}} \,.\, D_3(ux, T), \tag{6}$$

où

$$D_3(ux,\, T) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha ux(T) + \beta u'x(T) & ;\, \delta \\ [\alpha u'x(T) + \beta qx(T)\, ux(T)] \,.\, \dot{x}(T) + [\alpha ux(T) + \beta u'x[T)] \,. & ;\, \gamma + \frac{1}{2}\delta^3\, Q'(T) \,.\, [\gamma^2 - \delta^2 Q(T)]^{-1} \\ .\, \{\frac{1}{2}\beta^2[\alpha^2 - \beta^2 qx(T)]^{-1} \,.\, q'x(T) \,.\, \dot{x}(T) - \frac{1}{2}x(T) \,.\, \dot{x}^{-1}(T)\} & \end{vmatrix}.$$

L'intégrale U est celle qui remplit les conditions initiales cauchyennes suivantes:

$$\begin{aligned} U(T_0) &= [\gamma^2 - \delta^2 Q(T_0)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(x_0)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}_0| \,.\, D_3(ux,\, T_0), \\ U'(T_0) &= [\gamma^2 - \delta^2 Q(T_0)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(x_0)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}_0| \,.\, D_4(ux,\, T_0), \end{aligned} \tag{7}$$

où

$$D_4(ux, T) =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma & ;\, \alpha ux(T) + \beta u'x(T) \\ \delta Q(T) + \frac{1}{2}\gamma\delta^2 Q(T) \,.\, [\gamma^2 - \delta\, Q'(T)]^{-1} & ;\, [\alpha u'x(T) + \beta qx(T)\, ux(T)] \,.\, \dot{x}_0 + [\alpha ux(T) + \beta u'x(T)] \,. \\ & .\, \{\frac{1}{2}\beta^2[\alpha^2 - \beta^2 qx(T)]^{-1} \,.\, q'x(T) \,.\, \dot{x}(T) - \frac{1}{2}\ddot{x}(T) \,.\, \dot{x}^{-1}(T), \end{vmatrix},$$

et aussi cette relation est valable

$$\begin{aligned} &[\gamma U(T) + \delta U'(T)] \,.\, [\gamma^2 - \delta^2 Q(T)]^{-1} = \\ &= [\alpha ux(T) + \beta u'x(T)] \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 qx(T)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}(T)|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{8}$$

En effet, comme $u \in (q)$, $x \in (q; \alpha, \beta; Q; \gamma, \delta)$, d'après le théorème précédent la fonction

$$\overline{U}(T) = [\gamma^2 - \delta^2 Q(T)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 qx(T)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}(T)|^{-\frac{1}{2}} \,.\, D_3(ux,\, T),$$

est l'intégrale de l'équation différentielle (Q) définie dans l'intervalle I et déterminée par les conditions initiales cauchyennes

$$\begin{aligned} \overline{U}(T_0) &= [\gamma^2 - \delta^2 Q(T_0)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(x_0)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}_0|^{-\frac{1}{2}} \,.\, D_3(ux,\, T_0), \\ \overline{U}'(T_0) &= [\gamma^2 - \delta^2 Q(T_0)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(x_0)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}_0|^{-\frac{1}{2}} \,.\, D_4(ux,\, T_0). \end{aligned} \tag{9}$$

Par un calcul direct en apliquant les formules (3) et (τ) nous obtenons $\overline{U}(T_0) = U(T_0)$, $\overline{U}'(T_0) = U'(T_0)$. De là nous avons l'idéntité $\overline{U}(T) = U(T)$ dans l'intervalle I.

Le deuxième énoncé du théorème nous obtenons par un calcul direct en substituant pour U et U': $[\gamma U(T) + \delta U'(T)] \,.\, [\gamma^2 - \delta^2 Q(T)]^{-\frac{1}{2}} = [\gamma^2 - \delta^2 Q(T)^{-1}] \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 qx(T)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}(T)|^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\gamma D_3(ux,\, T) + \delta D_4(ux,\, T) = (\alpha ux(T) + \beta u'x(T)] \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 qx(T)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\dot{x}(T)|^{-\frac{1}{2}}$.

Théorème 3. *Les valeurs des intégrales considérées U et u et de leurs dérivées U' et u' en deux nombres associés $T \in I$, $t \in i$ remplissent les équations suivantes*

$$\frac{\gamma U(X) + \delta U'(X)}{\sqrt[4]{|X'|} \cdot \sqrt{\gamma^2 - \delta^2 Q(X)}} = \frac{\alpha u(x) + \beta u'(x)}{\sqrt[4]{|\dot{x}|} \cdot \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(x)}},$$

$$\varepsilon \frac{[\gamma U'(X) + \delta Q(X)\, U(X)] \cdot \sqrt[4]{|X'|}}{\sqrt{\gamma^2 - \delta^2 Q(X)}} + \varepsilon \cdot \frac{\delta^2}{2} \frac{[\gamma U(X) + \delta U'(X)] \cdot Q'(X) \cdot \sqrt[4]{|X'|}}{\sqrt{[\gamma^2 - \delta^2 Q(X)]^3}} -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\gamma U(X) + \delta U'(X)}{\sqrt[4]{\gamma^2 - \delta^2 Q(X)}} \cdot \frac{X''}{X' \sqrt{|X'|}\, \sqrt[4]{|X'|}} = \frac{[\alpha u'(x) + \beta q(x)\, u(x)] \cdot \sqrt[4]{|\dot{x}|}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(x)}} +$$

$$+ \frac{\beta^2}{2} \frac{[\alpha u(x) + \beta u'(x)] \cdot q'(x) \sqrt[4]{|\dot{x}|}}{\sqrt{[\alpha^2 - \beta^2 q(x)]^3}} - \frac{\varepsilon}{4} \frac{\alpha u(x) + \beta u'(x)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q(x)}} \cdot \frac{\ddot{x}}{\dot{x} \sqrt{|\dot{x}|}\, \sqrt[4]{|\dot{x}|}},$$

où $\varepsilon = \operatorname{sgn} X_0' = \operatorname{sgn} x_0$.

En effet, nous obtenons ces équations de la formule 5. (3) et de sa dérivée, tenant compte des équations (τ). La fonction 5. (3):

$$(\alpha u + \beta u')\, (\alpha^2 - \beta^2 q)^{-\frac{1}{2}} = [\gamma U(X) + \delta U'(X)] \cdot [\gamma^2 - \delta^2 Q(X)]^{-\frac{1}{2}} \cdot |X'|^{-\frac{1}{2}}$$

possède la dérivée

$$\begin{aligned}
&(\alpha u' + \beta q u)\, (\alpha^2 - \beta^2 q)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\beta^2(\alpha u + \alpha u')\, (\alpha^2 - \beta^2 q)^{-\frac{3}{2}} \cdot q' = \\
&= [\gamma U'(X) + \delta Q(X)\, U(X)] \cdot [\gamma^2 - \delta^2 Q(X)]^{-\frac{1}{2}} \cdot |X'|^{-\frac{1}{2}} \cdot X' + \\
&+ [\gamma U(X) + \delta U'(X)] \cdot \{\tfrac{1}{2}\delta^2 [\gamma^2 - \delta^2 Q(X)]^{-\frac{3}{2}} \cdot Q'(X) \cdot |X'|^{-\frac{1}{2}} \cdot X' - \\
&- \tfrac{1}{2}[\gamma^2 - \delta^2 Q(X)]^{-\frac{1}{2}} \cdot |X'|^{-\frac{1}{2}} \cdot X'^{-1} \cdot X''\}.
\end{aligned}$$

Les formules (10) nous obtenons par un calcul direct.

6. L'existence et l'unicité des intégrales de l'équation différentielle non linéaire du 3-ème ordre.

Dans cet alinéa nous prouverons le théorème sur l'existence et l'unicité des intégrales de l'équation différentielle $(Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$, nous mentionnerons les intervalles des intégrales les plus larges de cette équation différentielle et de leurs fonctions inverses et nous examinerons la transformation de deux intégrales données des équations associées (q_1) et (Q_1).

Ces théorèmes découlent immédiatement des théorèmes analogues prouvées dans le mémoire [2], appliqués aux équations associées (q_1) et (Q_1), si nous servons des amplitudes et des phases telles qu'on les a définies dans le troisième alinéa de la première partie. C'est pour cette raison que nous ne faisons pas les démonstrations des théorèmes.

1. Théorème de l'existence et de l'unicité.

Soient $t_0 \in j$; $X_0 \in J$, X'_0 $(\neq 0)$, X''_0 *nombres arbitraires. Il existe une seule intégrale* $X(t)$ *de l'équation différentielle* $(Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$:

$$\sqrt{|X'|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{|X'|}}\right)'' + X'^2 \, . \, Q_1(X) = q_1(t),$$

où

$$Q_1(X) = Q(X) + \frac{3}{4}\,\delta^4 \frac{Q'^2(X)}{[\gamma^2 - \delta^2 Q(X)]^2} + \frac{1}{2}\,\delta^2 \frac{Q''(X)}{\gamma^2 - \delta^2 Q(X)} + \gamma\delta \frac{Q'(X)}{\gamma^2 - \delta^2 Q(X)};$$

$$q_1(t) = q(t) + \frac{3}{4}\,\beta^4 \frac{q'^2(t)}{[\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^2} + \frac{1}{2}\,\beta^2 \frac{q''(t)}{\alpha^2 - \beta^2 q(t)} + \alpha\beta \frac{q'(t)}{\alpha^2 - \beta^2 q(t)},$$

définie dans l'intervalle ouvert i qui remplit les conditions initiales cauchyennes $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X'_0$, $X''(t_0) = X''_0$ *et qui est la plus large, c'est-à-dire que chaque intégrale de l'équation différentielle* $(Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$ *vérifiant les mêmes conditions initiales, en fait partie.*

Soient U, V *deux intégrales arbitraires de l'équation différentielle* (Q), *linéairement indépendentes, définies dans l'intervalle* J; *soit* u, v *deux intégrales de l'équation différentielle* (q) *définies dans* j *et déterminées par les conditions initiales cauchyennes*

$$\begin{aligned}
u(t_0) &= [\alpha^2 - \beta^2 q(t_0)]^{-\frac{1}{2}} \, . \, [\gamma^2 - \delta^2 Q(X_0)]^{-\frac{1}{2}} \, . \, |X'_0|^{-\frac{1}{2}} \, . \, D_1(UX, t_0),\\
u'(t_0) &= [\alpha^2 - \beta^2 q(t_0)]^{-\frac{1}{2}} \, . \, [\gamma^2 - \delta^2 Q(X_0)]^{-\frac{1}{2}} \, . \, |X'_0|^{-\frac{1}{2}} \, . \, D_2(UX, t_0),\\
v(t_0) &= [\alpha^2 - \beta^2 q(t_0)]^{-\frac{1}{2}} \, . \, [\gamma^2 - \delta^2 Q(X_0)]^{-\frac{1}{2}} \, . \, |X'_0|^{-\frac{1}{2}} \, . \, D_1(VX, t_0),\\
v'(t_0) &= [\alpha^2 - \beta^2 q(t_0)]^{-\frac{1}{2}} \, . \, [\gamma^2 - \delta^2 Q(X_0)]^{-\frac{1}{2}} \, . \, |X'_0|^{-\frac{1}{2}} \, . \, D_2(VX, t_0),
\end{aligned} \tag{1}$$

où D_1, D_2 *sont les déterminant définis par* 5. (1) *et* 5. (2), *puis, soient* P, ϱ *les amplitudes de ces couples ordonnés d'intégrales*

$$P = \sqrt{(\gamma U + \delta U')^2 + (\gamma V + \delta V')^2}, \qquad \varrho = \sqrt{(\alpha u + \beta u')^2 + (\alpha v + \beta v')^2}.$$

Alors, l'intégrale $X(t)$ *est identique avec la plus large intégrale (unique) de l'équation différentielle du premier ordre à variables séparées*

$$X' = \operatorname{sgn} X'_0 \cdot \frac{P^2(X)}{\gamma^2 - \delta^2 Q(X)} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2 q(t)}{\varrho^2(t),}, \tag{2}$$

qui en t_0 *est égal à* X_0.

2. Les intervalles de définition des intégrales les plus larges et de leurs fonctions inverses.

a) Laissons en vigueur les signes précedents. Pour raccourcir, posons $\varepsilon = \operatorname{sgn} X'_0$ dans ce qui suit. Nous écrirons les relations entre les intervalles i, I qui sont les intervalles de définition de l'intégrale la plus large $X \in (Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$, qui en nombre $t_0 \in j$ est égale à $X_0 \in J$ et de sa fonction inverse x.

En conséquence du théorème de l'unicité et de l'existence et des formules 6.(1) et 6.(2) nous bornons aux couples d'intégrales $U, V \in (Q)$ et $u, v \in (q)$ qui vérifient les conditions

$$\gamma U(X_0) + \delta U'(X_0) = 0, \quad W = -1; \quad \alpha u(t_0) + \beta u'(t_0) = 0, \quad w = -\varepsilon. \quad (1)$$

Dans ces suppositions la phase $\varphi(\Phi)$ du couple ordonné des intégrales u, v (U, V) avec la base $[\alpha, \beta]$ $([\gamma, \delta])$ est zéro en t_0 (X_0).

La fonction $\varphi(\Phi)$ est définie dans j (J). Elle est, dans cet intervalle la seule fonction continue qui s'annule en $t_0(X_0)$ et dont les valeurs sont celles de convenables branches de la fonction $\operatorname{arctg} \dfrac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\alpha v(t) + \beta v'(t)}$ $\left(\operatorname{arctg} \dfrac{\gamma U(T) + \delta U'(T)}{\gamma V(T) + \delta V'(T)}\right)$.

La fonction $\varepsilon\varphi(\Phi)$ est toujour croissante. Elle est égale à $\pi, 2\pi, \ldots (-\pi, -2\pi, \ldots)$ précisément en nombres conjugués par rapport à la base $[\alpha, \beta]$ $([\gamma, \delta])$ avec le nombre t_0 (X_0) et situés à droit (à gauche) de t_0 (X_0) et dont le nombre est égal au nombre des nombres conjugués dans l'intérvale j (J).

La fonction $\varepsilon\varphi(\Phi)$ possède partout la dérivée $\varepsilon\varphi'(t) = [\alpha^2 - \beta^2 q(t)] \,.\, \varrho^{-2}(t)$ $(\Phi'(t) = [\gamma^2 - \delta^2 Q(T)] \,.\, P^2(T))$, ainsi que nous avons pour $t \in j$ $(T \in J)$

$$\varepsilon\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} [\alpha^2 - \beta^2 q(\tau)] \,.\, \varrho^{-2}(\tau) \,.\, d\tau; \qquad \Phi(T) = \int_{X_0}^{X} [\gamma^2 - \delta^2 Q(\tau)] \,.\, P^{-2}(\tau) \,.\, d\tau.$$

Désignons k (K) l'intérvalle ouvert formé par les valeurs de la fonction $\varphi(\Phi)$. L'intersection des deux intervalles $k \cap K$ est l'intervalle ouvert qui contient le zéro.

Le théorème suivant a lieu: *L'intervalle i (I) est l'image de l'intervalle $k \cap K$ dans la transformation par la fonction inverse de φ (Φ) et spécialement t_0 (T_0) est l'image de zéro.*

Désignons n_1 (N_1) le nombre des nombres conjugués avec le nombre $t_0(X_0)$ par rapport à la base $[\alpha, \beta]$ $([\gamma, \delta])$, situés dans l'intervalle j (J) à droite de $t_0(X_0)$. Analoguement soit n_2 (N_2) le nombre des nombres conjugués avec $t_0(X_0)$ par rapport à la base $[\alpha, \beta]$ $([\gamma, \delta])$ et situés à gauche de t_0 (X_0) dans l'intervalle j (J). Ces nombres sont $0, \infty$ dans les cas extrêmes. Enfin posons $\nu_1 = \min(n_1, N_1)$, $\nu_2 = \min(n_2, N_2)$, $\mu_1 = \min(n_2, N_1)$, $\mu_2 = \min(n_1, N_2)$.

Le théorème suivant a lieu: *Dans le cas $\varepsilon = 1$, les intervalles i, I contiennent précisément ν_1 (ν_2) nombres conjugués avec t_0, X_0 situés à droite (à gauche) de t_0, X_0. Ces intervalles peuvent être élargis jusqu'aux intervalles j, J en ce sens: ou bien le point extrême à droite (à gauche) de l'intervalle i est identique avec celui de l'intervalle j ou bien le point extrême à droite (à gauche) de l'intervalle J est identique avec celui de l'intervalle I; dans ces deux alternatives l'une exclue l'autre. Dans le cas $\varepsilon = -1$, les intervalles i, I contiennent précisément μ_1 (μ_2) nombres conjugués avec t_0, X_0 situés à gauche (à droite) de t_0 et à droite (à gauche) de X_0. Ces intervalles peuvent être élargis jusqu'aux intervalles j, J en ce sens: ou bien le point extrême à gauche (à droite) de l'intervalle i est identique avec celui de l'intervalle j ou bien le point extrême à droite* *(à gauche) de l'intervalle I est identique avec celui de l'intervalle J; dans ces deux alternatives, l'une exclue l'autre.*

3. Les équations explicites pour l'intégrale la plus large $X \in (Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$ et de sa fonction inverse x.

Désignons par φ^{-1}, Φ^{-1} les fonctions inverses de φ, Φ. Comme l'équation $\varphi(t) = \Phi(T)$ admet pour $t \in I$ la solution $T = X(t)$, elle admet aussi pour $T \in I$ la solution $t = x(T)$.

De là il est manifeste que l'intégrale la plus large $X \in (Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$ verifiante les conditions initiales $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X'_0 \neq 0$, $X''(t_0) = X''_0$ et sa fonction inverse x s'expriment par les formules

$$X(t) = \Phi^{-1}[\varphi(t)]; \qquad x(T) = \varphi^{-1}[\Phi(T)],$$

valables dans l'intervalle I. Remarquons que φ (Φ) est la phase du couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes $u, v \in (q)$ ($U, V \in (Q)$) par rapport à la base $[\alpha, \beta]$ ($[\gamma, \delta]$), s'annulant en nombre t_0 (X_0). Les intégrales u, v (U, V) vérifient les conditions 6.(1).

4. La transformation réciproque de deux intégrales données des équations différentielles (q), (Q).

Le théorème suivant a lieu: *Prenons deux intégrales arbitraires $u \in (q)$, $U \in (Q)$ et deux nombres arbitraires $t_0 \in j$, $X_0 \in J$. Nous exigeons que les intégrales remplissent la même condition, exprimée où bien par la condition* a) *où bien par la condition* b) *comme suit:*

$$a) \ \alpha u(t_0) + \beta u'(t_0) \neq 0 \neq \gamma U(X_0) + \delta U'(X_0);$$
$$b) \ \alpha u(t_0) + \beta u'(t_0) = 0 = \gamma U(X_0) + \delta U'(X_0).$$

Dans ce cas existent toujours les intégrales les plus larges $X \in (Q; \gamma, \delta; q; \alpha, \beta)$, égales à X_0 en nombre t_0 et qui transforment, dans leure intervalles de définition, les intégrales u, U ainsi que leurs dérivées, suivant les formules

$$u(t) = \eta \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\gamma^2 - \delta^2 QX(t)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\, X'(t) \,|^{-\frac{1}{2}} \,.\, D_1(UX, t), \qquad (3)$$

$$u'(t) = \eta \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, [\gamma^2 - \delta^2 QX(t)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\, X'(t) \,|^{-\frac{1}{2}} \,.\, D_2(UX, t), \qquad (4)$$

$$[\alpha u(t) + \beta u'(t)] \,.\, [\alpha^2 - \beta^2 q(t)]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \eta \,.\, [\gamma UX(t) + \delta U'X(t)] \,.\, [\gamma^2 - \delta^2 QX(t)]^{-\frac{1}{2}} \,.\, |\, X'(t) \,|^{-\frac{1}{2}}. \qquad (5)$$

Dans le cas a) *existe précisément une intégrale X qui est croissante et précisément une qui est décroissante. Dans le cas* b) *existe une infinité d'intégrales qui dépendent d'un paramètre et qui sont croissantes et ainsi de même de celles qui sont décroissantes.*

Ici indiquent $D_1(UX, t)$, $D_2(UX, t)$ les déterminants enoncés dans le théorème 5.1. *et η dans les deux cas désigne le nombre ± 1 et il est determiné par les formules*

a) $\eta = \operatorname{sgn} \{[\alpha u(t_0) + \beta u'(t_0)] \,.\, [\gamma U(X_0) + \delta U'(X_0)]\}$,

$$\eta = \begin{cases} \operatorname{sgn} \{[\alpha u'(t_0) + \beta q(t_0)\, u(t_0)] \,.\, [\gamma U'(X_0) + \delta Q(X_0)\, U(X_0)]\} \\ \quad \textit{pour les intégrales croissantes,} \\ -\operatorname{sgn} \{[\alpha u'(t_0) + \beta q(t_0)\, u(t_0)] \,.\, [\gamma U'(X_0) + \delta Q(X_0)\, U(X_0)]\} \end{cases}$$

pour les intégrales décroissantes.

La preuve se fait d'abord pour la formule (5) analoguement comme dans [2]. Les formules (3) et (4) on obtient de (5) et de ses dérivées en calculant $u(t)$ et $u'(t)$.

LITERATURE

[1] *O. Borůvka:* Sur les intégrales oscillatoires des équations différentielles linéaires du second ordre, Czech. Math. Journ. 3 (78), Praha 1753. (En russe. Resumé français.)

[2] *O. Borůvka:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles ordinaires du second ordre, Annali di matematica pura ed applicata, Serie IV, T. XLI, Bologna 1956.

[3] *E. E. Kummer:* De generali guadam equatione differentiali tertii ordinis, Programme de lycée à Liegnitz 1834; Journal de Crelle, Vol. 100, 1887.

[4] *E. Pinney:* The non linear differential equation, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 1, 1950, p. 681.

Shrnutí

PRŮVODNÍ ROVNICE V TEORII TRANSFORMACÍ OBYČEJNÝCH LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 2. ŘÁDU

MIROSLAV LAITOCH

Diferenciální rovnici

(q_1) $$y'' = q_1(t) \,.\, y,$$

kde $q_1 = q + \alpha\beta q'(\alpha^2 - \beta^2 q)^{-1} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q} \,.\, \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q}}\right)''$ nazýváme průvodní rovnicí k diferenciální rovnici

(q) $$y'' = q(t) \,.\, y$$

při bázi $[\alpha, \beta]$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Aplikujeme-li na průvodní rovnici (q_1) Borůvkovu teorii transformací integrálů, dostaneme obecné výsledky, které se týkají vlastností lineárních kombinací integrálů diferenciální rovnice (q) a jejich prvních derivací s konstantními koeficienty v sou-

vislosti s nelineárními diferenciálními rovnicemi 3. řádu. Z těchto výsledků se dostává teorie transformací integrálů diferenciální rovnice (q) jako zvláštní případ.

V této souvislosti se přichází k zobecnění pojmu fáze uspořádané dvojice řešení $\mu, v \in (q)$ a k zobecnění diferenciální rovnice amplitud.

Резюме

СОПРОВОДИТЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2. ПОРЯДКА

МИРОСЛАВ ЛАЙТОХ

Диф. ур-ние

(q_1) $$y'' = q_1(t) \cdot y,$$

где

$$q_1 = q + \alpha\beta q'(\alpha^2 - \beta^2 q)^{-1} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 q}}\right)''$$

называем сопроводительным ур-нием к диф. ур-нию

(q) $$y'' = q(t) \cdot y$$

при базисе $[\alpha, \beta]$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Если к сопроводительному ур-нию (q_1) применим теорию Борувки о преобразованиях интегралов, то получим общие результаты, касающиеся свойств линейных комбинаций интеграла диф. ур-ния (q) и его первой производной с постоянными коэффициентами в связи с определенными нелинейными диф. ур-ниями 3. порядка. Из этих результатов получается как частный случай теория преобразований интегралов.

В связи с этим переходим к обобщению понятия фазы упорядоченной пары интегралов $u, v \in (q)$ и диф. ур-ния амплитуд.