

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

František Havelka

Příspěvek k rýsování perspektivy objektu pomocí rastrů na základě trilineární
příbuznosti tří vzájemně orientovaných středových jeho projekcí

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
5 (1964), No. 1, 5--24

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119808>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1964

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to
digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain
these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped
with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics
Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Josef Metelka*

PŘÍSPĚVEK K RÝSOVÁNÍ PERSPEKTIVY OBJEKTU
POMOCÍ RASTRŮ NA ZÁKLADĚ TRILINEÁRNÍ PŘÍBUZNOSTI
TŘÍ VZÁJEMNĚ ORIENTOVANÝCH STŘEDOVÝCH
JEHO PROJEKCI

FRANTIŠEK HAVELKA
(Předloženo dne 31. srpna 1963)

1. Úvodní poznámky

Při studiu vývoje perspektivy zjišťujeme, že bylo při kreslení perspektivních obrazů záhy používáno sítě (dvojice svazků nebo osnov přímek, [7] obr. 34), později rastrů (zpravidla svazek přímek nebo osnova přímek a jejich kombinace narýsované na zvláštním papíře, obr. 13, 14) jako mechanických pomůcek k usnadnění práce. Je známo, že už **Albrecht Dürer** (1471—1528) použil čtvercových sítí při perspektivním kreslení předmětů podle skutečnosti [2], [7]. Myšlený perspektivní průmět v nákrešně π opatřil čtvercovou sítí upevněnou v rámci a zakresloval pak perspektivu do sítě další podobné této sítí v nákrešně.

V jiném smyslu užíval sítí při perspektivním kreslení **Leone Battista Alberti** (1404—1472) a **Lionardo da Vinci** (1452—1519). Byla to *sít perspektivní*, tj. perspektiva základní roviny Dürerovy soustavy (dlažby, pavimenta) rozdělená čtvercovou sítí [7].

V novější době užíli sítí a rastrů k mechanickému kreslení perspektiv zvláště **W. Körber**, jehož metodu zdokonalil **A. Reile** (1923) a užil jí k sestrojení perspektivního přístroje [9], dále **F. Gottlob** (1894), **H. W. Roberts** (1916) aj. [7].

U nás užil perspektivních sítí při výuce deskriptivní geometrii **profesor František Kadeřávek** a rastru **Artur Salner** při konstrukci svého perspektografu Prema [11]. Sítěmi jsou opatřena i některá perspektivní pravítka sloužící k usnadnění rýsování perspektiv [5], [6].

Sítě jsou konstruovány zpravidla pro dvojúběžníkovou perspektivu, tj. pro Dürerovu soustavu perspektivního promítání [6], řídčeji pro soustavu obecnou (trojúběžníkovou). Jejich konstrukce pro danou Dürerovu soustavu je celkem jednoduchá. Kreslí se perspektiva čtvercové sítě buď jen základní roviny, resp. jejího výseku, nebo čtvercové sítě tří rovin navzájem k sobě kolmých [7], [11]. Podrobnosti jsou dostatečně známy.

V literatuře i v praxi jsou uváděny přednosti i nedostatky kreslení perspektiv pomocí sítí. Z předností je na prvním místě snadnost a rychlost získání perspektivy objektu, z nedostatků se pak nejčastěji uvádí omezení individuality projevu kreslíče a projektanta, neboť sítě jsou sestrojeny pro určitou polohu oka vzhledem k objektu, pro určitou vzdálenost i výšku. Širšího upotřebení mohou nabýt rastry, zvláště rastry jednoduché (obr. 13), které lze snadno přizpůsobit různě volbě vzdálenosti zobrazení a výšky oka. Při užití těchto mechanických pomůcek k rýsování perspektiv záleží hlavně na tom,

- a) zdali je dána přednost pohodlnosti a rychlosti zhotovení perspektivy objektu bez ohledu na polohu středu zobrazení, nebo
- b) zdali je zdůrazněna vedle rychlosti sestrojení i poloha středu projekce podle individuálního názoru a potřeby.

V tomto článku je pojednáno a užití rastrů při konstrukci perspektiv na základě trilineární příbuznosti tří navzájem orientovaných středových projekcí, zvláště pak při nejnovějších uspořádáních rovin $^1\pi$, $^2\pi$, $^3\pi$ pravoúhlé soustavy v téže jedné rovině.

2. Trilineární příbuznost. Soustava Hauckova a Brauerova

Je známo, že druhá polovina 19. stol., zvláště 70. – 90. léta, přinesla nové podněty a myšlenky na poli teorie a konstrukce perspektivních přístrojů a mechanických perspektivních pomůcek. Od těchto let zájem o mechanické konstrukce perspektiv už neutuchá, jak je potvrzeno četnou literaturou a výrobou těchto mechanismů.

Lze soudit, že zde působily i ekonomické podmínky a potřeby praxe. Byly stupňovány požadavky na perspektivní kreslení při zhotovování plánů a návrhů zvláště v některých druzích výroby. Úkolem teorie pak bylo najít prostředky k usnadnění rýsování perspektivních obrazů, které je, jak známo, značně pracné a zdoluhavé. Plněním tohoto úkolu získává teorie často jistý předstih před praxí, tj. dospívá k poznatkům, které nejsou zatím uplatněny v praxi, nemají v ní svůj materiální model. Stává se, že je lze prakticky aplikovat později, po případě i v jiných oborech praktické činnosti na pohled i značně odlehlých. Co se týče deskriptivní geometrie a perspektivy jde např. o předstih teoretických poznatků o kolíneární příbuznosti a jejím zvláštním případě, perspektivní kolíneaci, které s aplikacemi perspektivy bezprostředně souvisí. (Fresnayova konstrukce, [5], [6]). Naproti tomu jde o předstih i v jiných odvětvích matematiky, od perspektivy vzdálených, např. trilineárních vztahů a příbuzností, které zkoumali analyticky i synteticky Rosanes, Schubert, B. Klein aj. a které právě v perspektivě a v konstrukci nových perspektivních přístrojů uvedeného období našly svůj materiální model. Stalo se to zásluhou **Quida Haucka**, profesora techniky v Berlíně, který zde aplikoval teoretické poznatky získané uvedenými matematiky [4]. Ukazuje, že mezi třemi průměry bodů prostorového objektu z tří daných středů 1O , 2O , 3O do tří daných rovin $^1\pi$, $^2\pi$, $^3\pi$ tvořících

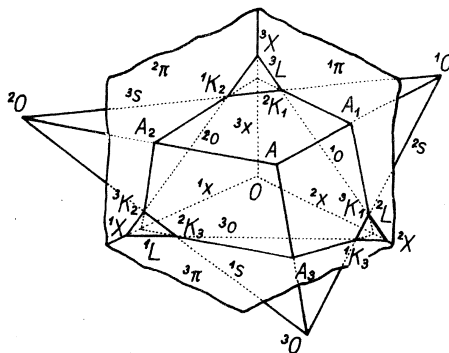
báze tří středových projekcí $({}^1O, {}^1\pi)$, $({}^2O, {}^2\pi)$, $({}^3O, {}^3\pi)$ je lineární bodová příbuznost a dochází ke konstrukci jednoho průmětu z obou ostatních průmětů na základě fundamentální věty po něm nazvané [6]. Je možno též říci, že Hauck dochází k poznatku, že oba průměty prostorového objektu z obou daných středů ${}^1O, {}^2O$ do daných rovin ${}^1\pi, {}^2\pi$, splňujících určité podmínky, tvoří zobrazení jednojednoznačné (ekvivalentní s originálem) a tím je třetí průmět v třetí projekci $({}^3O, {}^3\pi)$ jednoznačně stanoven.

Uvažujme tři roviny ${}^1\pi, {}^2\pi, {}^3\pi$ od sebe různé, mající právě jeden společný vlastní bod O a protínající se po dvou v přímkách ${}^2x, {}^2x, {}^1x$, které označíme indexem roviny, s kterou nejsou incidentní. Budtež dále dány tři od sebe různé body neležící v přímce, ${}^1O, {}^2O, {}^3O, {}^1O \in {}^1\pi, {}^2O \in {}^2\pi, {}^3O \in {}^3\pi$, při čemž se středně ${}^1O{}^2O, {}^2O{}^3O, {}^3O{}^1O$ neprotínají po řadě se základnicemi ${}^2x, {}^1x, {}^2x$. Dané body určují právě jednu rovinu $\varrho = ({}^1O{}^2O{}^3O)$. Obr. 1.

Danými třemi rovinami a body jsou definována tři středová promítání uvedená dříve (obr. 1 ve volném rovnoběžném promítání). Středně ${}^1O{}^2O, {}^2O{}^3O, {}^3O{}^1O$ určují v rovinách ${}^1\pi, {}^2\pi, {}^3\pi; {}^2\pi, {}^3\pi, {}^1\pi$ uzlové body ${}^2K_1, {}^1K_2, {}^3K_2, {}^2K_3, {}^1K_3, {}^3K_1$ [6], které jsou po dvou incidentní s průsečnicemi ${}^1o, {}^2o, {}^3o$ roviny ϱ s danými rovinami ${}^1\pi, {}^2\pi, {}^3\pi: {}^1o \equiv {}^2K_1{}^3K_1, {}^2o \equiv {}^1K_2{}^3K_2, {}^3o \equiv {}^1K_3{}^2K_3$.

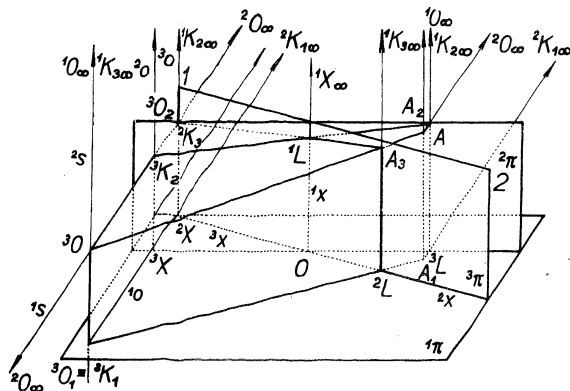
Nechť je dán bod A nikoli incidentní se středními ${}^1O{}^2O, {}^2O{}^3O, {}^3O{}^1O$. V daných třech středových promítáních se zobrazí trojicí bodů A_1, A_2, A_3 , z nichž dvojice $A_1, A_2; A_2, A_3; A_3, A_1$ splňují Hauckovu větu [6]. Platí následující věta.

Věta 2, 1. Průmět A_3 bodu A ze středů 3O do roviny ${}^3\pi$ je jednoznačně určen oběma průměty A_1, A_2 , jestliže oba tyto průměty splňují Hauckovu větu.



Obr. 1.

Důkaz. Volme libovolně průmět A_1 bodu A , při čemž platí: $A_1 \in {}^1\pi$, $A_1 \notin {}^1o$. Pro originál A platí: $A \in {}^1OA_1$. Druhý průmět A_2 bodu A je incidentní s ordinálou ${}^2L^1K_2$, kde ${}^2L = A_1^2K_1$. 2x podle Hauckovy věty a můžeme jej volit na této ordinále s výjimkou uzlového bodu 1K_2 . Originál A je incidentní s promítací přímkou 2OA_2 , je to tedy společný bod promítacích přímek 1OA_1 , 2OA_2 . Pro bod A platí: $A \notin \varrho$. Třetí průmět A_3 bodu A je vzhledem k průmětu A_1 incidentní s ordinálou ${}^2L^2K_3$, ${}^2L = A_1^2K_1$, 2x podle Hauckovy věty a vzhledem k průmětu A_2 je incidentní s ordinálou ${}^1L^2K_3$ (${}^1L = A_2^1K_2$, 1x) podle téže věty. Obě ordinály ${}^2L^2K_3$, ${}^1L^2K_3$ jsou incidentní s rovinou ${}^2\pi$, neboť vždy dva jejich body 2L , 1K_3 ; 1L , 2K_3 jsou s ${}^2\pi$ incidentní, jsou od sebe různé a určují právě jeden průsečík A_3 incidentní s přímkou A^2O , ebd.



Obr. 2.

Uvedené vztahy platí i v případě zvláštních poloh rovin ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, ${}^3\pi$ i středů promítání 1O , 2O , 3O , např. jsou-li ${}^1\pi \perp {}^2\pi$, ${}^1\pi \perp {}^3\pi$ a středů promítání ${}^1O_\infty$, ${}^2O_\infty$ jsou nevlátní body přímek kolmých k rovinám ${}^1\pi$, ${}^2\pi$. Jde zřejmě o Dürerovu soustavu (3O , $\varrho = {}^1\pi \perp {}^3\pi$) perspektivního promítání rozšířenou o další rovinu ${}^2\pi \perp {}^1\pi$ a o oba středů promítání ${}^1O_\infty$, ${}^2O_\infty$, která se uplatňuje při konstrukci perspektiv metodou průsečnou. První dvě promítání tvoří promítání Mongeovo, třetí je promítání středové. Tato trojice projekcí je znázorněna v obr. 2 (${}^2\pi \perp {}^1\pi$, ${}^2\pi \perp {}^1\pi$, ${}^2\pi \text{ non } \perp {}^3\pi$) a v obr. 6, kde jsou všechny tři dvojice rovin navzájem kolmé. V obr. 2 jsou třetí báze i příslušné průměty označeny indexem 3, v obr. 6 v třetí bázi (O , π) jsou průměty označeny jako středové průměty indexem c .

Rovina středů $\varrho = ({}^1O_\infty, {}^2O_\infty, {}^3O)$ je kolmá k základnici 2x , středně ${}^1O_\infty \perp {}^1\pi$,

${}^2O_\infty {}^3O \perp {}^2\pi$. Středná ${}^1O_\infty {}^2O_\infty$ je nevlastní přímka roviny středů q , a proto jsou uzlové body ${}^2K_{1\infty}, {}^1K_{2\infty}$ body nevlastní ${}^2K_{1\infty} \equiv {}^2O_\infty, {}^1K_{2\infty} \equiv {}^1O_\infty$. Taktéž uzlový bod ${}^1K_{3\infty}$ je bod nevlastní ${}^1K_{3\infty} \equiv {}^1O_\infty$.

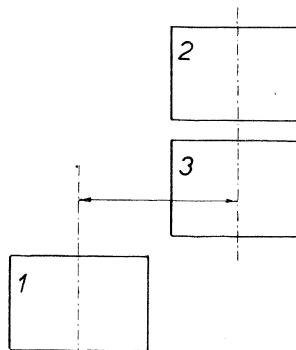
Středový průmět A_3 bodu A zobrazovaného útvaru je jednoznačně určen oběma průměty A_1, A_2 , z nichž A_1 můžeme volit v ${}^1\pi$ mimo ${}^1o \equiv {}^2K_{1\infty} {}^3K_1, A_2$ pak na ordinále ${}^3L {}^2K_{3\infty}$, kde ${}^3L \equiv A_2^2 K_{1\infty} \cdot {}^3x$. Originál A je pak dán společným bodem ${}^1O_\infty A_1, {}^2O_\infty A_2$. Průmět A_3 je průsečíkem ordinál ${}^1L {}^2K_3, {}^2L {}^1K_{3\infty}$, kde ${}^1L \equiv A_2^3 K_2 \cdot {}^1x, {}^2L \equiv A_1^2 K_1 \cdot {}^2x$. Je důležité, že přímky $A_2^3 K_2, A_1^2 K_1$ se protínají na ose 1x v bodě 1L , což odpovídá Hauckově větě pro dvojice $({}^2O, {}^2\pi), ({}^3O, {}^3\pi)$.

V obou případech vzájemné polohy rovin ${}^1\pi, {}^2\pi, {}^3\pi$ i středů promítání ${}^1O, {}^2O, {}^3O$, v poloze obecné (obr. 1) i speciální (obr. 2, 6) jde o zvláštní případ trilineární příbuznosti mezi danými rovinami, o *perspektivně trilineární příbuznost* těchto rovin. Tento vztah naznačený v obr. 2 je vhodný k zmechanisování, které provedl Quido Hauck sestrojením přístroje k rýsování perspektivy objektu z jeho Mongeových průmětů (1883). Byl jím zkonstruován první *perspektograf*, jímž je možno rýsovat perspektivu třírozměrného objektu ryze mechanicky a který předěil po teoretické stránce i mnohé perspektivní přístroje později sestrojené.

K tomu účelu uvádí Hauck roviny ${}^1\pi, {}^2\pi, {}^3\pi$ do téže jedné roviny. Perspektivní průmětnu ${}^2\pi$ otočí kolem přímky ${}^3O {}^2O_1$ půdorysně promítací středů 3O do polohy ${}^2\pi'$ rovnoběžné s druhou průmětnou ${}^2\pi$ (o úhel rovný odchylce obou rovin ${}^2\pi, {}^3\pi$). Obě roviny ${}^2\pi, {}^3\pi'$ sklopí kolem os ${}^2x, {}^2x' \parallel {}^3x$ do první průmětny a posune druhou průmětnu ${}^2\pi$ nad perspektivní průmětnu, aby se druhý průmět a perspektivní průmět nepřekrývaly. Tím nabudou průmětny vzájemné polohy naznačené v obr. 3. Vazba průmětů objektu při této vzájemné poloze průmětem vedla Haucka r. 1883 k sestrojení jeho perspektografu [3], [4], [7], [8], [12], [13], [15].

Z Hauckovy konstrukce je patrné, že jednotlivé body průmětů objektu jsou vázány na přímky svazků a přímky osy. Vzniká proto myšlenka nahradit tyto svazky přímek rastry (obr. 13, 14). Lze ukázat, že v tomto případě platí věta.

Věta 2, 2. *Konstrukce perspektivy objektu při ztotožnění průmětů podle Haucka lze provést pomocí tří rastrů, z nichž je jeden dvojdielný (obr. 14), a uviděním vztahu*



Obr. 3.

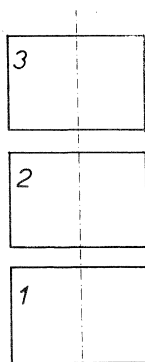
odpovídající si přímek rastrů. Středů příslušných svazků přímek rastrů jsou uzlové body 2K_3 , ${}^3K_2 \equiv {}^3O_2$, ${}^3K_1 \equiv {}^3O_1$ (obr. 2).

Důkaz správnosti věty vyplývá z Hauckovy konstrukce perspektiv, o níž se můžeme informovat v uvedené literatuře.

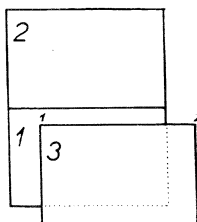
Hauckův perspektograf sestrojený na základě trilineárního vztahu byl počátečním stadiem řady dalších mechanických konstrukcí perspektiv a na jejich základě sestrojených perspektografů. Má mnohé nedostatky, z nichž některé se pokusil s úspěchem odstranit v r. 1896 E. Brauer, profesor techniky v Darmstadtu. Sestrojil dva perspektivní přístroje, z nichž první je zlepšením mechanismu Hauckova, druhý je vlastní jeho přístroj, konstruovaný o několik let později.

Brauerovo zlepšení Hauckovy konstrukce a jeho přístroje spočívá v jeho úpravě po technické stránce a ve způsobu ztotožnění průmětů. Geometrická teorie přístroje je táž. Perspektivní průmětnu ${}^2\pi$ otočí Brauer kolem osy 1x do druhé průmětny ${}^2\pi$ a obě ztotožněné průmětny sklopí pak kolem osy 2x do první průmětny ${}^1\pi$. Perspektivní průmětnu ${}^2\pi$ pak vysune ve směru ordinál Mongeovy projekce nad druhou průmětnu, aby se druhý průmět a průmět perspektivní nepřekrývaly. Průmětny ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, ${}^3\pi$ nabudou vzájemné polohy naznačené v obr. 4 [3], [16].

Při této Hauck–Brauerově úpravě průmětů platí věta obdobná předešlé větě 2. I zde musíme při konstrukci perspektivy pozorně sledovat odpovídající si přímky rastrů.



Obr. 4.



Obr. 5.

Po úspěšném zlepšení Hauckova přístroje se E. Brauer pokusil r. 1891 sestavit vlastní perspektograf, u něhož by byly odstraněny nebo zmírněny některé nevýhody Hauckovy a Hauck–Brauerovy konstrukce, zvláště složitost a značná cena. Nový perspektograf je konstruktivně jednodušší a proto levnější, vyskytly se však u něho jiné nedostatky, které jej činí nedokonalým. Teoretický základ přístroje je opět

trilineární vztah tří středových projekcí. Ztotožnění rovin ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, ${}^3\pi$ se liší od úprav v obou předešlých případech. Je provedeno v tomto sledu:

a) Perspektivní průmětna ${}^3\pi$ je otočena kolem přímky ${}^3O^3O_1$ půdorysně promítací středů 3O do polohy ${}^3\pi'$ rovnoběžné s druhou průmětnou ${}^2\pi$ jako v případě Hauckově.

b) Rovina ${}^2\pi$ je sklopena kolem osy 2x do průmětny ${}^1\pi$.

c) Rovina ${}^3\pi'$ je sklopena kolem její horní hrany 12 (obr. 2) do polohy rovnoběžné s první průmětnou ${}^1\pi$.

d) Takto sklopená rovina ${}^3\pi'$ je posunuta svisle do nepatrné vzdálenosti od obou splývajících průmětů ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, resp. do těchto rovin. Tím přejdou roviny ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, ${}^3\pi$ do vzájemné polohy naznačené v obr. 5. Vztah průmětů v této poloze průmětů je možno mechanisovat. Sestrojený přístroj, *perspektograf Brauerův*, je popsán v literatuře [17].

Rozeborem konstrukce lze ukázat, že perspektivu objektu lze mechanicky určit z obou ortogonálních průmětů pomocí tří rastrů, z nichž je jeden dvojdílný. Sledování přímků rastrů při konstrukci perspektivy se jeví jednodušší než v obou dříve uvedených případech. Při tomto sledování je nutno vést přímků daného směru a vytknout na ní úsečku dané velikosti.

Všechny uvedené mechanické konstrukce jsou založeny na vlastnostech trilineárního vztahu tří středových projekcí, jejichž obě roviny ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ jsou k sobě kolmé, perspektivní průmětna ${}^3\pi$ je kolmá jen k první průmětně ${}^1\pi$ (obr. 2). Přístroje k usnadnění rýsování perspektiv, které byly na základě těchto konstrukcí sestrojeny, vzbudily ve své době značnou pozornost, jsou to přístroje důmyslné a je nutno je ocenit. Myšlenka nahradit tyto mechanismy rastry nevede při ztotožnění průmětů uvedenými autory k výraznému zjednodušení konstrukce, jak se na počátku zdá, proto se jí dále nezabýváme.

Lze snadno ukázat, že k týmž důsledkům vede soustava, v níž je perspektivní průmětna kolmá k oběma rovinám ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, je-li ztotožnění průmětů provedeno podle Haucka a Brauera. V tomto případě tvoří základnice 1x , 2x , 3x pravouhlý trojhran. Kreslení perspektiv podle Haucka a Brauera pomocí rastrů se jen nepatrně zjednoduší.

3. Pravouhlá soustava (Mack, Salner)

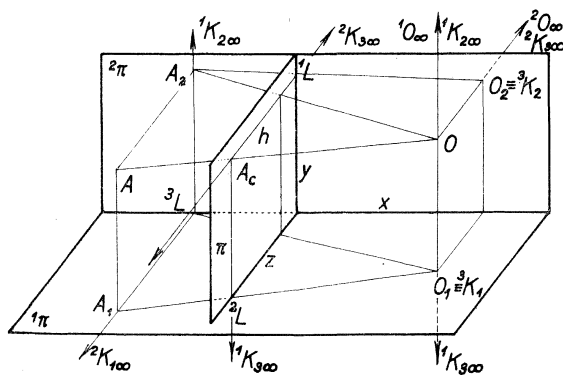
Pravouhlá soustava naznačená v obr. 6 vede však při jistém jiném uspořádání rovin ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, ${}^3\pi$ a při užití rastrů k značnému zjednodušení kreslení perspektiv. Této soustavy užil při svých konstrukcích perspektografů **Karel Mack** (1923) [14], a jiní autoři. Z českých konstruktérů se soustavou zabýval **Artur Salner** (1953) při konstrukci svého perspektivního přístroje *Prema*. Jako Hauck a Brauer uvedl průmětny ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, ${}^3\pi$ do téže roviny, učinil to však jiným způsobem. Perspektograf *Prema*, který byl na základě příslušných úvah sestrojen, je pozoruhodný jednak svou jednoduchostí vzhledem k mechanismům Haucka a Brauera, neboť pozůstává

z tří pravítek a nitě se závažím spojeným se známým rýsovacím přístrojem *Kinez*, jednak tím, že je při něm užito předem narysovaného rastru jednodílného (obr. 13) nebo dvojdílného (obr. 14). Tento rastr sa klade pod rýsovací papír a určuje částečně polohu perspektivy objektu vzhledem k vhodně umístěným jeho ortogonálním průmětům do rovin ${}^1\pi$, ${}^2\pi$. Přístroj je snadno ovladatelný a upotřebitelný po krátkém zácviku i neodborníky. Přístroj lze zařadit mezi nejzdařilejší perspektografy.

Perspektivy bodů objektu jsou podle Salnera sestrojeny na základě několika úvah a opatření, které nejsou v souvislosti s trilineární přibuzností trojice středových projekcí, nýbrž vyplývají autorovi z elementárních stereometrických vztahů mezi základními geometrickými prvky, body přímkami a rovinami [11]. Lze však ukázat, že ztotožnění průmětů ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, ${}^3\pi$ podle Salnera je výhodné při uvažování soustavy jako trilineárního vztahu mezi uvedenými třemi středovými projekcemi, pro něž je ${}^1\pi \perp {}^2\pi$, ${}^1\pi \perp {}^3\pi$, ${}^2\pi \perp {}^3\pi$. Lze dále pomocí trilineárního vztahu ukázat na překvapující důsledek, že je možno rýsovat perspektivy bez přístroje, jen pomocí dvou rastrů, při čemž je sledování přímků rastrů zřejmě a jednoduché. Dosáhneme se tím výrazného, neočekávaného zjednodušení konstrukce perspektivy z daných průmětů ortogonálních. To je další přednost této konstrukce.

Jelikož nebylo ještě o užití rastrů při konstrukci perspektiv z hlediska trilineární přibuznosti v literatuře pojednáno a protože se jeví konstrukce pomocí rastrů v tomto případě velmi výhodná, je uvedena v tomto článku obsáhlejší její teorie.

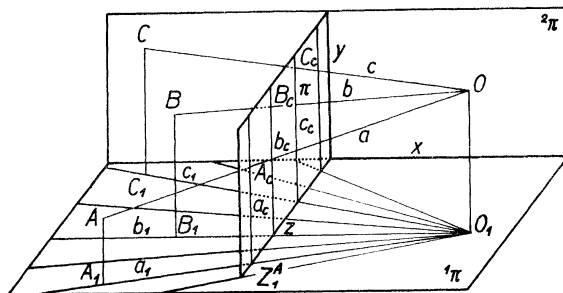
Necht' je dána uvedená speciální soustava tří středových projekcí tvořící soustavu trilineární (obr. 6). Středovou projekci (3O , ${}^3\pi$) budeme označovat prostě (O , π)



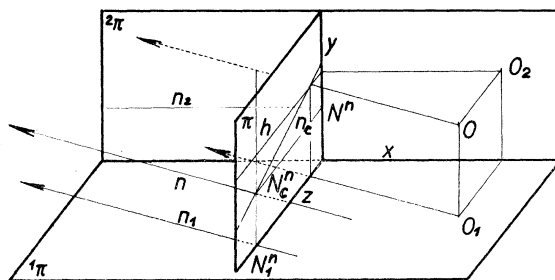
Obr. 6.

bez indexů. V ní je perspektiva A , bodu A dána jednoznačně ortogonálními průměty A_1, A_2 .

1. Uvažujme rovinu OO_1A (obr. 6). Podle základních pouček stereometrie má tato rovina několik vlastností. Je kolmá k první průmětně ${}^1\pi$, obsahuje promítací přímkou OA bodu A a je to tedy první průmětně promítací rovina přímkou OA . Obsahuje přímky $O_1A_1, A_1^2L \equiv a_1$, z nichž druhá, incidentní s perspektivní průmětnou, je kolmá k první průmětně ${}^1\pi$. Mění-li bod A svou polohu zvláště v horizontálních směrech a zaujme-li tedy polohu A, B, C, \dots , vytvářejí roviny $OO_1A, OO_1B, OO_1C, \dots$ svazek rovin o ose $OO_1 \perp {}^1\pi$. Jejich průsečnice s perspektivní průmětnou z tvoří soustavu rovnoběžných přímek a_1, b_1, c_1, \dots . Tyto přímky jsou incidentní



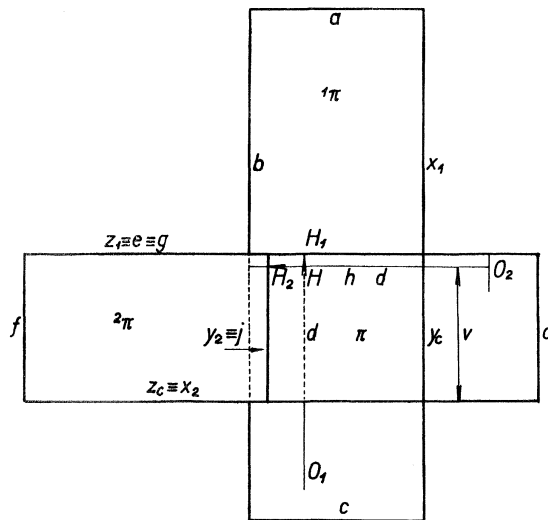
Obr. 7.



Obr. 8.

incidentních se základní rovinou $\varrho \equiv \pi$ i prostorových objektů s podstavou v této rovině. Salner nepoužívá nárysu O_2 středu zobrazení při konstrukci perspektivy a ani jej nerýsuje. Užívá jen hlavního bodu H a půdorysu O_1 středu zobrazení, distance a výšky oka.

Postup při sestavení perspektivy A , bodu A incidentního se základní rovinou $\varrho \equiv \pi$ daného půdorysem A_1 je tento (obr. 11, v obr. 7 je bod $A \in \pi$):



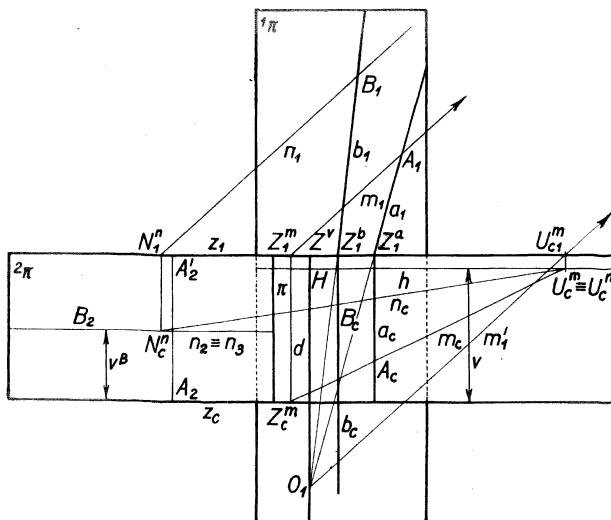
Obr. 10.

a) Promítací přímkou OA je proložena půdorysně promítací rovina $OO_1A \perp \pi$, která tuto průmětnu protíná v přímce $a_1 \equiv O_1A_1$. Její stopník v perspektivní průmětně je Z_1^a . S ním je incidentní perspektiva a_c přímkou a kolmá k základnici z_c . Hledaná perspektiva A_c bodu A je s a_c incidentní.

b) Ortogonálním průmětem A_1 bodu A (v daném případě oba splývají) je vedena libovolná přímka m , jejíž perspektiva m_c vytne na a_c hledanou perspektivu A_c . Tato perspektiva m_c je dána stopníkem Z^m přímky m , který se přemístěním průměten rozpadá ve dva body, Z_1^m, Z_c^m , pro něž zřejmě platí: $Z_1^m Z_c^m \perp z_1$, resp. $Z_1^m Z_c^m \perp z_c$.

Podle základních vlastností perspektivního zobrazení je první průmět U_{c1}^m úběžníku U^m přímkou m incidentní se základnicí z_1 a platí pro něj: $O_1 U_{c1}^m \parallel m_1$. Úběžník U^m sám je incidentní s horizontem h a zároveň incidentní s ordinálou $U_{c1}^m U_{c1}^n \perp h$.

Při sestavení perspektivy B_c bodu B , který není incidentní se základní rovinou 1π , nýbrž je ve výšce v^h od 1π a který je dán oběma ortogonálními průměty B_1, B_2 , si počínáme stejně (obr. 7, 11).



Obr. 11.

a) Sestrojíme půdorys $b_1 = O_1 B_1$ promítací přímkou $b \equiv OB$ bodu B , tj. stopu první průmětně promítací roviny bodu B . S jejím stopníkem $Z_1^m \in z_1$ je incidentní perspektiva b_c této promítací roviny. Hledaná perspektiva B_c bodu B je s b_c incidentní.

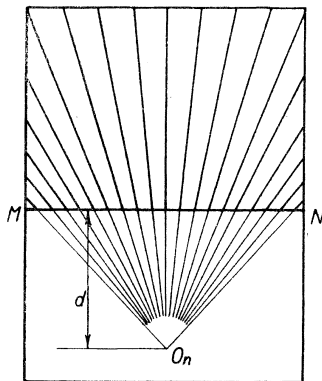
b) Vedeme bodem B vrstevní přímkou n první soustavy, tj. přímkou rovnoběžnou s rovinou 1π a zároveň rovnoběžnou s přímkou m (obr. 8, 11). Její první průmět n_1 je rovnoběžný s m_1 , její druhý průmět n_2 je rovnoběžný se základnicí $z_2 \equiv z_c$ (obr. 10): $n_1 \parallel m_1, n_2 \parallel (z_2 \equiv z_c)$. Tento její druhý průmět n_2 splývá při zavedeném uspořádání rovin soustavy s ortogonálním jejím průmětem n_3 do perspektivní průmětny π .

4. Právítko S posuvné po pravítku P pomocí objímky s vodorovnou ryskou zastupující nárys n_2 vrstevní přímky n první soustavy. Je opatřeno očkem, které zastupuje perspektivní stopník N_c^n vrstevní přímky n (obr. 12).

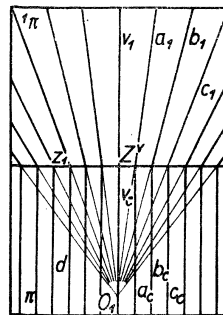
5. Nit n upevněnou v očku N_c^n vedenou přes kladku zastupující úběžník $U_c^n = U_c^n$ vrstevních přímek m, n, \dots daného směru. Nit je napínána závažím na zadní straně desky.

6. Jednoduchý (obr. 13), po případě dvojdílný tištěný nebo rýsovaný rastr představující průmětnu ${}^1\pi \equiv \pi$, rozdělený přímkou MN (základnicí z) na dvě části (obr. 14). Horní část obsahuje stopy a_1, b_1, c_1, \dots půdorysně promítacích rovin bodů zobrazeného předmětu (obr. 7) pro danou polohu půdorysu O_1 středu zobrazení, jehož vzdálenost O_1Z' od základnice z_1 je distance d zobrazení. Perspektivními stopníky těchto stop procházejí přímky a_c, b_c, c_c, \dots druhé části rastru, perspektivy promítacích rovin, rovnoběžné s vertikálou v . Rastry mohou být zhotoveny pro různou velikost distance d .

Konstrukce perspektivy M_c bodu M je znázorněna v obr. 12.



Obr. 13.



Obr. 14.

4. Návrh a zdůvodnění mechanické konstrukce perspektivy pomocí rastrů na základě trilineárního vztahu

Jak bylo už dříve uvedeno, je možno uvažovat vztah obou ortogonálních projekcí $({}^1O_\infty, {}^1\pi)$, $({}^2O_\infty, {}^2\pi)$ a perspektivního promítání (O, π) podle obr. 6 jako speciální případ trilineárního vztahu naznačeného dříve v obr. 1, po případě v obr. 2 a užít ho při novém návrhu mechanické konstrukce perspektiv pomocí rastrů. K tomu je

třeba připomenout Hauckovu větu [6] a aplikovat ji na dvojice uvedených projekcí. Uvažujeme po řadě tyto dvojice.

a) $({}^1O_\infty, {}^1\pi), ({}^2O_\infty, {}^2\pi)$. Oba uzlové body ${}^1K_{2\infty}, {}^2K_{1\infty}$ jako průsečky přímký středů ${}^1O_\infty, {}^2O_\infty$ s průmětnami ${}^1\pi, {}^2\pi$ jsou nevlastní body kolmic k základnici x incidentní s oběma průmětnami ${}^1\pi, {}^2\pi$. Tyto kolmice jsou uzlové přímky (ordinály) obou průmětů. V obr. 6 jsou sestrojeny pro bod A . Podle Hauckovy věty platí:

$$A_1{}^2K_{1x} \cdot A_2{}^1K_{2x} = {}^3L \subset x,$$

kde 3L je bod incidentní se základnicí x .

b) Dvojice $({}^1O_x, {}^1\pi), (O, \pi)$. Uzlové body této dvojice jsou: ${}^3K_1 = O_1 = O^1O_\infty \cdot {}^1\pi$.

$${}^1K_{3\infty} = O^1O_\infty \cdot \pi.$$

$A_1{}^3K_1, A_r{}^1K_{3\infty}$ jsou uzlové přímky, ordinály příslušné bodu A . Podle Hauckovy věty platí:

$$A_1{}^3K_1 \cdot A_r{}^1K_{3\infty} = {}^2L \in z.$$

c) Dvojice $({}^2O_x, {}^2\pi), (O, \pi)$. Uzlové body této dvojice jsou: ${}^3K_2 = O_2 = O^2O_\infty \cdot {}^2\pi$,

$${}^2K_{3\infty} = O^2O_\infty \cdot \pi.$$

$A_2{}^3K_2, A_r{}^2K_{3\infty}$ jsou ordinály příslušné bodu A . Platí pro ně:

$$A_2{}^3K_2 \cdot A_r{}^2K_{3\infty} = {}^1L \in y.$$

Na základě uvedených vztahů vyslovíme důležitou větu.

Věta 4.1. *Perspektiva A_r bodu A je incidentní s přímkami ${}^2L^3K_{3\infty}$, resp. ${}^1L^2K_{3\infty}$ rovnoběžnými se základnicemi $y = \pi$, ${}^2\pi$, resp. $z = \pi$, ${}^1\pi$ procházejícími body ${}^2L, {}^1L$, pro něž platí:*

$${}^2L = z \cdot A_1O_1, {}^1L = y \cdot A_2O_2.$$

Důkaz. (Obr. 6)

Podle odst. b) je: ${}^1K_{3\infty} = O^1O_\infty \cdot \pi$. Dále je:

$${}^2L^3K_{3\infty} = {}^2LA_r \parallel O^1O_\infty \parallel y \perp {}^1\pi.$$

Podle odst. c) je: ${}^2K_{3\infty} = O^2O_\infty \cdot \pi$. Dále je:

$${}^1L^2K_{3\infty} = {}^1LA_r \parallel O^2O_\infty \parallel z \perp {}^2\pi, \text{cbd.}$$

Pro uzlové přímky v rovinách ${}^1\pi, {}^2\pi, \pi$ platí věta.

Věta 4.2. *Uzlové přímky $A_1{}^3K_1, A_2{}^3K_2$ jsou ortogonální průměty promítací přímky OA do rovin ${}^1\pi, {}^2\pi$, uzlové přímky ${}^1K_{3\infty}A_r, {}^2K_{3\infty}A_r$ jsou rovnoběžné se základnicemi y , resp. z .*

Důkaz. Platí $O^1O_\infty \perp {}^1\pi, AA_1 \perp {}^1\pi$. Oběma těmito promítacími přímkami je určena rovina incidentní s promítací přímkou OA , kolmá k průmětně ${}^1\pi$.

Totéž platí o promítacích přímkách $O^2O_\infty \perp {}^2\pi, AA_2 \perp {}^2\pi$. Uzlové přímky ${}^1K_{3\infty}A_r, {}^2K_{3\infty}A_r$ incidentní s perspektivní průmětnou π jsou průsečnice obou zmíněných

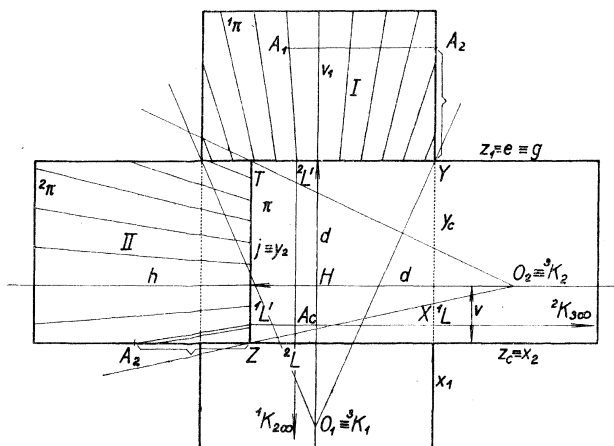
promítacích rovin s perspektivní průmětnou π a jsou podle vět elementární geometrie kolmé k průmětnám ${}^1\pi$, resp. ${}^2\pi$ a tedy rovnoběžné se základnicemi y, z .

Tím je správnost věty dokázána.

Na základě trilineárního vztahu a uvedených vět je možno navrhnout jednoduchou konstrukci perspektiv. Platí věta.

Věta 4, 3. *Jsou-li dány dva ortogonální průměty objektu, je možno sestavit jeho perspektivu*

a) *pomocí dvou jednoduchých rastrů a vedením dvou přímek.*



Obr. 15.

b) *Pomocí dvou rastrů, jednoho dvojdielného a jednoho jednoduchého a vedením jedné přímky nebo*

c) *pomocí dvou rastrů dvojdielných bez dalšího rýsování, pouze sledováním přímek rastrů.*

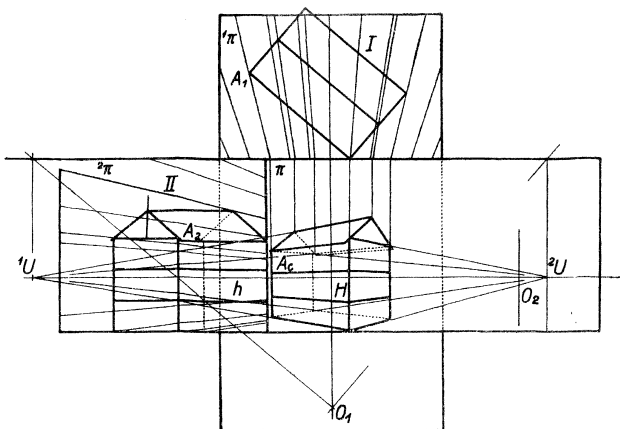
Důkaz správnosti věty provedeme poukazem na přemístění rovin soustavy a tím, že perspektivu A , bodu A určíme tak, jak věta uvádí.

Přemístěním rovin ${}^1\pi, {}^2\pi, \pi$ soustavy se základnice x, y, z rozpadnou v dvojici $x_1, x_2; y_2, y_1; z_1, z_2$, tak jak ukazují obr. 10, 15. Přitom index označuje incidenci základnice s příslušnou průmětnou, např. $x_1 \in {}^1\pi, z_2 \in \pi, \dots$

Konstrukci perspektivy A , bodu A daného oběma ortogonálními průměty A_1, A_2 provedeme takto:

1. Zvolíme rozměry a polohu náčrtny $\pi \equiv XYTZ$ se základnicí $z_c \equiv XZ$, horizontem h a hlavním bodem H , které udávají výšku středu zobrazení $v = z_c - h$. Přímky XY, YT, TZ, ZX (okraje náčrtny) vezmeme za základnice $y_c, z_1 \equiv e \equiv y, y_2 \equiv j, z_c \equiv x_2$ (obr. 10, 15).

2. Umístíme rastr I (obr. 13), jehož přímkou MN vzhledem k O_1 je určena distance zobrazení, $d = O_1 - MN$ tak, aby přímka MN splýnula s okrajem $YT \equiv z_1$ náčrtny



Obr. 16.

(perspektivní průměty) π . Přitom je hlavní přímka rastru kolná k MN incidentní s hlavním bodem H , splývá tedy s hlavní vertikálou. Shodný rastr položíme do polohy II , aby jeho strana MN splýnula s okrajem $TZ \equiv j \equiv y_2$ perspektivní průměty a aby hlavní přímka rastru ortogonální k TZ splýnula s horizontem (obr. 15, 16).

3. Umístíme oba ortogonální průměty A_1, A_2 bodu A v náležité poloze v ${}^1\pi$ i co se týče jeho výšky nad ${}^1\pi$ (obr. 15). Nechť je bod A např. incidentní s ${}^1\pi$. Pro jeho průměty platí: $A_1 - z_1 = A_2 Y = A_2 Z = A_2 - TZ \equiv j \equiv y_2$.

4. Vytkneme přímkou rastru I incidentní s půdorysem A_1 , jejímž průsečíkem ${}^2L'$ se základnicí z_1 vedeme rovnoběžku ${}^2L'A_c$ se základnicí $y_2 \parallel y_c$. Je to uzlová přímka

${}^1K_{3 \times \infty} A_c \equiv {}^2LA_c \equiv {}^2L'A_c$, s níž je incidentní hledaná perspektiva A_c bodu A . Podobně vytkneme přímkou rastru II incidentní s nárysem A_2 a jejím průsečíkem ${}^1L'$ se stranou $j \equiv y_2$ vedeme rovnoběžku ${}^1L'A_c$ se základnicí $z_c \equiv x_2$. Tato přímkou ${}^1L'A_c \equiv {}^1LA_c \parallel z_c$ je uzlová přímkou ${}^2K_{3 \times \infty} A_c$, s níž je perspektiva A_c incidentní. Obě tyto rovnoběžky určují perspektivu A_c bodu A , cbd.

Při kreslení perspektivy prostorového objektu daného oběma ortogonálními průměty umístíme tyto průměty, aby byly pro odpovídající si body splněny rovnosti uvedené výše. Konstrukce perspektiv jednotlivých bodů objektu je stejná jako dříve.

a) Vodorovné a svislé uzlové přímkou je možno rýsovat pomocí pravouhlého pravitka nasazeného na kreslicí přístroj Kinex pouhým posouváním hlavice přístroje.

b) Jestliže uijeme např. dvojdielného rastru I , tj. soustavy stop první průmětné promítacích rovin i soustavy příslušných průsečnic těchto rovin s perspektivní průmětnou, pak stačí rýsovat jen vodorovné přímkou příslušné přímkám rastru II . V tom případě stačí k rýsování příložník posunovaný po levé hraně rýsovací desky, cbd.

c) Jestliže uijeme dvou dvojdielných rastrů, stačí k určení perspektivy bodů jen sledování přímek těchto rastrů a vytýkání jejich průsečíků. Perspektivy jednotlivých bodů obdržíme tedy bez rýsování, cbd.

Tato metoda má jen tu nevýhodu, že soustavy rovnoběžných přímek obou rastrů se křížují, znak je při jejich sledování namáhán a při menší pozornosti může snadno dojít k omylu.

V obr. 16 je sestrojena perspektiva jednoduchého předmětu pomocí rastrů I, II ve všech případech a), b), c).

Tím je správnost poslední věty dokázána.

LITERATURA

- [1] *Kazimierz Bartel*: Perspektywa malarska, Warszawa 1955
- [2] *Albrecht Dürer*: Vnderweysung der messung... Nürnberg 1525
- [3] *Walther Dyck*: Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892
- [4] Festschrift der königlichen techn. Hochschule zu Berlin, Berlin 1884
- [5] *František Havelka*: Některé speciální případy Fresnayeovy mechanické konstrukce perspektiv, Acta Univers. Palackianae Olomucensis 1961
- [6] *František Havelka*: Teorie Dürerovy soustavy..., Acta Univers. Palackianae Olomucensis 1962
- [7] *František Kadeřávek*: Perspektiva, Praha 1922
- [8] *Le Colonel A. Laussedat*: Recherches sur les instruments, Gauthier—Villard, Paris 1898, 1903
- [9] *Adolf Reile*: Die neue Perspektive des Architekten, Stuttgart 1933
- [10] *H. W. Roberts*: Architectural Sketching and Drawing in Perspective. Londýn 1916
- [11] *Artur Salner*: Prostorové zobrazování ve strojnictví, Praha 1954
- [12] *Georg Scheffers*: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, J. Springer Berlin 1920
- [13] Journal für reine u. angewandte Mathematik, roč. 95 (1883)

- [14] Sitzungsberichte. Akademie der Wissenschaften in Wien.
 Oddíl IIa, roč. 127 (1918), 1. sešit,
 oddíl IIa, roč. 131 (1922), 1. sešit.
- [15] Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin 1883.
- [16] Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, roč. 35 (1891).
- [17] Zeitschrift für Mathematik und Physik, roč. 43 (1898).

Резюме

К ЧЕРЧЕНИЮ ПЕРСПЕКТИВ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ РАСТРОВ НА ОСНОВЕ ТРИЛИНЕАРНОЙ РОДСТВЕННОСТИ ЕГО ТРЕХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

ФРАНТИШЕК ГАВЕЛКА

При черчении перспективных изображений предметов довольно давно использовались сети (Strahlennetz), позднее также и растры. Известно, что сетями пользовались уже *А. Дюрер*, *Леонардо да Винчи* и др. В новейшее время *В. Кёрбер*, *А. Рейле*, *Г. В. Роберте* и другие. У нас воспользовался сетями при черчении перспектив *Франц. Кадержавек*, растром воспользовался *А. Сальнер* при черчении перспектив своим перспектографом *Према*.

В этой статье указывается, что перспективу объекта можно сконструировать без аппарата Према, только с помощью двух растров на основе трилинеарного отношения трёх ориентированных центральных проекций.

Кратко разбираются это трилинеарное отношение и аппараты конструированные *О. Гауком*, *Э. Брауером* и др. на основе этого отношения и возможность этих конструкций с помощью растров. Указывается, что техническая конструкция Сальнера, основой которой служат элементарные стереометрические отношения, является самой подходящей для конструирования перспективы объекта из его ортогональных проекций при помощи растров. Высказывается важная теорема и доказывается её правильность:

Если имеются две ортогональные проекции объекта, можно сконструировать его перспективу при распределении Сальнера плоскостей

а) при помощи двух простых растров (изобр. 13) и проведением двух прямых,

б) при помощи двух растров, одного двойного (состоящего из двух частей) и одного простого и начерчением одной прямой (изобр. 14),

в) только с помощью двух двойных растров.

Положение растров можно приспособить данной дистанции и высоте глаза. Черчение перспектив совсем просто.

Zusammenfassung

BEITRAG ZUM ZEICHNEN VON PERSPEKTIVEN MITTELS RASTER AUF GRUND DER TRILINEAREN VERWANDTSCHAFT VON DREI ORIENTIERTEN ZENTRALPROJEKTIONEN

FRANTIŠEK HAVELKA

Beim Zeichnen von Perspektivbildern der Gegenstände bediente man sich schon früh der Strahlennetze, später auch der Raster. Es ist bekannt, dass schon *Leone Battista Alberti*, *Albrecht Dürer*, *Lionardo da Vinci* u. a. von Strahlennetzen Gebrauch gemacht haben. In der neuesten Zeit waren es *W. Körber*, *A. Reile*, *H. W. Roberts* u. a., die die Strahlennetze benützten. Bei uns gebrauchte *František Kadeřávek* die Strahlennetze beim Unterricht der darstellenden Geometrie, *Artur Salner* hat Raster bei der Konstruktion von Perspektiven mittels seines Perspektographen *Prema* benützt.

In diesem Artikel wird gezeigt, dass man die Perspektive des Gegenstandes bequem und schnell mit Hilfe zweier Raster (ohne das Gerät *Prema*) auf Grund von Trilinearverwandschaft dreier Zentralprojektionen konstruieren kann. Es werden dazu kurz die Trilinearverwandschaft und die Perspektivkonstruktionen von *Hauk* und *Brauer* und ihre Perspektivgeräte behandelt, und es wird die Möglichkeit, diese Konstruktionen mittels Raster durchzuführen, erwogen. Es wird angewiesen, dass die *Salnersche* Konstruktion von Perspektiven, die aus elementargeometrischen Verhältnissen entstanden ist, besonders die *Salnersche* Anordnung der Ebenen ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, π (Fig. 1, 2, 6) am zweckmässigsten zum Perspektivzeichnen mittels Raster auf Grund der Trilinear-Verwandschaft von drei Zentralprojektionen zu sein scheint.

Es wird ein Satz ausgesprochen und seine Gültigkeit bewiesen. Der Satz lautet:

Wenn zwei Orthogonalprojektionen des Gegenstandes gegeben sind, dann kann man einen Punkt seiner Perspektive bei der *Salnerschen* Anordnung von Ebenen ${}^1\pi$, ${}^2\pi$, π konstruieren und zwar folgendermassen:

- a) mittels zweier einfachen Raster (Fig. 13) und durch Zeichnen von zwei Geraden,
- b) mittels zweier Raster, wovon einer ein Doppelraster ist (Fig. 14), und durch Zeichnen nur von einer Geraden,
- c) ohne Zeichnen überhaupt, nur mittels zweier Doppelraster.

Die Lage von Rastern ist von der Distanz d und von der Höhe h des Zentrums der Zentralprojektion abhängig. Das Zeichnen von Perspektiven ist dabei ganz einfach.