Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Ladislav Sedláček

Užití zobecněné věty Jordan-Hölderovy v teorii direktních součinů množin s operátory

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 7 (1966), No. 1, 45--57

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119858`

1966 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 21.

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Josef Metelka

UŽITÍ ZOBECNĚNÉ VĚTY JORDAN-HÖLDEROVY V TEORII DIREKTNÍCH SOUČINŮ MNOŽIN S OPERÁTORY

LADISLAV SEDLÁČEK

(Došlo 18. června 1965)

Úvod

V této práci předpokládám znalost základních pojmů a vlastností z teorie množin a grupoidů s operátory stejně jako z teorie rozkladů, jak jsou uvedeny v pracích [1], [2] a [27]. Přesto však pro lepší přehled uvedu alespoň nejdůležitější definice a věty. Definice budu značit písmenem D a věty písmenem V.

1. Množiny s operátory

Úmluva 1/1: V celé práci uvažujeme jen neprázdné množiny. $A \times B$ značí kartézský součin množin A a B.

D 1/1: a) Nechť G je daná množina a Ω množina operátorů. Nechť každé uspořádané dvojici (a, ω), $a \in G$, $\omega \in \Omega$, je přiřazen určitý prvek $b \in G$, což zapisujeme $a\omega = b$. Pak říkáme, že *množina G má obor operátorů Ω*, což značíme symbolem G/Ω.

b) Neprázdná *podmnožina A* množiny G/Ω se nazývá *přípustná*, když platí $A\Omega \subset A$, kde $A\Omega$ značí množinu všech součinů tvaru $a\omega$, kde $a \in A$, $\omega \in \Omega$.

c) Prvek $e \in G$ se nazývá *přípustný*, když platí $\{e\}\ \Omega = e$. Místo $\{e\}\ \Omega$ píšeme pouze $e\Omega$.

Z definice je patrno, že množina G s oborem operátorů Ω je univerzální algebra, jejíž systém operací Ω obsahuje pouze unární operace. Proto si také zachovávají platnost všechny pojmy a věty z práce [28], jen místo o univerzální algebře mluvíme o množině s operátory, místo o faktorové algebře o přípustném rozkladu, místo o podalgebře mluvíme o přípustné podmnožině. Pojem řetězce faktorových algeber nahradíme pojmem řetězce přípustných rozkladů, pojem deformace pojmem Ω-zobrazení atd. Proto také je možno v tomto smyslu použít výsledků dosažených v práci [28].

D 2/1: Nechť $\bar{A}$ je neprázdný systém neprázdných, po dvou disjunktních podmnožin v G/Ω a nechť pro každý prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ a každé $\omega \in \Omega$ platí $\bar{a}\omega \subset \bar{b} \in \bar{A}$. Definujeme-li $\bar{a} \circ \omega = \bar{b}$ právě tehdy, když $\bar{a}\omega \subset \bar{b}$, pak říkáme, že $\bar{A}$ je *přípustný rozklad* a píšeme $\bar{A}/\Omega$. Je-li přípustný rozklad $\bar{A}$ takový, že každý prvek z G leží v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, říkáme, že $\bar{A}$ je přípustný rozklad *na* množině G/Ω.

Označíme-li symbolem $s\bar{A}$ sjednocení (součet) všech prvků $\bar{a}$ systému $\bar{A}$ a je-li $\bar{A}$ přípustný rozklad v G/Ω, pak $s\bar{A}$ je zřejmě přípustná podmnožina v G/Ω. Důležitými rozklady jsou *extrémní rozklady* G/Ω, a sice *největší* $\bar{G}_{\max}$ a *nejmenší* rozklad $\bar{G}_{\min}$, jež jsou přípustné ([27], str. 37) a které nazýváme také *triviální*.

D 3/1: a) Nechť B je neprázdná podmnožina a $\bar{A}$ rozklad v G.

a) *Obalem množiny B v rozkladu $\bar{A}$* rozumíme množinu všech prvků $\bar{a}$ z $\bar{A}$, které jsou incidentní s B. Obal B v $\bar{A}$ značíme $B \sqsubset \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqsupset B$.

b) *Průsekem množiny B s rozkladem $\bar{A}$* rozumíme množinu všech neprázdných průniků jednotlivých prvků $\bar{a}$ z $\bar{A}$ s množinou B. Průsek značíme $B \sqcap \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqcap B$.

c) Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou rozklady v G. Rozklad $\bar{A}(\bar{B})$ nazýváme *zákrytem (zjemněním) rozkladu $\bar{B}(\bar{A})$*, jestliže každý prvek z $\bar{A}$ je součtem několika prvků z $\bar{B}$ a současně každý prvek z $\bar{B}$ je částí některého prvku z $\bar{A}$. Tento vztah zákrytu resp. zjemnění označujeme $\bar{A} \geqq \bar{B}$ nebo $\bar{B} \leqq \bar{A}$.

D 4/1: Nechť $A \supset B$ jsou přípustné podmnožiny v G/Ω. *Řetězcem přípustných rozkladů od A do B* nebo kratčeji *přípustným řetězcem od A do B* rozumíme konečnou posloupnost o α ($\geqq 1$) přípustných rozkladech $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \ldots, \bar{K}_\alpha$ v G/Ω, které mají tyto vlastnosti:

a) $\bar{K}_1$ je rozklad na A,

b) $\bar{K}_{\gamma+1}$ leží na nějakém prvku rozkladu $\bar{K}_\gamma$ pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$,

c) B je prvek z $\bar{K}_\alpha$, tj. $B \in \bar{K}_\alpha$.

Takový řetězec označujeme $[\bar{K}] = \bar{K}_1 \to \bar{K}_2 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$ nebo pouze $[\bar{K}]$. *Délkou řetězce* $[\bar{K}]$ rozumíme počet α jeho členů. Je-li člen $K_{\gamma+1}$ vlastní podmnožina v K_γ, pak $\bar{K}_\gamma$ se nazývá *podstatný člen*. Jinak se nazývá *nepodstatný*.

D 5/1: Nechť $\bar{A}$ je přípustný rozklad v G/Ω a podmnožina B nechť je prvkem v $\bar{A}$. Položíme $s\bar{A} = A$. Pak *elementárním řetězcem přípustných rozkladů od A do B nad $\bar{A}$* nebo kratčeji *přípustným elementráním řetězcem nad $\bar{A}$* rozumíme řetězec přípustných rozkladů od A do B, $[\bar{K}] = \bar{K}_1 \to \bar{K}_2 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$ té vlastnosti, že pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$ člen $\bar{K}_\gamma$ je zákrytem rozkladu $\bar{A}_\gamma = \bar{A} \sqcap K_\gamma$, kde $K_\gamma = s\bar{K}_\gamma$, $\bar{K}_1 = \bar{A}$.

D 6/1: *Přípustným zjemněním* $[\mathring{K}]$ přípustného řetězce $[\bar{K}]$ od A do B v G/Ω rozumíme řetězec přípustných rozkladů od A do B, $[\mathring{K}] = \mathring{K}_{11} \to \ldots \to \mathring{K}_{1\beta_1} \to \mathring{K}_{21} \to \ldots \to \mathring{K}_{2\beta_2} \to \ldots \to \mathring{K}_{\alpha\beta_\gamma}$ takový, že *částečný řetězec* $[\mathring{K}_\gamma] = \mathring{K}_{\gamma 1} \to \ldots \to \mathring{K}_{\gamma\beta_\gamma}$ je přípustný elementární řetězec od K_γ do $K_{\gamma+1}$ nad $\bar{K}_\gamma$. V těchto vzorcích $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\gamma$ jsou přirozená čísla.

D 7/1: Dva přípustné *řetězce* $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ od A do B resp. od C do D nazýváme *adjungované*, když

a) mají stejné konce, tj. $A = C$, $B = D$

a

b) každé dva členy $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$ z $[\bar{K}]$ resp. z $[\bar{L}]$ jsou adjungovány vzhledem kde $K_{\gamma+1} = s\bar{K}_{\gamma+1}$ resp. k $L_{\delta+1} = s\bar{L}_{\delta+1}$, tj. když pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, \ldots, \beta$ platí vztahy $K_{\gamma+1} \cap L_{\delta+1} \neq \emptyset$ a $s(L_{\delta+1} \sqsubset \bar{K}_\gamma \sqcap L_\delta) = s(K_{\gamma+1} \sqsubset \bar{L}_\delta \sqcap K_\gamma)$, kde $K_{\alpha+1} = B$, $L_{\beta+1} = D$.

D 8/1: Nechť d je zobrazení množiny G/Ω do množiny G^*/Ω takové, že pro každé $a \in G$ a každé $\omega \in \Omega$ platí, že $(\mathrm{d}a)\,\omega = \mathrm{d}(a\omega)$. Pak říkáme, že d je *$\Omega$-zobrazení množiny G/Ω do G^*/Ω*. Je-li d prosté Ω-zobrazení G/Ω na G^*/Ω, pak říkáme, že *množiny G a G^** jsou *Ω-ekvivalentní*, což značíme symbolem $G/\Omega \leftrightarrow G^*/\Omega$. Je-li $\mathrm{d}a = a^*$, píšeme také $a \leftrightarrow a^*$.

Je známo ([1], str. 43), že rozklad $\bar{G}$ na G/Ω, příslušný k Ω-zobrazení d množiny G/Ω na G^*/Ω, je přípustný a Ω-ekvivalentní s G^*. Přitom každý prvek $\bar{a}$ z $\bar{G}$ je množina právě všech prvků a z G, které se v zobrazení d zobrazí na týž prvek a^* z G^*.

D 9/1: Buďte $A \supset B$, $C \supset D$ přípustné podmnožiny v G/Ω a $[\bar{K}] = \bar{K}_1 \to \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$ přípustný řetězec od A do B, $[\bar{L}] = \bar{L}_1 \to \ldots \bar{L}_\beta$ přípustný řetězec od C do D. Existuje-li prosté zobrazení i členů řetězce $[\bar{K}]$ na členy řetězce $[\bar{L}]$ těchto vlastností:

a) je-li $\mathrm{i}\{\bar{K}_\gamma\} = \{\bar{L}_\delta\}$, pak existuje prosté Ω-zobrazení i_γ rozkladu $\bar{K}_\gamma$ na rozklad $\bar{L}_\delta$

a

b) $\mathrm{i}_\gamma\{K_{\gamma+1}\} = \{L_{\delta+1}\}$ pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, $1 \leqq \delta \leqq \beta$, pak říkáme, že i je *silné zobrazení řetězce $[\bar{K}]$ na řetězec $[\bar{L}]$* a že řetězce $[\bar{K}]$ a $[\bar{L}]$ jsou Ω-ekvivalentní.

Pro řetězce rozkladů platí *zobecněná věta Schreierova:*

V 1/1: Každé dva adjungované přípustné řetězce $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ v množině G/Ω mají Ω-ekvivalentní zjemnění.

Její důkaz je proveden v [28] (str. 62) pro univerzální algebry a speciálně pro množiny s operátory v práci [29].

D 10/1: O množině G s oborem operátorů Ω říkáme, že je *jednoduchá vzhledem ke svému prvku a*, když pro každý přípustný rozklad $\bar{G}$ na G platí buď a) $\bar{G} = \bar{G}_{\max}$ nebo b) $a \in \bar{G}$. Říkáme také, že G je v tomto případě *relativně jednoduchá množina*. Je-li množina G/Ω jednoduchá vzhledem ke každému svému prvku, pak říkáme, že je *jednoduchá*.

Zřejmě množina G/Ω je jednoduchá právě tehdy, když $\bar{G}_{\max}$ a $\bar{G}_{\min}$ jsou jediné přípustné rozklady na G. Podobně pak definujeme přípustný *rozklad $\bar{A}$ jednoduchý vzhledem k podmnožině $B \in \bar{A}$*, tj. *relativně jednoduchý rozklad* resp. *jednoduchý přípustný rozklad*.

D 11/1: Nechť $[\bar{K}] = \bar{K}_1 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$ je přípustný řetězec od A do B v G/Ω, jehož každý člen $\bar{K}_\gamma$ je jednoduchý rozklad vzhledem ke $K_{\gamma+1}$, a nechť každý člen řetězce $[\bar{K}]$ je podstatný. Pak $[\bar{K}]$ se nazývá *kompoziční řetězec podmnožiny A vzhledem k B*. Platí-li $A = G$, $B = \{e\}$, kde e je přípustný prvek, pak $[\bar{K}]$ se nazývá *kompoziční řetězec množiny G/Ω*.

Pro kompoziční řetězce platí *zobecněná věta Jordan-Hölderova*, jejíž důkaz pro univerzální algebry je obsažen v práci [28] (str. 63) nebo pro množiny s operátory v [29]:

V 2/1: Nechť $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ jsou přípustné adjungované kompoziční řetězce přípustné podmnožiny A vzhledem k přípustné podmnožině B v G/Ω. Pak řetězce $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ jsou Ω-ekvivalentní.

2. Direktní součiny množin s operátory

D 1/2: Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, G$ (α přirozené číslo) jsou množiny s oborem operátorů Ω a nechť pro každý prvek $(a_1, a_2, \ldots, a_\alpha) \in (A_1 \times A_2 \times$

$\times \ldots \times A_\alpha) = A^{[\alpha]}$ a každé $\omega \in \Omega$ platí $(a_1, a_2, \ldots, a_\alpha)\,\omega = (a_1\omega, a_2\omega, \ldots, a_\alpha\omega)$. Je-li G/Ω množina Ω-ekvivalentní s množinou $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$, v níž je násobení operátorem definováno shora uvedeným způsobem, pak říkáme, že *množina G/Ω je direktním součinem množin $A_1/\Omega, A_2/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega$*. a píšeme $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$.

Snadno se dokáže věta

V 1/2: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$. Pak v G existuje přípustný prvek e tehdy a jen tehdy, když v každé množině A_ι existuje přípustný prvek e_ι ($\iota = 1, \ldots, \alpha$) takový, že $e \leftrightarrow (e_1, e_2, \ldots, e_\alpha)$, což značí, že v prostém Ω-zobrazení d množiny G/Ω na $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ je $\mathrm{d}e = (e_1, e_2, \ldots, e_\alpha)$.

D 2/2: Nechť d je prosté Ω-zobrazení množiny G/Ω na $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$. Definujeme nyní zobrazení d_ι množiny G/Ω na A_ι/Ω tak, že $\mathrm{d}a = a_\iota$ tehdy a jen tehdy, když $\mathrm{d}a = (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha)$. Pak d_ι nazýváme *Ω-projekcí* množiny G/Ω na množinu A_ι/Ω a prvek a_ι nazýváme průmětem prvku a do A_ι. Říkáme, že Ω-projekce d_ι je indukována zobrazením d.

V 2/2: Nechť d_ι je Ω-projekce množiny G/Ω na A_ι/Ω, která je indukována prostým Ω-zobrazením d množiny G/Ω na $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega = G'/\Omega$. Pak platí:

a) d_ι je Ω-zobrazením G na A_ι,

b) rozklad $\overline{G}_\iota$ na G, příslušný Ω-projekci d_ι, je přípustný a Ω-ekvivalentní s A_ι,

c) rozklad $\overline{G}_\iota$ je Ω-ekvivalentní s přípustným rozkladem $\overline{G}'_\iota$ na G', jehož prvky $\bar{a}'_\iota$ jsou tvaru $\bar{a}'_\iota = A_1 \times \ldots \times A_{\iota-1} \times \{a_\iota\} A_{\iota+1} \times \ldots \times A_\alpha$,

d) podmnožina $\bar{a}_\iota$ všech prvků z G, které se v d_ι zobrazí na týž prvek a_ι z A_ι, je ekvivalentní s podmnožinou $\bar{a}'_\iota$, která je prvkem rozkladu $\overline{G}'_\iota$.

Důkaz: a) Předně každý prvek a_ι z A_ι je obrazem alespoň jednoho prvku a z G. Nechť $\mathrm{d}a = (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha)$, $\mathrm{d}_\iota a = a_\iota$. Pak $(\mathrm{d}a)\,\omega = (a_1, \ldots, a_\iota, \ldots, a_\alpha)\,\omega = (a_1\omega, \ldots, a_\iota\omega, \ldots, a_\alpha\omega) = \mathrm{d}(a\omega)$, a proto podle D 2/2 platí $(\mathrm{d}_\iota a)\,\omega = a_\iota\omega = \mathrm{d}_\iota(a\omega)$ pro každé $\omega \in \Omega$.

b) Tvrzení je správné, jak je dokázáno v [27], str. 43.

c) Snadno se dokáže, že $\overline{G}'_\iota$ je přípustný rozklad, který je zřejmě Ω-ekvivalentní s A_ι, a tedy také s rozkladem $\overline{G}_\iota$ vzhledem k b).

d) Poněvadž d je prosté Ω-zobrazení G na $G' = A_1 \times \ldots \times A_\alpha$, obsahuje podmnožina $\bar{a}_\iota$ právě všechny takové prvky x z G, pro něž platí $\mathrm{d}x = (x_1, \ldots, x_{\iota-1}, a_\iota, x_{\iota+1}, \ldots, x_\alpha)$, kde prvek $x_\varkappa$ probíhá celou množinu $A_\varkappa$ a a_ι je libovolný pevný prvek z A_ι, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$, $\iota \neq \varkappa$. Pak zřejmě v rozšířeném prostém Ω-zobrazení d platí, že $\mathrm{d}\bar{a}_\iota = \bar{a}'_\iota = (A_1 \times \ldots \times \{a_\iota\} \times \ldots \times A_\alpha)$ a množiny $\bar{a}_\iota$, $\bar{a}'_\iota$ jsou ekvivalentní.

Důsledek 1/2: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots A_\alpha)/\Omega$ a nechť d je prosté Ω-zobrazení G na $(A_1 \times \ldots \times A_\alpha)$. Pak zobrazením d a množinou A_ι je indukována právě jedna Ω-projekce d_ι. Tyto Ω-projekce tvoří *úplný systém* $\{\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_\alpha\}$ příslušný k systému $\{A_1/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega\}$.

D 3/2: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ a nechť d_ι jsou Ω-projekce indukované prostým Ω-zobrazením d množiny G na $(A_1 \times \ldots \times A_\alpha)$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Pak říkáme, že přípustné rozklady $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_\alpha$, příslušné k Ω-projekcím $\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_\alpha$, tvoří *úplný systém přípustných rozkladů na G/Ω příslušný k systému $\{A_1/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega\}$*.

Jak je známo ([1], str. 30), *nejmenším společným zákrytem rozkladů A, B*

množiny G rozumíme takový společný zákryt $[A, B]$, že pro každý jiný jejich společný zákryt C platí $C \geqq [A, B]$. Jsou-li A, B přípustné rozklady na G/Ω, pak také $[A, B]$ je přípustný rozklad na G ([28], str. 43 nebo [29]). Podobně *největším společným zjemněním* ([1], str. 33) *rozkladů* A, B množiny G rozumíme takové společné zjemnění (A, B), že pro každé jiné jejich společné zjemnění D platí $(A, B) \geqq D$. Jsou-li A, B přípustné rozklady na G/Ω, pak také (A, B) je přípustný rozhlad na G ([28], str. 44 resp. [29]).

D 3/2: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega = G'/\Omega$ a nechť $\{\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha\}$ je úplný systém přípustných rozkladů na G, jež přísluší k systému $\{A_1, \ldots, A_\alpha\}$. Pak platí:

a) Nejmenší společný zákryt $[\bar{G}_\iota, \bar{G}_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$, $\iota \neq \varkappa$.

b) $\bar{G}_\iota$, $\bar{G}_\varkappa$ jsou doplňkové rozklady pro $\iota \neq \varkappa$, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$.

c) Největší společné zjemnění $(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \ldots, \bar{G}_\alpha) = \bar{G}_{\min}$.

Důkaz: a) Nechť např. $\iota < \varkappa$ a $\bar{a}'_\iota = A_1 \times \ldots \times \{a_\iota\} \times \ldots \times A_\varkappa \times \times \ldots \times A_\alpha$, $\bar{b}'_\iota = A_1 \times \ldots \times \{b_\iota\} \times \ldots \times A_\varkappa \times \ldots \times A_\alpha$ jsou libovolné prvky z rozkladu $\bar{G}'_\iota$ a $\bar{x}'_\varkappa = A_1 \times \ldots \times A_\iota \times \ldots \times \{x_\varkappa\} \times \ldots \times A_\alpha$ libovolný prvek z $\bar{G}'_\varkappa$. Poněvadž a_ι, b_ι jsou prvky z A_ι, $x_\varkappa$ je prvek z $A_\varkappa$, zřejmě platí $\bar{a}'_\iota \cap \bar{x}'_\varkappa \neq \emptyset$, $\bar{b}'_\iota \cap \bar{x}'_\varkappa \neq \emptyset$. Je tedy každý prvek $\bar{a}'_\iota$ z $\bar{G}'_\iota$ incidentní s každým prvkem $\bar{x}'_\varkappa$ z rozkladu $\bar{G}'_\varkappa$. Existuje tedy vazba každého prvku $\bar{a}'_\iota$ z $\bar{G}'_\iota$ s každým prvkem $\bar{b}'_\iota$ z $\bar{G}'_\iota$ vzhledem k $\bar{G}'_\varkappa$, a proto podle definice a konstrukce nejmenšího společného zákrytu rozkladů $[\bar{G}'_\iota, \bar{G}'_\varkappa]$ ([1], str. 30), je $[\bar{G}'_\iota, \bar{G}'_\varkappa] = \bar{G}'_{\max}$. Poněvadž platí $G \leftrightarrow G'$, $\bar{G}_\iota \leftrightarrow \bar{G}'_\iota$, $\bar{G}_\varkappa \leftrightarrow \bar{G}'_\varkappa$ v témž prostém Ω-zobrazení d množiny G/Ω na G'/Ω, je rovněž $[\bar{G}_\iota, \bar{G}_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$ pro $\iota \neq \varkappa$, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$.

b) Jak víme ([1]), str. 41), *rozklady* $\bar{A}$, $\bar{B}$ množiny G nazýváme *doplňkové*, když každý prvek $\bar{a}$ z $\bar{A}$ je incidentní se všemi prvky rozkladu $\bar{B}$, které leží v témž prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ jako prvek $\bar{a}$. Podle a) je $[\bar{G}_\iota, \bar{G}_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$ a podle důkazu části a) je každý prvek $\bar{a}$ z $\bar{G}$ incidentní s každým prvkem $\bar{a}_\varkappa$ z $\bar{G}_\varkappa$ pro $\iota \neq \varkappa$, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$. Tím je tvrzení dokázáno.

c) Jak jsme již řekli, jsou každé dva prvky $\bar{a}_\iota$ z $\bar{G}_\iota$, $\bar{a}_\varkappa$ z $\bar{G}_\varkappa$ incidentní. Podle [3], str. 44 existuje právě jedno největší společné zjemnění $\bar{G} = (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha)$ přípustných rozkladů $\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha$. Nechť nyní je $\bar{G} \neq \bar{G}_{\min}$. Pak v $\bar{G}$ existuje alespoň jeden prvek $\bar{a}$, který obsahuje alespoň dva různé prvky x, y. Nechť $x \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_\alpha)$, $y \leftrightarrow (y_1, \ldots, y_\alpha)$. Pak prvky $(x_1, \ldots, x_\alpha)$, $(y_1, \ldots, y_\alpha)$ se liší alespoň v jedné složce, např. $x_\iota \neq y_\iota$. Pak však podle definice rozkladu $\bar{G}'_\iota$ patří prvky $(x_1, \ldots, x_\alpha)$ a $(y_1, \ldots y_\alpha)$ do různých prvků $\bar{x}'_\iota$, $\bar{y}'_\iota$ z $\bar{G}'_\iota$. Potom také prvky $\bar{x}_\iota$, $\bar{y}_\iota$ z $\bar{G}_\iota$ jsou navzájem různé, a tedy prvky x, y patří do různých prvků rozkladu $\bar{G}$, což je spor s předpokladem. Je tedy $(\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha) = \bar{G}_{\min}$.

3. Direktní rozklady množin s operátory

D 1/3: Říkáme, že *množina* G/Ω je *direktně rozložitelná*, existují-li množiny $A_1, \ldots, A_\alpha$ s oborem operátorů Ω takové, že platí:

a) G/Ω je irektním součinem těchto množin, tj. $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$,

b) každý rozklad $\bar{G}_\iota$ z úplného systému přípustných rozkladů $\{\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_\alpha\}$, příslušného k systému $\{A_1, \ldots, A_\alpha\}$, je různý od $\bar{G}_{\min}$, tj. $\bar{G}_\iota \neq \bar{G}_{\min}$ pro $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

Mluvíme také o *direktním rozkladu množiny* G/Ω. V opačném případě říkáme, že *množina* G/Ω je *direktně nerozložitelná*.

Snadno se dokáže vět

V 1/3: Množina G/Ω je direktně rozložitelná tehdy a jen tehdy, existují-li množiny $A_1/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega$ takové, že

a) $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$,

b) žádná z Ω-projekcí d_ι úplného systému, který přísluší k systému $\{A_1/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega\}$, není prosté Ω-zobrazení.

Odtud snadno plyne:

V 2/3: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ je direktní rozklad množiny. Pak a) $\alpha \geqq 2$, b) existují alespoň dvě množiny $A_\iota, A_\varkappa$, $\iota \neq \varkappa$, že pro jejich kardinální čísla platí card $A_\iota > 1$, card $A_\varkappa > 1$.

D 2/3: Nechť $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ ($\alpha \geqq 2$) jsou přípustné, po dvou doplňkové rozklady na G/Ω a nechť platí

a) nejmenší společný zákryt $[\bar{A}_\iota, \bar{A}_\varkappa] = \bar{G}_{\max}$ pro $\iota \neq \varkappa$, $\iota, \varkappa = 1, \ldots, \alpha$,

b) největší společné zjemnění $(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha) = \bar{G}_{\min}$.

Pak *rozklady* $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ nazýváme *silně doplňkové.*

V 3/3: Množina G/Ω je direktně rozložitelná tehdy a jen tehdy, existují-li na ní netriviální silně doplňkové přípustné rozklady $\bar{A}_1, \bar{A}_2$. Je-li tomu tak, pak je $G/\Omega \leftrightarrow (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)/\Omega$.

Důkaz: a) Nechť G/Ω je direktně rozložitelná. Pak podle V 2/3 je $\alpha \geqq 2$ a $G/\Omega \leftrightarrow (B_1 \times \ldots \times B_\alpha)/\Omega$. Protože pro direktní součin platí zákon komutativní a asociativní, existují množiny A_1, A_2 s oborem operátorů Ω takové, že $A_1/\Omega \leftrightarrow (B_1 \times \ldots \times B_\iota)/\Omega$, $A_2/\Omega \leftrightarrow (B_{\iota+1} \times \ldots \times B_\alpha)/\Omega$, $1 \leqq \iota < \alpha$, pro něž platí podle V 2/3, že card $A_1 > 1$, card $A_2 > 1$. Pak tedy platí $G/\Omega \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (A_1 \times A_2)/\Omega$ a přípustný rozklad $\bar{G}_\iota$ příslušný k Ω-projekci d_ι množiny G na A_ι ($\iota = 1{,}2$) je netriviální. Podle D 1/3 je totiž $\bar{G}_\iota \neq \bar{G}_{\min}$. Avšak je také $\bar{G}_\iota \neq \bar{G}_{\max}$. Kdyby totiž bylo např. $\bar{G}_1 = \bar{G}_{\max}$, pak je nutně A_1 množina tvořená jediným prvkem, tj. card $A_1 = 1$, což je spor s V 2/3. Podle V 3/2 a D 2/3 jsou rozklady $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ silně doplňkové. Podle V 2/2 je $\bar{G}_\iota$ Ω-ekvivalentní s A_ι, tj. $\bar{G}_\iota/\Omega \leftrightarrow A_\iota/\Omega$, $\iota = 1{,}2$. Je tedy $G/\Omega \leftrightarrow (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times A_2)/\Omega$, položíme-li $\bar{A}_1 = \bar{G}_1$, $\bar{A}_2 = \bar{G}_2$.

b) Nechť $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ jsou netriviální silně doplňkové přípustné rozklady na G/Ω. Pak je $\bar{A}_1 \neq \bar{A}_2$, neboť v opačném případě by bylo $(\bar{A}_1, \bar{A}_2) = \bar{A}_1 \neq \bar{G}_{\min}$. Abychom dokázali, že G je direktně rozložitelná množina, zřejmě stačí dokázat, že $G/\Omega \leftrightarrow (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)/\Omega$. Označme $\bar{a}_\iota$ ten prvek přípustného rozkladu $\bar{A}_\iota$, který obsahuje prvek a z G. Definujme nyní zobrazení d takto: $\mathrm{d}a = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ pro $a \in G$, $\bar{a}_1 \in \bar{A}_1$, $\bar{a}_2 \in \bar{A}_2$. Toto zobrazení d je zřejmě Ω-zobrazení G do $(\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)$. Označíme-li $\bar{a}_\iota \circ \omega = \bar{b}_\iota$ ($\iota = 1{,}2$), $a\omega = b$, pak $b \in \bar{b}_\iota$ a pro zobrazení d platí jednak $\mathrm{d}(a\omega) = \mathrm{d}b = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ a jednak $(\mathrm{d}a)\,\omega = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)\circ\omega =$ $= (\bar{a}_1 \circ \omega, \bar{a}_2 \circ \omega) = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$. Je tedy $\mathrm{d}(a\omega) = (\mathrm{d}a)\,\omega$.

Dále platí, že d je prosté zobrazení G na $(\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)$. Nechť a, b jsou libovolné prvky z G, $a \in \bar{a}_\iota \in \bar{A}_\iota$, $b \in \bar{b}_\iota \in \bar{A}_\iota$ a nechť platí $\bar{a}_\iota = \bar{b}_\iota$, $\iota = 1, 2$. To znamená, že $a, b \in \bar{a}_1 \in \bar{A}_1$, $a, b \in \bar{a}_2 \in \bar{A}_2$. Pak také prvky a, b patří do téhož prvku $\bar{a}$ největšího společného zjemnění $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ rozkladů $\bar{A}_1, \bar{A}_2$. Poněvadž $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ jsou silně doplňkové rozklady, je $(\bar{A}_1, \bar{A}_2) = \bar{G}_{\min}$, a tedy $a = b$. Odtud plyne, že každý prvek $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \in (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)$ je obrazem nejvýše jednoho prvku $a \in G$. Nyní dokážeme, že každý prvek $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \in (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)$ je obrazem alespoň jednoho prvku $a \in G$. Nechť $a \in \bar{a}_1 \in \bar{A}_1$, $b \in \bar{a}_2 \in \bar{A}_2$. Poněvadž $[\bar{A}_1, \bar{A}_2] = \bar{G}_{\max}$, proto k prvkům a, b existuje prvek $x \in G$ takový, že prvky a, x patří do téhož prvku $\bar{a}_1 \in \bar{A}_1$ a prvky b, x do téhož prvku $\bar{a}_2 \in \bar{A}_2$. Pak podle definice zobrazení d platí $\mathrm{d}x = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, a tedy prvek $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \in (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)$ je obrazem alespoň jednoho prvku $x \in G$.

Konečně žádná z indukovaných Ω-projekcí d_ι množiny G na $\bar{A}_\iota$ není prosté zobrazení pro $\iota = 1,2$. Je-li $\mathrm{d}a = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, $a \in \bar{a}_\iota \in \bar{A}_\iota$, pak podle D 2/2 pro Ω-projekce platí $\mathrm{d}_1 a = \bar{a}_1$, $\mathrm{d}_2 a = \bar{a}_2$. Protože každý prvek $a \in G$ patří do některého prvku $\bar{a}_\iota$, proto $\bar{G}_1 = \bar{A}_1$, $\bar{G}_2 = \bar{A}_2$ tvoří úplný systém přípustných rozkladů na G, které přísluší k systému $\{\bar{A}_1/\Omega, \bar{A}_2/\Omega\}$. Přitom je $\bar{G}_\iota \neq \bar{G}_{\min}$ $(\iota = 1,2)$, a tedy d_ι není prosté Ω-zobrazení. Je tedy G/Ω direktně rozložitelná množina.

V 4/3: Každá jednoduchá množina G/Ω je direktně nerozložitelná.

Důkaz: Vzhledem k D 10/1 jediné přípustné rozklady na G/Ω jsou právě jen $\bar{G}_{\max}$ a $\bar{G}_{\min}$. Pak podle V 3/3 je G/Ω direktně nerozložitelná.

D 3/3: *Množina* G/Ω se nazývá *direktně zcela rozložitelná*, je-li direktně rozložitelná a když pro každý faktor A_ι/Ω direktního rozkladu $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ platí:

c) A_ι/Ω je direktně nerozložitelná množina,

d) card $A_\iota > 1$ pro $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

V tomto případě říkáme, že $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ je úplný direktní rozklad množiny G/Ω. V opačném případě říkáme, že množina G/Ω není direktně zcela rozložitelná.

V 5/3: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ je direktní rozklad množiny G/Ω a nechť pro každý faktor A_ι/Ω platí:

a) A_ι je jednoduchá množina,

b) card $A_\iota > 1$ pro $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

Pak $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ je úplný direktní rozklad množiny G/Ω.

Důkaz: Podle V 4/3 je každá jednoduchá množina direktně nerozložitelná, a tedy věta je dokázána.

D 4/3: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$, $H/\Omega \leftrightarrow (B_1 \times \ldots \times B_\beta)/\Omega$ jsou direktní rozklady množin G/Ω, H/Ω. Nechť existuje prosté zobrazení i složek A_ι direktního rozkladu G/Ω na složky $B_\varkappa$ direktního rozkladu H/Ω takové, že když je $\mathrm{i}\{A_\iota\} = \{B_\varkappa\}$, pak množiny A_ι a $B_\varkappa$ jsou Ω-ekvivalentní. Potom nazýváme i silné zobrazení $(A_1 \times \ldots \times A_\alpha)$ na $(B_1 \times \ldots \times B_\beta)$ a říkáme, že *direktní rozklady* G/Ω, H/Ω jsou *Ω-ekvivalentní*. Často klademe $H = G$.

4. Řetězce rozkladů direktního součinu množin

V 1/4: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$, $e_\iota \in A_\iota$, $e \in G$ jsou přípustné prvky takové, že $e \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\alpha)$. Nechť G_ι je podmnožina v G, pro niž platí $G_\iota \leftrightarrow (\{e_1\} \times \ldots \times \{e_{\iota-1}\} \times A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)$. Pak G_ι je přípustná podmnožina a platí

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_\alpha \supset G_{\alpha+1} = e \tag{1.4}$$

Přitom množina G_ι je Ω-ekvivalentní s $(A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$.

Důkaz si snadno provede čtenář sám.

Nechť d je prosté Ω-zobrazení G/Ω na $(A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$. Nechť v rozšířeném inversním Ω-zobrazení d^{-1} platí $G_\iota = \mathrm{d}^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times \{e_{\iota-1}\} \times A_\iota \times \times \ldots \times A_\alpha)$. Nechť $\overline{\mathrm{d}}_\iota$ je částečné prosté Ω-zobrazení G_ι/Ω na $(\{e_1\} \times \ldots \times \times \{e_{\iota-1}\} \times A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ a f prosté Ω-zobrazení $(\{e_1\} \times \ldots \times \{e_{\iota-1}\} \times \times A_\iota \times \ldots A_\alpha)/\Omega$ na $(A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$. Pak složené zobrazení $\mathrm{f}\overline{\mathrm{d}}_\iota$ je zřejmě prosté Ω-zobrazení G_ι na $(A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$.

Úmluva 1/4: Toto prosté Ω-zobrazení G_ι na $(A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ označíme $\mathrm{d}_{(\iota)}$, tj. $\mathrm{d}_{(\iota)} = \mathrm{f}\overline{\mathrm{d}}_\iota$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

V 2/4: Nechť d je prosté Ω-zobrazení množiny G/Ω na $(A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$, $e_\iota \in A_\iota$, $e \in G$ přípustné prvky takové, že $\mathrm{d}e = (e_1, \ldots, e_\alpha)$. Nechť $G_\iota = = d^{-1}(\{e_1\} \times \ldots \times \{e_{\iota-1}\} \times A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)$ v rozšířeném prostém Ω-zobrazení d^{-1}. Nechť $\mathrm{d}_{(\iota)}$ je prosté Ω-zobrazení G_ι/Ω na $(A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)$ z úmluvy 1/4 a $(\overline{G_\iota})_\iota = \overline{G}_{(\iota)}$ přípustný rozklad na G_ι příslušný Ω-projekci $\mathrm{d}_{(\iota)\iota}$ množiny G_ι/Ω na A_ι/Ω. Pak přípustné rozklady $\overline{G}_{(\iota)}$ tvoří přípustný řetězec od G do $\{e\}$ tvaru

$$\overline{G}_1 = \overline{G}_{(1)} \to \overline{G}_{(2)} \to \ldots \to \overline{G}_{(\alpha-1)} \to \overline{G}_{(\alpha)} = (\overline{G_\alpha})_{\min} \tag{2.4}$$

Říkáme, že tento řetězec přísluší systému $\{A_1/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega\}$.

Důkaz: Předně $G_\iota/\Omega \leftrightarrow (A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega = G'_\iota/\Omega$. Podle V 2/2 přípustný rozklad $\overline{G}_{(\iota)}$ na G_ι, příslušný k Ω-projekci $d_{(\iota)\iota}$, je Ω-ekvivalentní s přípustným rozkladem $(\overline{G'_\iota})_\iota = \overline{G}'_{(\iota)}$ na $\overline{G}'_\iota$. Prvky rozkladu $\overline{G}'_{(\iota)}$ jsou tvaru $\bar{a}'_{(\iota)} = (\{a_\iota\} \times \times A_{\iota+1} \times \ldots \times A_\alpha)$. Protože $\mathrm{d}_{(\iota)}$ je prosté Ω-zobrazení G_ι/Ω na G'_ι/Ω, pak v rozšířeném prostém Ω-zobrazení $\mathrm{d}_{(\iota)}^{-1}$ množiny G'_ι/Ω na G_ι/Ω platí $\mathrm{d}_{(\iota)}^{-1}\bar{a}'_{(\iota)} = = \bar{a}_{(\iota)} \in \overline{G}_{(\iota)}$. Speciálně pro $\bar{e}'_{\iota} = (\{e_\iota\} \times A_{\iota+1} \ldots \times A_\alpha)$ platí, že $\mathrm{d}_{(\iota)}^{-1}\bar{e}'_{(\iota)} = = \bar{e}_{(\iota)} = G_{\iota+1} \in \overline{G}_{(\iota)}$. To platí pro každé $\iota = 1, \ldots, \alpha$, položíme-li $G_1 = G$ a $G_{\alpha+1} = \{e\}$. Tím je věta dokázána.

Poznámka 1/4: Všimněme si, že pro rozšířenou Ω-projekci $\mathrm{d}_{(\iota)\iota}$ množiny G_ι na A_ι platí $d_{(\iota)\iota}\{G_{\iota+1}\} = \{e_\iota\}$.

V 3/4: Nechť d je prosté Ω-zobrazení množiny G/Ω na $(A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ a nechť A_ι/Ω je jednoduchá množina pro $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Nechť dále platí předpoklady a označení z V 2/4. Pak přípustný rozklad $\overline{G}_{(\iota)}$ na $G_\iota \subset G$ je jednoduchý, a tedy je jednoduchý vzhledem k pomnožině $G_{\iota+1} \in \overline{G}_{(\iota)}$ pro $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

Důkaz: Je-li $d_{(\iota)}$ prosté Ω-zobrazení množiny $G_{(\iota)}$ na $(A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)$, pak přípustný rozklad $\overline{G}_{(\iota)}$ na G_ι, příslušný k indukovanému Ω-zobrazení $\mathrm{d}_{(\iota)\iota}$ množiny G_ι na A_ι, je podle V 2/2 Ω-ekvivalentní s A_ι. Poněvadž A_ι je jednoduchá množina, proto také je $\overline{G}_{(\iota)}$ přípustný jednoduchý rozklad. Protože podle důkazu V 2/4 je $G_{\iota+1}$ prvkem rozkladu $\overline{G}_{(\iota)}$, proto je $\overline{G}_{(\iota)}$ jednoduchý rozklad vzhledem k množině $G_{\iota+1}$ pro $\iota = 1, \ldots, \alpha$, kde $G_{\alpha+1} = e$.

V 4/4: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ je direktní rozklad množiny G/Ω a nechť A_ι, $\iota = 1, \ldots, \alpha$, je jednoduchá množina, pro niž platí card $A_\iota > 1$. Nechť dále platí předpoklady a označení z V 2/4. Pak

a) G/Ω je direktně zcela rozložitelná,

b) řetězec (2.4) od G do $\{e\}$ je komposiční řetězec.

Důkaz: a) je správné podle V 5/3.

b) Podle V 3/4 je každý člen $\overline{G}_{(\iota)}$ řetězce (2.4) od G do $\{e\}$ přípustná jednoduchý rozklad vzhledem k $G_{\iota+1}$. Zbývá dokázat, že (2.4) je řetězec bez opakování. Kdyby však např. pro $\iota < \varkappa$ bylo $G_\iota = G_\varkappa$, pak by bylo jednak $G_\iota \leftrightarrow (\{e_1\} \times \ldots \times \{e_{\iota-1}\} \times A_\iota \times \ldots A_\alpha) \leftrightarrow (A_\iota \times \ldots \times A_\alpha)$, $G_\varkappa \leftrightarrow (\{e_1\} \times \times \ldots \times \{e_\iota\} \times \ldots \times \{e_{\varkappa-1}\} \times A_\varkappa \times \ldots \times A_\alpha) \leftrightarrow (\{e_\iota\} \times \ldots \times \{e_{\varkappa-1}\} \times \times A_\varkappa \times \ldots \times A_\alpha)$ a jednak $G_\iota = G_\varkappa$. Odtud by plynulo $(A_\iota \times \ldots \times A_{\varkappa-1} \times \times A_\varkappa \times \ldots \times A_\alpha) \leftrightarrow (\{e_\iota\} \times \ldots \times \{e_{\varkappa-1}\} \times A_\varkappa \times \ldots \times A_\alpha)$. Pak by muselo platit $\{e_\iota\} \leftrightarrow A_\iota, \ldots, \{e_{\varkappa-1}\} \leftrightarrow A_{\varkappa-1}$, a tedy by muselo být card $A_\iota = \ldots = =$ card $A_{\varkappa-1} = 1$, což je spor s předpokladem.

V 5/4: Nechť $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega = A^{[\alpha]}/\Omega$, $G/\Omega \leftrightarrow (B_1 \times \ldots \times \times B_\beta)/\Omega = B^{[\beta]}/\Omega$ jsou direktní rozklady množiny G/Ω a nechť A_ι, $B_\varkappa$ jsou jednoduché množiny, pro něž platí card $A_\iota > 1$, card $B_\varkappa > 1$ pro $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$. Dále budiž e přípustný prvek v G, $e \leftrightarrow (e_1, \ldots, e_\alpha) \in A^{[\alpha]}$, $e \leftrightarrow (e'_1, \ldots, e'_\beta) \in B^{[\beta]}$ a

$$[\overline{G}] = \overline{G}_{(1)} \to \overline{G}_{(2)} \to \ldots \to \overline{G}_{(\alpha-1)} \to \overline{G}_{(\alpha)} \tag{2.4}$$

přípustný řetězec od G do $\{e\}$, příslušný k $\{A_1/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega\}$
a

$$[\overline{H}] = \overline{H}_{(1)} \to \overline{H}_{(2)} \to \ldots \to \overline{H}_{(\beta-1)} \to \overline{H}_{(\beta)} \tag{3.4}$$

přípustný řetězec od G do $\{e\}$, příslušný k systému $\{B_1/\Omega, \ldots, B_\beta/\Omega\}$. Jsou-li řetězce $[\overline{G}]$, $[\overline{H}]$ adjungovány, pak G/Ω je direktně zcela rozložitelná a uvažované direktní rozklady jsou Ω-ekvivalentní.

Důkaz: Množina G/Ω je direktně zcela rozložitelná podle V 5/3. Podle V 4/4 jsou přípustné řetězce $[\overline{G}]$ a $[\overline{H}]$ kompoziční řetězce od G do $\{e\}$, a tedy podle V 2/1 jsou Ω-ekvivalentní. Existuje tedy silné zobrazení i řetězce $[\overline{G}]$ na $[\overline{H}]$ takové, že když i $\{\overline{G}_{(\iota)}\} = \{\overline{H}_{(\varkappa)}\}$, pak existuje prosté Ω-zobrazení i_ι rozkladu $\overline{G}_\iota$ na $\overline{H}_\varkappa$ takové, že $\mathrm{i}_\iota \{\overline{G}_{\iota+1}\} = \{\overline{H}_{\varkappa+1}\}$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Je tedy $\overline{G}_{(\iota)}/\Omega \leftrightarrow \overline{H}_{(\varkappa)}/\Omega$. Avšak podle V 2/2 je $\overline{G}_{(\iota)}/\Omega \leftrightarrow A_\iota/\Omega$, $\overline{H}_{(\varkappa)}/\Omega \leftrightarrow B_\varkappa/\Omega$, a tedy $A_\iota/\Omega \leftrightarrow B_\varkappa/\Omega$. Definujeme-li nyní zobrazení f složek A_ι na složky $B_\varkappa$ tak, že f $\{A_\iota\} = \{B_\varkappa\}$ právě tehdy, když i $\{\overline{G}_{(\iota)}\} = \{\overline{H}_{(\varkappa)}\}$ a $\overline{G}_{(\iota)} \leftrightarrow A_\iota$, $\overline{H}_{(\varkappa)} \leftrightarrow B_\varkappa$, pak f je silné zobrazení $(A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ na $(B_1 \times \ldots \times B_\beta)/\Omega$ a věta je dokázána.

5. Direktní součiny grupoidů s operátory

Je zřejmé, že všechny pojmy a výsledky z teorie direktních součinů množin s operátory, jak jsou v práci uvedeny, se dají přenést ve smyslu prací [1], [2], [4] a [27] na teorii grupoidů s operátory, jak to bylo ostatně do důsledku provedeno v práci [29]. Také výsledky práce [28] zůstávají v platnosti pro grupoidy s operátory, jak bylo dokázáno v práci [29]. To znamená, že místo o množině s oborem operátorů mluvíme o grupoidu $\mathfrak{G}$ s oborem operátorů Ω, což značíme $\mathfrak{G}/\Omega$. Podobně místo o přípustném rozkladu mluvíme o přípustném faktoroidu $\overline{\mathfrak{G}}/\Omega$ na grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$, místo řetězce přípustných rozkladů uvažujeme řetězec přípustných faktoroidů, místo direktního součinu množin s operátory pak direktní součin grupoidů s operátory, místo Ω-zobrazení uvažujeme Ω-deformaci, místo Ω-ekvivalence pak Ω-izomorfismu atd. Speciálně pak platí věty analogické k V 1/1, V 1/2 a V 5/4.

D 1/5: Nechť $\mathfrak{A}_\iota$ $(\iota = 1, \ldots, \alpha)$ jsou přípustné podgrupoidy grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$. Nechť $\mathfrak{G}/\Omega$ je direktním součinem těchto grupoidů, tj. nechť $\mathfrak{G}/\Omega \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)/\Omega$. Je-li Ω-izomorfismus d grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ na $(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)/\Omega$ dán předpisem $\mathrm{d}a = (a_1, \ldots, a_\alpha)$ tehdy a jen tehdy, když $a = a_1 a_2 \ldots a_\alpha$, $a \in \mathfrak{G}$, $a_\iota \in \mathfrak{A}_\iota$, pak říkáme, že grupoid $\mathfrak{G}/\Omega$ je *vnitřním direktním součinem* svým přípustných podgrupoidů $\mathfrak{A}_l/\Omega$ a píšeme $\mathfrak{G}/\Omega = (\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)/\Omega$.

Je-li grupoid $\mathfrak{G}/\Omega$ grupa s oborem operátorů, pak vnitřní direktní součin či rozklad grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ je direktním součinem či rozkladem grupy $\mathfrak{G}$ v obvyklém slova smyslu. V tomto případě jsou $\mathfrak{A}_\iota$ přípustné normální podgrupy v $\mathfrak{G}$ a píšeme také, že

$$\mathfrak{G}/\Omega = (\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_\alpha)/\Omega$$

V 1/5: Nechť $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ jsou přípustné podgrupy v grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $\mathfrak{C}$ je normální podgrupa v $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ normální podgrupa v $\mathfrak{C}$. Pak přípustné faktorové grupy $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ jsou adjungovány vzhledem k podgrupám $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$.

Důkaz: Předně $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}/_l\mathfrak{D}$ jsou přípustné faktorové grupy ([27], str. 59) a pro levé rozklady platí $\mathfrak{A}/_l\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}/_l\mathfrak{D} = \mathfrak{L}/\mathfrak{D}$ a průniky $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ jsou přípustné podgrupy. Jak je známo ([1], str. 184) jsou $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})$, $(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{B})$ normální podgrupy v $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})$, a jsou tedy $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D})$, $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ navzájem zaměnitelné. Pak faktorové grupy $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ jsou adjungovány vzhledem k $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ ([1], str. 172) a věta je dokázána.

Uvědomíme-li si, že všechny přípustné faktorové grupy na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ jsou vytvářeny právě všemi přípustnými normálními podgrupami grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ ([27], str. 60), že $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathrm{m\,n}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{E}$, kde $\mathfrak{E}$ je jednotková podgrupa v $\mathfrak{G}$ a že grupa $\mathfrak{G}/\Omega$ je jednoduchá tehdy a jen tehdy, když $\overline{\mathfrak{G}}_{\max} = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}$ a $\overline{\mathfrak{G}}_{\min} = \mathfrak{G}/\mathfrak{E}$ jsou jediné přípustné faktoroidy na $\mathfrak{G}$ (viz D 10/1), pak vzhledem k větě V 1/5 dostáváme jako důsledek věty V 5/4 tento výsledek.

V 2/5: Nechť $\mathfrak{G}/\Omega$ je direktně rozložitelná grupa, tj. nechť $\mathfrak{G}/\Omega = (\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)/\Omega$ a nechť pro každou podgrupu ${}^{(\iota)}\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{\iota-1} \times \mathfrak{A}_{\iota+1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)$ platí, že ${}^{(\iota)}\mathfrak{A} \neq e$, tj. $\overline{\mathfrak{G}}_\iota = \mathfrak{G}/{}^{(\iota)}\mathfrak{A} \neq \mathfrak{G}_{\mathrm{m\,n}}$ pro $\iota = 1, \ldots, \alpha$. Nechť $\mathfrak{G}/\Omega = (\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta)/\Omega$ je rovněž direktní rozklad grupy $\mathfrak{G}$. Dále buďte $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ jednoduché přípustné podgrupy a card $\mathfrak{A}_\iota > 1$, card $\mathfrak{B}_\varkappa > 1$ ($\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$). Pak grupa $\mathfrak{G}/\Omega$ je direktně zcela rozložitelná a uvedené direktní rozklady jsou Ω-izomorfní.

To znamená, že a) podgrupy $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ jsou direktně nerozložitelné a b) existuje prosté zobrazení i faktorů $\mathfrak{A}_\iota$ na faktory $\mathfrak{B}_\varkappa$ takové, že když je i $\{\mathfrak{A}_\iota\} = \{\mathfrak{B}_\varkappa\}$, pak $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ jsou Ω-izomorfní grupy.

Důkaz: Položíme-li $\mathfrak{G}_\iota = (\mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)$, $\mathfrak{H}_\varkappa = (\mathfrak{B}_\varkappa \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta)$, $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$, pak

$$[\overline{\mathfrak{G}}] = \mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2 \rightarrow \mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_3 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathfrak{G}_{\alpha-1}/\mathfrak{G}_\alpha \rightarrow \mathfrak{G}_\alpha/\{e\}$$

a

$$[\overline{\mathfrak{H}}] = \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_3 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathfrak{H}_{\beta-1}/\mathfrak{H}_\beta \rightarrow \mathfrak{H}_\beta/\{e\},$$

kde $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1$ jsou kompoziční řetězce od $\mathfrak{G}$ do $\{e\}$, jak se dá dokázat ([29], str. 134). Protože $\mathfrak{G}_\iota = (\mathfrak{A}_\iota \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)$, $\mathfrak{H}_\varkappa = (\mathfrak{B}_\varkappa \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta)$ jsou přípustné normální podgrupy v $\mathfrak{G}$, proto $\overline{\mathfrak{G}}_{(\iota)} = \mathfrak{G}_\iota/\mathfrak{G}_{\iota+1}$ a $\overline{\mathfrak{H}}_{(\varkappa)} = \mathfrak{H}_\varkappa/\mathfrak{H}_{\varkappa+1}$ jsou přípustné adjungované faktorové grupy vzhledem k $\mathfrak{G}_{\iota+1}$, $\mathfrak{H}_{\varkappa+1}$ s přihlédnutím k V 1/5. Oba řetězce $[\overline{\mathfrak{G}}]$, $[\overline{\mathfrak{H}}]$ mají stejné konce, a tedy podle V 5/4, D 3/3 a s přihlédnutím k tomu, že místo množin, rozkladů a Ω-ekvivalence uvažujeme grupoidy, faktoroidy a Ω-izomorfismus, je věta dokázána.

Závěr

Pro informaci bych chtěl říci, že uvedené výsledky z teorie direktních součinů množin s operátory, jak jsme je v práci uvedl, jsou jen určitou částí práce [29]. Ke studiu direktních součinů je možno přistoupit i jiným způsobem než na základě teorie řetězců rozkladů. To bylo také učiněno v práci [29] a tím byl získán zase poněkud jiný pohled na tuto teorii. Chtěl bych jenom poznamenat, že z tohoto druhého hlediska byly direktní součiny v práci [29] studovány mnohem podrobněji. Bylo tak dosaženo některých výsledků, které jsou obecnější než jim odpovídající poznatky z teorie grup. Věty V 1/1 a V 2/1 mají svůj název odtud, že v teorii grup v nich specializací dostáváme známou větu Schreierovu a Jordan-Hölderovu pro normální a kompoziční řady.

LITERATURA

[1] *Borůvka, O.:* Základy teorie grupoidů a grup, Praha, 1962.
[2] *Borůvka, O.:* Grundlagen der Gruppoid — und Gruppentheorie, Berlin, 1960.
[3] *Borůvka, O.:* Über Ketten von Faktoroiden, Math. Ann. 118 (1941—1943), str. 41 až 64.
[4] *Borůvka, O.:* Décompositions dans les ensembles et théorie des groupoïdes, Séminaires Dubreil—Pisot, přednáška 8. 5. 1963, Paříž.
[5] *Birkhof, G.:* Těorija struktur, Moskva, 1962.
[6] *Burbaki, N.:* Algebra, Moskva, 1962.
[7] *Dubreil, P.—M. L. Dubreil-Jacotin,* Lécons d'algebre moderne, Paris, 1961.
[8] *Choll, M.:* Těorija grupp, Moskva, 1962.
[9] *Ivan, J.:* O direktnom súčině pologrúp, Mat.-fyzikálny čas., 1953, str. 57—66.
[10] *Ivan, J.:* O rozkladu jednoduchých pologrúp v direktýn súčin, Mat.-fyzikálny čas., 1954, str. 181—202.
[11] *Jakubík, J.:* Direktné súčiny sväzov, disertační práce, přír. fak. University J. A. Komenského, Bratislava, 1950.
[12] *Jakubík, J.:* Prjamyje razloženija častočno uporjadymich grupp, ČMŽ, 1950 (str. 231—243), 1961 (str. 490—515).
[13] *Kořínek, V.:* Sur la décomposition d'une groupe en produit direct des sous-groupes, Čas. mat.-fyzikální, 66 (1937), str. 261—286, 67 (1938), str. 209—211.
[14] *Kochendörfer, R.:* Einführung in die Algebra, Berlin, 1962.
[15] *Kuroš, A. G.:* Těorija grupp, Moskva, 1953.
[16] *Kurosch, A. G.:* Gruppentheorie, Berlin, 1953.
[17] *Kuroš, A. G.:* Lekcii po obščej algebre, Moskva, 1962.
[18] *Kurosch, A. G.:* Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, Math. Ann. 106 (1932), str. 107—113.
[19] *Lenz, H.:* Grundlagen der Elementarmathematik, Berlin, 1961.
[20] *Ljapin, E. S.:* Polugruppy, Moskva, 1960.
[21] *Livšic, A. Ch.:* Prjamyje razloženija s něrazložimymi slagajemymi v algebraičeskich kategorijach, Mat. sb. 51 (1960), str. 427—458.
[22] *Pontrjagin, L. S.:* Topologische Gruppen I, II, Berlin, 1956, 1957.
[23] *Rédei, L:* Algebra I, Leipzig, 1959.
[24] *Sade, A.:* Produit direct singulier des quasigroupes orthogonaux et anti-abéliens, Ann., de la Soc. Sc. de Bruxelle, T. 74, n° II, str. 91—99.
[25] *Sikorski, R.:* Products of abstract algebras, Fundamenta math. 39 (1952), str. 212 až 228.
[26] *Slominski, J.:* The theory of abstract algebras with infinitary operations, Rozprawy matematyczne, XVIII (1959), Warszawa, str. 3—66.

[27] *Sedláček, L.:* Grupoidy a grupy s operátory, Acta Universitatis Palackianae, fac. rer. nat., T. 7 (1961), str. 33—66.
[28] *Sedláček, L.:* Univerzální algebry, Acta Universitatis Palackianae, fac. rer. nat., T. 15 (1964), str. 39—68.
[29] *Sedláček, L.:* Direktní součiny grupoidů s operátory, habilitační práce, přír. fak. University Palackého, Olomouc, 1964.
[30] *Szász, G.:* Einführung in die Verbandstheorie, Leipzig, 1962.
[31] *Van der Waerden, B. L.:* Algebra I, II, Berlin, 1955.

ZUSAMMENFASSUNG

ANWENDUNG DES VERALLGEMEINERTEN SATZES VON JORDAN-HÖLDER IN DER THEORIE DER DIREKTEN PRODUKTE VON MENGEN MIT OPERATOREN

LADISLAV SEDLÁČEK

In vorliegender Arbeit werden einige Eigenschaften der direkten Produkte von Mengen mit Operatoren mittels der Theorie zulässiger Zerlegungen und Ketten von Zerlegungen bewiesen. Die ganze Theorie kann man leicht auf die der Gruppoide übertragen, was auch in [29] geschehen ist. Sätze V 3/3 und V 5/4 sind die wichtigsten Ergebnisse vorligender Arbeit. Der Satz V 5/4 gibt dann in der Gruppentheorie den bekannten Satz V 2/5. Dabei möchte ich auch auf den verallgemeinerten Satz von Scheier (V 1/1) und den von Jordan-Hölder (V 2/1) für Mengen mit Operatoren aufmerksam machen, denn eben diese beiden haben den Beweis des Satzes V 5/4 ermöglicht. In der Gruppentheorie bekommt man durch Spezializierung von V 1/1 und V 2/1 den bekannten Satz von Schreier und den von Jordan-Hölder über Normalreihen von Untergruppen. Die Beweise dieser Sätze werden in der Arbeit [28] für Universalalgebren und in [29] für Mengen mit Operatoren durchgeführt. Weitere Eigenschaften der direkten Produkte von Mengen und Gruppoiden mit Operatoren, die reicher sind und von einem anderen Standpunkt aus untersucht werden, sind in der Arbeit [29] enthalten. Die vorliegende Arbeit setzt die Kenntnis der Grundbegriffe und Grundeigenschaften der Arbeiten [1], [2], [3], sowie [27] und [28] voraus, trotzdem werden sie wichtigsten in § 1 neuerwähnt. Im Folgenden werden die wichtigsten Definitionen und Resultate der Arbeit angeführt.

D 1/1: Es sei G eine nicht leere Menge und Ω ein nicht leeres System von Operatoren. Es sei jedem geordneten Paare (a, ω), $a \in A$, $\omega \in \Omega$, ein bestimmtes Element $b \in G$ zugeordnet, was wir mit $a\omega = b$ ausdrücken. Dann sagen wir, dass *die Menge G den Operatorenbereich Ω besitzt*, was wir mit G/Ω bezeichnen. Eine nicht leere *Untermenge A* aus G/Ω heisst *zulässig*, wenn $A\ \Omega \subset A$ gilt. Ein *Element* $e \in G/\Omega$ heisst *zulässig*, wenn $e\Omega = e$ gillt.

V 1/1: (Eine *Verallgemeinerung des Satzes von Schreier*): Je zwei adjungierte Ketten $[K] = K_1 \to K_2 \to \ldots \to K_\alpha$, $[\bar{L}] = \bar{L}_1 \to \bar{L}_2 \to \ldots \to \bar{L}_\beta$ von zulässigen Zerlegungen besitzen Ω-äquivalente Verfeinerungen in G/Ω.

V 2/1: (*Eine Verallgemeinerung des Satzes von Jordan-Hölder*): Es seien $[\overline{K}]$, $[\overline{L}]$ zulässige adjungierte Kompositionsketten der zulässigen Untermenge A in bezug auf die zulässige Untermenge $B \subset A$ in G/Ω. Dann sind $[\overline{K}]$, $[\overline{L}]$ Ω-äquivalent.

D 1/2: Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, G(α eine natürliche Zahl) Mengen mit dem Operatorenbereich Ω und es gelte für jedes Element $(a_1, a_2, \ldots, a_\alpha) \in \in (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\alpha)$ und jedes $\omega \in \Omega$ die Beziehung $(a_1, a_2, \ldots, a_\alpha)\, \omega = = (a_1\omega, a_2\omega, \ldots, a_\alpha\omega)$. Wenn es eine eineindeutige Ω-Abbildung d der Menge G/Ω auf die Menge $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$ gibt, so sagt man, dass G/Ω ein *direktes Produkt der Mengen* A_1/Ω, A_2/Ω, $\ldots$, A_α/Ω ist und man schreibt $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$.

D 1/3: *Unter einer direkt zerlegbaren Menge* G/Ω verstehen wir eine Menge G/Ω, die so beschaffen ist, dass

a) G/Ω ein direktes Produkt von $A_1/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega$, d.h. $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times \times A_\alpha)/\Omega$ ist,

b) jede Zerlegung $\overline{G}_\iota$, die zu der Ω-Projektion von G/Ω auf A_ι/Ω zugehört, von der kleinsten Zerlegung $\overline{G}_{\min}$ auf G verschieden ist, d. h. $\overline{G}_\iota \neq \overline{G}_{\min}$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

V 3/3: Eine Menge G/Ω ist direkt zerlegbar dann und nur dann, wenn nichttriviale, stark komplementäre zulässige Zerlegungen $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ auf G/Ω existieren. In diesem Falle gilt die Beziehung $G/\Omega \longleftrightarrow (\overline{A}_1 \times \overline{A}_2)/\Omega$.

D 2/3: Eine direkt zerlegbare Menge G/Ω heisst ***direkt vollständig zerlegbar,*** wenn noch die Bedingungen c) und d) gelten:

c) A_ι/Ω ist eine direkt unzerlegbare Menge,

d) die Kardinalzahl card $A_\iota > 1$

für $\iota = 1, \ldots, \alpha$.

V 5/4: Es seien $G/\Omega \leftrightarrow (A_1 \times \ldots \times A_\alpha)/\Omega$, $G/\Omega \leftrightarrow (B_1 \times \ldots \times B_\beta)/\Omega$ die direkten Zerlegungen von G/Ω, A_ι/Ω, $B_\varkappa/\Omega$ einfache Mengen, card $A_\iota > 1$, card $B_\varkappa > 1$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$ und e ein zulässiges Element in G. Es seien weiter $[\overline{G}] = \overline{G}_{(1)} \to \overline{G}_{(2)} \to \ldots \to \overline{G}_{(\alpha)}$, bzw. $[\overline{H}] = \overline{H}_{(1)} \to \overline{H}_{(2)} \to \ldots \to \overline{H}_{(\beta)}$ die zu dem System $\{A_1/\Omega, \ldots, A_\alpha/\Omega\}$, bzw. $\{B_1/\Omega, \ldots, B_\beta/\Omega\}$ von G nach e zugehörigen Ketten. Dann ist G/Ω vollständig direkt zerlegbar und wenn die Ketten $[\overline{G}]$, $[\overline{H}]$ adjungiert sind, sind die betrachteten Zerlegungen Ω-äquivalent.

Gehen wir von der Theorie der Mengen mit Operatoren auf die der Gruppoide mit Operatoren über und nehmen wir für ein Gruppoid eine Gruppe mit Operatoren in Betracht. Setzen wir weiter voraus, dass die Gruppen $\mathfrak{A}_\iota/\Omega$ aus dem direkten Produkt $\mathfrak{G}/\Omega \leftrightarrow (\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\alpha)/\Omega$ die normalen zulässigen Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}/\Omega$ sind, dann bekommen wir aus der Definition D 1/3 die Definition der direkten Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}/\Omega$ im gewöhnlichen Sinne. Der Satz V 5/4 gibt dann den Satz

V 2/5: Es sei $\mathfrak{G}/\Omega$ eine direkt zerlegbare Gruppe und $\mathfrak{G}/\Omega = (\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \times \mathfrak{A}_\alpha)/\Omega$, $\mathfrak{G}/\Omega = (\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_\beta)/\Omega$ ihre direkten Zerlegungen. Es seien $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ ihre einfachen Untergruppen und card $\mathfrak{A}_\iota > 1$, card $\mathfrak{B}_\varkappa > 1$ für $\iota = 1, \ldots, \alpha$, $\varkappa = 1, \ldots, \beta$. Dann ist $\mathfrak{G}/\Omega$ direkt vollständig zerlegbar und die betrachteten Zerlegungen sind Ω-isomorph, d. h. es gibt eine eineindeutige Abbildung i der Faktoren $\mathfrak{A}_\iota$ auf die Faktoren $\mathfrak{B}_\varkappa$ der Beschaffenheit, dass die Untergruppen $\mathfrak{A}_\iota$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ Ω-isomorph sind, wenn i $\{\mathfrak{A}_\iota\} = \{\mathfrak{B}_\varkappa\}$ gilt.