Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Stanislav Trávníček

Splývání speciálních transformací a jeho souvislost s teorií dispersí

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 9 (1968), No. 1, 69--91

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119895`

1968 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 27

SPLÝVÁNÍ SPECIÁLNÍCH TRANSFORMACÍ A JEHO SOUVISLOST S TEORIÍ DISPERSÍ

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Mř. prof. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

STANISLAV TRÁVNÍČEK

(Došlo dne 15. 6. 1967)

Věnováno p. prof. dr. O. Borůvkovi k 70. narozeninám

Autor se ve své práci [4] zabýval lineárními transformacemi soustav dvou homogenních lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. V tomto článku se pojednává o podmínkách pro splývání speciálních transformací a jeho souvislosti s dispersemi, jež byly na základě [1] definovány pro soustavy diferenciálních rovnic v práci [2].

1. Uvažujeme soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} y_1' &= b(t)\, y_2 \\ y_2' &= c(t)\, y_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \dot{Y}_1 &= B(T)\, Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= C(T)\, Y_1 \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

kde funkce $b(t)$, $c(t)$ [$B(T)$, $C(T)$] jsou spojité v intervalu j [J].

V [4] byla zkoumána lineární transformace $\mathbf{A}$ řešení soustavy (A) na řešení soustavy (a) ve tvaru

$$\mathbf{A}Y = y(t) = K(t)\, Y[Z(t)], \qquad (1)$$

kde

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad Y(T) = \begin{pmatrix} Y_1(T) \\ Y_2(T) \end{pmatrix}, \qquad K(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix},$$

kde $Z(t)$ je funkce, která zobrazuje interval $i \subset j$ na interval $I \subset J$, přičemž daný bod $t_0 \in j$ zobrazuje na daný bod T_0 ($= Z_0$) intervalu J a má spojitou derivaci $Z'(t) \neq 0$ pro $t \in i$, a kde funkce $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ jsou definovány a mají spojité derivace v intervalu i. Vidíme tedy, že sgn $Z'(t)$ je konstantní v intervalu I (dále píšeme jen sgn Z').

Ukázalo se, že k existenci transformace $\mathbf{A}$ je nutné a stačí, aby prvky matice $K(t)$ spolu s funkcí $Z(t)$ hověly soustavě

$$\left.\begin{aligned} \alpha'(t) &= -C[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta(t) + b(t)\, \gamma(t) \\ \beta'(t) &= -B[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha(t) + b(t)\, \delta(t) \\ \gamma'(t) &= c(t)\, \alpha(t) - C[Z(t)]\, Z'(t)\, \delta(t) \\ \delta'(t) &= c(t)\, \beta(t) - B[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Poznámka 1,1. Pro danou funkci $Z(t)$ je (2) soustavou čtyř lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, takže libovolnými počátečními hodnotami α_0, β_0, γ_0, δ_0 jsou jednoznačně definovány funkce $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ tak, že vyhovují počátečním podmínkám

$$\alpha(t_0) = \alpha_0, \quad \beta(t_0) = \beta_0, \quad \gamma(t_0) = \gamma_0, \quad \delta(t_0) = \delta_0. \tag{K*}$$

Transformaci $\mathbf{A}$, v níž platí $\alpha(t) \equiv 0$ [$\beta(t) \equiv 0$, $\gamma(t) \equiv 0$, $\delta(t) \equiv 0$] nazveme *transformace typu* $A_\alpha[A_\beta, A_\gamma, A_\delta]$ a označíme ji $\mathbf{A}_\alpha[\mathbf{A}_\beta, \mathbf{A}_\gamma, \mathbf{A}_\delta]$. Je-li transformace $\mathbf{A}$ současně typu A_β a $A_\gamma(A_\alpha$ a $A_\delta)$, nazveme ji *transformace typu* $A_{\beta\gamma}(A_{\alpha\delta})$. V dalším se budeme zabývat jen regulárními transformacemi; žádné další speciální typy transformací [ve smyslu anulování prvků matice $K(t)$] tedy neexistují. Z definice vidíme, že pro transformaci typu $A_{\beta\gamma}(A_{\alpha\delta})$ platí $\beta(t) \equiv 0, \gamma(t) \equiv 0$ [$\alpha(t) \equiv 0$, $\delta(t) \equiv 0$].

Jestliže za daných podmínek každá transformace typu A_β je též typu A_γ a každá transformace typu A_γ je rovněž typu A_β, pak říkáme, že za daných podmínek *transformace typu* A_β, A_γ *splývají* (v transformaci typu $A_{\beta\gamma}$). Podobně budeme mluvit o splývání transformací typu A_α, A_δ.

V 1. části této práce se budeme dále zabývat transformacemi typu A_β, A_γ a problémem jejich splývání. Poznamenejme, že pro stručnost budeme používat označení $Z'^2(t) = [Z'(t)]^2$, $\alpha^2(t) = [\alpha(t)]^2$, apod.

Věta 1,1. *Jestliže transformace* $\mathbf{A}$ *je typu* $A_{\beta\gamma}$, *pak platí*:

a) $\alpha(t) = (\alpha =)$ *konst.* $\neq 0$, $\delta(t) = (\delta =)$ *konst.* $\neq 0$;

b) funkce $Z(t)$ *splňuje rovnice*

$$\left.\begin{aligned} B[Z(t)]\, Z'(t) &= \frac{\delta}{\alpha}\, b(t) \\ C[Z(t)]\, Z'(t) &= \frac{\alpha}{\delta}\, c(t) \end{aligned}\right\}; \tag{3}$$

c) funkce $Z(t)$ *vyhovuje rovnici*

$$B[Z(t)]\, C[Z(t)]\, Z'^2(t) = b(t)\, c(t); \tag{4}$$

d) $Z(\bar{t})$ *je nulovým bodem funkce* $B(T)$ [$C(T)$] *tehdy a jen tehdy, je-li* $\bar{t}$ *nulovým bodem funkce* $b(t)$ [$c(t)$];

e) pro $c(t) \neq 0$ *platí*

$$\frac{B[Z(t)]}{C[Z(t)]} = \frac{\delta^2}{\alpha^2}\, \frac{b(t)}{c(t)} \tag{5}$$

a pro $b(t) \neq 0$ *platí*

$$\frac{C[Z(t)]}{B[Z(t)]} = \frac{\alpha^2}{\delta^2}\, \frac{c(t)}{b(t)}. \tag{6}$$

Důkaz: Při transformaci typu $A_{\beta\gamma}$ je $\beta(t) \equiv 0$, $\gamma(t) \equiv 0$. Z první a ze čtvrté rovnice (2) dostáváme $\alpha'(t) \equiv 0$, $\delta'(t) \equiv 0$, takže $\alpha(t) = (\alpha =)$ *konst.*, $\delta(t) = (\delta =)$ *konst.* Ježto podle [4] je při regulární transformaci $|K(t)| =$ *konst.* $\neq 0$, platí tvrzení *a*. Tvrzení *b* plynou pak ihned ze druhé a třetí rovnice (2) a vynásobením rovnic (3) dostáváme tvrzení *c*. Tvrzení *d* plyne přímo z rovnic (3), a dělíme-li rovnice (3), dostaneme vzhledem k platnosti *d* tvrzení *e*.

Věta 1,2. *Nechť funkce $b(t)$ není identicky rovna nule na žádném podintervalu intervalu i a nechť existuje konstanta $k \neq 0$ taková, že při transformaci typu A_β splňuje funkce $Z(t)$ rovnici*

$$B[Z(t)]\, Z'(t) = k\, b(t). \tag{7}$$

Pak tato transformace je současně typu A_γ.

Důkaz: Z regulárnosti dané transformace typu A_β a ze 2. rovnice (2) plyne, že platí

$$B[Z(t)]\, Z'(t) = \frac{\delta(t)}{\alpha(t)}\, b(t), \tag{8}$$

odkud pro $b(t) \neq 0$ máme

$$\frac{\delta(t)}{\alpha(t)} = k \tag{9}$$

a vzhledem k předpokládané spojitosti funkcí $\alpha(t)$, $\delta(t)$ platí tato rovnost (9) i v bodech, v nichž $b(t) = 0$. Kromě toho z regulárnosti dané transformace plyne podle [4]

$$\alpha(t)\, \delta(t) = konst.\ (=\bar{k}) \neq 0. \tag{10}$$

Jestliže nyní 2. rovnici (2) vynásobíme $\alpha(t)$, dostaneme po úpravě

$$B[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha^2(t) = \bar{k} b(t). \tag{11}$$

takže z rovnic (7) a (11) máme

$$\operatorname{sgn} \bar{k} = \operatorname{sgn} k. \tag{12}$$

Z rovnic (9), (10) nyní dostaneme

$$\alpha^2(t) = \frac{\bar{k}}{k}, \qquad \delta^2(t) = k\,.\,\bar{k}, \tag{13}$$

takže vzhledem ke (12) plyne z (13)

$$\alpha(t) = \pm \sqrt{\frac{\bar{k}}{k}}, \qquad \delta(t) = \pm \sqrt{k\bar{k}}\, \operatorname{sgn} k; \tag{14}$$

jsou tedy $\alpha(t)$, $\delta(t)$ konstantní. Z 1. rovnice (2) pak máme $b(t)\, \gamma(t) = 0$, z čehož pro $b(t) \neq 0$ dostáváme $\gamma(t) = 0$. Ze spojitosti funkce $\gamma(t)$ plyne, že tato rovnost platí i v bodech, v nichž $b(t) = 0$, tedy $\gamma(t) \equiv 0$, c. b. d.

Věta 1,3. *Nechť funkce $c(t)$ není identicky rovna nule na žádném podintervalu intervalu i a nechť existuje konstanta $k \neq 0$ taková, že při transformaci typu A_γ splňuje funkce $Z(t)$ rovnici*

$$C[Z(t)]\, Z'(t) = \frac{1}{k}\, c(t). \tag{15}$$

Pak tato transformace je současně typu A_β.

Důkaz se provádí analogicky jako u věty 1,2.

Poznámka 1,2. Vidíme, že za předpokladů věty 1,2 nebo věty 1,3 platí vždy všechna zbývající tvrzení věty 1.1.

Nazveme M_z množinu všech funkcí $Z(t)$ té vlastnosti, že pro každou funkci $Z(t)$ existuje transformace typu A_β i transformace typu A_γ.

Věta 1,4. *Nechť funkce $b(t)$, $c(t)$ nejsou identicky rovny nule na žádném podintervalu intervalu i a nechť ke každé funkci $Z(t) \in M_z$ existuje konstanta $k \neq 0$ tak, že funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici* (7) *i rovnici* (15). *Pak pro každé $Z(t) \in M_z$ transformace typu A_β, A_γ splývají.*

Důkaz: Tvrzení věty dostaneme užitím vět 1,2 a 1,3 na každý prvek $Z(t) \in M_z$. Poznamenejme, že tvar koeficientů k, $1/k$ v (7), (15) je podle (3) nutnou podmínkou splynutí transformací typu A_β, A_γ.

Věta 1,5. *Nechť funkce $b(t)$, $c(t)$ nejsou identicky rovny nule na žádném podintervalu intervalu i a nechť $\alpha(t) = (\alpha =)$ konst. $\neq 0$. Pak pro každé $Z(t) \in M_z$ transformace typu A_β, A_γ splývají.*

Důkaz: Uvažujme nejprve transformaci typu A_β, tj. $\beta(t) \equiv 0$. Ježto podle [4] je $|K(t)| = konst. \neq 0$, plyne ze vztahu $\alpha(t) = \alpha = konst. \neq 0$, že též $\delta(t) = (\delta =)\ konst. \neq 0$. Ze druhé rovnice (2) dostáváme, že platí první rovnice (3), tedy rovnice tvaru (7). Podle věty 1,2 je pak tato transformace typu A_β současně typu A_γ.

Nechť nyní naopak máme $\gamma(t) \equiv 0$. Pak opět $\delta(t) = (\delta =)$ konst. $\neq 0$ a ze třetí rovnice (2) dostáváme, že platí druhá rovnice (3), tedy rovnice tvaru (15). Podle věty 1,3 je pak daná transformace typu A_γ současně typu A_β.

Věta 1,6. *Nechť existuje číslo $k \neq 0$ takové, že funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnicím* (7), (15). *Pak transformace daná počátečními podmínkami*

$$\alpha(t_0) = \alpha_0, \quad \beta(t_0) = \gamma(t_0) = 0, \quad \delta(t_0) = k\alpha_0,$$

kde $\alpha_0 \neq 0$ je libovolné dané číslo, je typu $A_{\beta\gamma}$.

Důkaz: Lehce vidíme, že funkce $\alpha(t) = \alpha_0$, $\delta(t) = \gamma(t) = 0$, $\delta(t) = k\alpha_0$ vyhovují soustavě (2). Pomocí (7), (15) lze soustavu (2) uvést na tvar, který nezávisí na funkci $Z(t)$, takže podle poznámky 1,1 má soustava (2) právě jen uvedené řešení, tedy daná transformace je typu $A_{\beta\gamma}$.

Lemma 1,1. *Jestliže funkce $b(t)$, $B(T)$ mají spojitou derivaci 1. řádu a platí $b(t)\,B(T) \neq 0$ pro všechna $t \in j$, $T \in J$, a funkce $Z(t)$ má spojité derivace do 2. řádu včetně, pak funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici*

$$Z''(t) = \frac{B[Z(t)]}{b(t)} \left(\frac{b(t)}{B[Z(t)]} \right)' Z'(t) \tag{16}$$

tehdy a jen tehdy, existuje-li konstanta $k \neq 0$ tak, že platí (7).

Důkaz: Nechť platí (7); ježto $b(t) \neq 0$, máme

$$\frac{B[Z(t)]\, Z'(t)}{b(t)} = k \neq 0 \tag{17}$$

a odsud derivací podle t dostaneme

$$\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)} = 0 \tag{18}$$

a po úpravě rovnici (16).

Jestliže naopak $Z(t)$ vyhovuje rovnici (16), platí pro ni rovněž

$$\left(\frac{B[Z(t)]\, Z'(t)}{b(t)}\right)' = 0$$

a vzhledem k tomu, že $B[Z(t)] \neq 0$, $Z'(t) \neq 0$, dostáváme (17), tedy (7).

Lemma 1,2. *Jestliže funkce $c(t)$, $C(T)$ mají spojitou derivaci prvního řádu a platí $c(t)\, C(T) \neq 0$ pro všechna $t \in j$, $T \in J$, a funkce $Z(t)$ má spojité derivace do 2. řádu včetně, pak funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici*

$$Z''(t) = \frac{C[Z(t)]}{c(t)} \left(\frac{c(t)}{C[Z(t)]}\right)' Z'(t) \tag{19}$$

tehdy a jen tehdy, existuje-li konstanta $k \neq 0$ tak, že platí (15).

Důkaz je analogický jako u lemmatu 1,1. Poznamenejme, že vztah (19) je ekvivalentní se vztahem

$$\frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\dot{C}[Z(t)]\, Z'(t)}{C[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)} = 0. \tag{20}$$

Poznámka 1,3. Vidíme, že ve větě 1,2 [1,3] lze podle lemmatu 1,1 [1,2] nahradit rovnici (7) [(15)] rovnicí (16) [(19)].

Označme si nyní předpoklady:

(A_β): Funkce $b(t)$ [$B(T)$] má v intervalu j [J] spojité derivace do 2. řádu včetně a platí $b(t)\; B(T) > 0$ pro všechna $t \in j$, $T \in J$.

(A_γ): Funkce $c(t)$ [$C(T)$] má v intervalu j [J] spojité derivace do 2. řádu včetně a platí $c(t)\; C(T) > 0$ pro všechna $t \in j$, $T \in J$.

O funkci $Z(t)$ budeme dále v této části předpokládat spojitost derivací do 3. řádu včetně.

V [4] bylo dokázáno, že za předpokladů (A_β), $\beta(t) = 0$, má soustava (2) řešení

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(t) &= M \sqrt{\frac{b(t)}{B[Z(t)]}}\, \frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}, \qquad \beta(t) \equiv 0,\\
\gamma(t) &= \frac{M}{2b(t)} \left(\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right) \sqrt{\frac{b(t)}{B[Z(t)]}}\, \frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},\\
\delta(t) &= M \sqrt{\frac{B[Z(t)]}{b(t)}}\, \sqrt{|Z'(t)|}\, \operatorname{sgn} Z',
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

kde $M \neq 0$ je libovolná konstanta a funkce $Z(t)$ je řešením diferenciální rovnice

$$-\{Z, t\} + Q_1(Z)\, Z'^2 = q_1(t), \tag{Q_1, q_1}$$

kde jsme označili

$$\{Z, t\} = \frac{1}{2} \frac{Z'''}{Z'} - \frac{3}{4} \frac{Z''^2}{Z'^2},$$

$$Q_1(T) = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{B}(T)}{B(T)} + \frac{3}{4} \frac{\dot{B}^2(T)}{B^2(T)} + B(T)\, C(T),$$

$$q_1(t) = -\frac{1}{2} \frac{b''(t)}{b(t)} + \frac{3}{4} \frac{b'^2(t)}{b^2(t)} + b(t)\, c(t).$$

Podobně za předpokladů (A_γ), $\gamma(t) \equiv 0$ má soustava (2) řešení

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(t) &= \overline{M}\sqrt{\frac{C[Z(t)]}{c(t)}}\sqrt{|Z'(t)|}\,\operatorname{sgn} Z',\\
\beta(t) &= \frac{\overline{M}}{2c(t)}\left(\frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\dot{C}[Z(t)]\,Z'(t)}{C[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\sqrt{\frac{c(t)}{C[Z(t)]}}\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},\\
\gamma(t) &\equiv 0, \qquad \delta(t) = \overline{M}\sqrt{\frac{c(t)}{C[Z(t)]}}\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

kde opět $\overline{M} \neq 0$ je libovolná konstanta a kde funkce $Z(t)$ je řešením diferenciální rovnice

$$-\{Z, t\} + Q_2(Z)\,Z'^2 = q_2(t), \tag{Q_2, q_2}$$

kde jsme označili

$$Q_2(T) = -\frac{1}{2}\frac{\ddot{C}(T)}{C(T)} + \frac{3}{4}\frac{\dot{C}^2(T)}{C^2(T)} + B(T)\,C(T),$$

$$q_2(t) = -\frac{1}{2}\frac{c''(t)}{c(t)} + \frac{3}{4}\frac{c'^2(t)}{c^2(t)} + b(t)\,c(t).$$

Poznámka 1,4. Za předpokladu (A_β) je podle [2], věty 7, definováno počátečními podmínkami

$$Z(t_0) = Z_0, \qquad Z'(t_0) = Z_0', \qquad Z''(t_0) = Z_0'', \tag{Z*}$$

kde $t_0 \in j$, $Z_0 \in J$, $Z_0' \neq 0$, Z_0'' jsou libovolná čísla, právě jedno (nejširší) řešení rovnice (Q_1, q_1) v jistém intervalu $i \subset j$. Totéž platí i pro řešení rovnice (Q_2, q_2) za předpokladu (A_γ).

Poznámka 1,5. Řešení rovnice (Q_1, q_1) $[(Q_2, q_2)]$ budeme dále zpravidla označovat $Z_1(t)$ $[Z_2(t)]$.

Lemma 1,3. *Nechť platí předpoklad (A_β) a funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici* (7). *Pak rovněž vyhovuje rovnici*

$$-\{Z, t\} + [Q_1(Z) - B(Z)\,C(Z)]\,Z'^2 = q_1(t) - b(t)\,c(t). \tag{23}$$

Důkaz: Zřejmě platí (u funkce $Z(t)$ vynecháváme argument t)

$$B(Z)\,Z' = kb(t)$$

$$\dot{B}(Z)\,Z'^2 + B(Z)\,Z'' = kb'(t)$$

$$\ddot{B}(Z)\,Z'^3 + 3\dot{B}(Z)\,Z'Z'' + B(Z)\,Z''' = kb''(t).$$

Jestliže nyní pomocí těchto vztahů vytvoříme výrazy

$$-\frac{1}{2}\frac{b''(t)}{b(t)}, \qquad \frac{3}{4}\frac{b'^2(t)}{b^2(t)}$$

a sečteme je, dostaneme (23).

Lemma 1,4. *Nechť platí předpoklad (A_γ) a funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici* (15). *Pak rovněž vyhovuje rovnici*

$$-\{Z, t\} + [Q_2(Z) - B(Z)\,C(Z)]\,Z'^2 = q_2(t) - b(t)\,c(t). \tag{24}$$

Důkaz je analogický jako u předchozího lemmatu.

Věta 1,7. *Nechť platí předpoklady* (A_β), (A_γ). *Jestliže existuje konstanta* $k \neq 0$ *tak, že funkce* $Z_1(t)$ $[Z_2(t)]$ *vyhovuje rovnici* (7) [(15)], *pak je* $Z_1(t)$ $[Z_2(t)]$ *rovněž řešením rovnice* (Q_2, q_2) $[(Q_1, q_1)]$.

Důkaz: Tato věta je přímým důsledkem věty 1,2 a 1,3. Lze ji však dokázat i bez použití transformací a to např. takto:

Funkce $Z_1(t)$ vyhovuje vztahu (7), tedy podle lemmatu 1,3 též vztahu (23). Ježto je $Z_1(t)$ řešením rovnice (Q_1, q_1), platí

$$B(Z_1)\, C(Z_1)\, Z_1'^2 = b(t)\, c(t), \tag{25}$$

takže vzhledem k (7) je

$$C(Z_1)\, Z_1' = \frac{1}{k}\, c(t). \tag{26}$$

Podle lemmatu 1,4 plyne z (26), že funkce $Z_1(t)$ splňuje rovnici (24), tedy vzhledem k (25) i rovnici (Q_2, q_2). Podobně se dokáže i druhá část věty.

Věta 1,8. *Nechť platí předpoklady* (A_β), (A_γ) *a existuje číslo* $k \neq 0$ *takové, že funkce* $Z(t)$ *vyhovuje rovnicím* (7), (15). *Pak funkce* $Z(t)$ *je řešením rovnice* (Q_1, q_1) *a současně i rovnice* (Q_2, q_2).

Důkaz: Podle lemmatu 1,3 vyhovuje $Z(t)$ rovnici (23) a z rovnic (7), (15) plyne, že vyhovuje i vztahu (4), tedy $Z(t)$ je řešením (Q_1, q_1). Podobně podle lemmatu 1,4 vyhovuje $Z(t)$ rovnici (24) a vzhledem ke (4) i rovnici (Q_2, q_2).

Řekneme, že řešení rovnic (Q_1, q_1), (Q_2, q_2) jsou zaměnitelná, jestliže každé řešení $Z_1(t)$ rovnice (Q_1, q_1) je současně řešením rovnice (Q_2, q_2) a naopak, každé řešení $Z_2(t)$ rovnice (Q_2, q_2) je současně řešením rovnice (Q_1, q_1).

Věta 1,9. *Nechť platí předpoklady* (A_β), (A_γ). *Nutnou a postačující podmínkou zaměnitelnosti řešení rovnic* (Q_1, q_1), (Q_2, q_2) *je, aby rovnice*

$$Q_1(Z)\, Z'^2 - q_1(t) = Q_2(Z)\, Z'^2 - q_2(t) \tag{27}$$

byla splněna pro všechny funkce $Z_1(t)$ *i* $Z_2(t)$.

Důkaz: Nechť řešení rovnic (Q_1, q_1), (Q_2, q_2) jsou zaměnitelná. Pak pro každé řešení $Z_1(t)$ rovnice (Q_1, q_1) platí rovněž

$$-\{Z_1, t\} + Q_2(Z_1)\, Z_1'^2 = q_2(t), \tag{28}$$

takže z (Q_1, q_1) a (28) plyne, že $Z_1(t)$ vyhovuje rovnici (27). Podobně též každé řešení $Z_2(t)$ rovnice (Q_2, q_2) vyhovuje rovnici (27).

Nechť nyní naopak každá funkce $Z_1(t)$ vyhovuje rovnici (27). Pak po dosazení z (Q_1, q_1) do (27) výrazu

$$\{Z_1, t\} = Q_1(Z_1)\, Z_1'^2 - q_1(t) \tag{29}$$

dostáváme, že je splněno i (28), tedy $Z_1(t)$ je řešením rovnice (Q_2, q_2). Podobně se dokáže, že též každá funkce $Z_2(t)$ hovící vztahu (27) je řešením rovnice (Q_1, q_1), tedy řešení rovnic (Q_1, q_1), (Q_2, q_2) jsou zaměnitelná.

Poznámka 1,6. Rovnici (27) lze psát ve tvaru

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\ddot{B}(Z)}{B(Z)} + \frac{3}{4}\frac{\dot{B}^2(Z)}{B^2(Z)} + \frac{1}{2}\frac{\ddot{C}(Z)}{C(Z)} - \frac{3}{4}\frac{\dot{C}^2(Z)}{C^2(Z)}\right) Z'^2 =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{b''(t)}{b(t)} + \frac{3}{4}\frac{b'^2(t)}{b^2(t)} + \frac{1}{2}\frac{c''(t)}{c(t)} - \frac{3}{4}\frac{c'^2(t)}{c^2(t)}. \tag{30}$$

Lemma 1,5. *Nechť platí předpoklady* (A_β). *Pak k řešení* $Z(t)$ *rovnice* (Q_1, q_1) *danému počátečními podmínkami* (Z^*), *kde* $t_0 \in j$, $Z_0 \in J$, $Z_0' \neq 0$, Z_0'' *jsou libovolně zvolené počáteční hodnoty, je počátečními podmínkami* ($M \neq 0$ *je libovolná konstanta*)

$$\left.\begin{aligned} \alpha(t_0) &= M \sqrt{\frac{b(t_0)}{B(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}, \qquad \beta(t_0) = 0, \\ \gamma(t_0) &= \frac{M}{2b(t_0)} \left(\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{\dot{B}(Z_0) Z_0'}{B(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'} \right) \sqrt{\frac{b(t_0)}{B(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}, \\ \delta(t_0) &= M \sqrt{\frac{B(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|} \operatorname{sgn} Z_0' \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

definována transformace typu A_β.

Důkaz: Pro danou funkci $Z_1(t)$ je soustava (2) soustavou lineárních diferenciálních rovnic. Podle [4] vyhovují funkce $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ dané (21), kde $Z(t) \equiv Z_1(t)$, soustavě (2) a zřejmě splňují počáteční podmínky (31). Podle věty o existenci a jednoznačnosti má soustava (2) za řešení právě funkce dané vzorci (21); jimi určená transformace je ovšem typu A_β.

Lemma 1,6. *Nechť platí předpoklady* (A_γ). *Pak k řešení* $Z(t)$ *rovnice* (Q_2, q_2) *danému počátečními podmínkami* (Z^*), *kde* $t_0 \in j$, $Z_0 \in J$, $Z_0' \neq 0$, Z_0'' *jsou libovolně zvolené počáteční hodnoty, je počátečními podmínkami* ($\overline{M} \neq 0$ *je libovolná konstanta*)

$$\left.\begin{aligned} \alpha(t_0) &= \overline{M} \sqrt{\frac{C(Z_0)}{c(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|} \operatorname{sgn} Z_0', \\ \beta(t_0) &= \frac{\overline{M}}{2c(t_0)} \left(\frac{c'(t_0)}{c(t_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0) Z_0'}{C(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'} \right) \sqrt{\frac{c(t_0)}{C(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}, \\ \gamma(t_0) &= 0, \qquad \delta(t_0) = \overline{M} \sqrt{\frac{c(t_0)}{C(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

definována transformace typu A_γ.

Důkaz je analogický jako u předchozího lemmatu.

Věta 1,10. *Nechť platí předpoklady* (A_β), (A_γ). *Pak* M_z *je množinou všech funkcí* $Z(t)$, *které vyhovují současně rovnicím* (Q_1, q_1), (Q_2, q_2).

Důkaz: Nechť nejprve $Z(t) \in (Q_1, q_1)$ a současně $Z(t) \in (Q_2, q_2)$. Pak podle lemmatu 1,5 a 1,6 existuje k funkci $Z(t)$ transformace typu A_β i transformace typu A_γ, tedy $Z(t) \in M_z$.

Jestliže naopak $Z(t) \in M_z$, znamená to, že k funkci $Z(t)$ existuje transformace typu A_β, tedy podle [4] je $Z(t)$ řešením rovnice (Q_1, q_1), a že k funkci $Z(t)$ existuje rovněž transformace typu A_γ, což podle [4] značí, že $Z(t)$ je řešením rovnice (Q_2, q_2).

Věta 1,11. *Nechť platí předpoklady* (A_β), (A_γ) *a nechť pro* $t_0 \in j$ *v případě, že*

$$\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} \neq \frac{c'(t_0)}{c(t_0)}, \tag{1}$$

existuje Z_0 jako kořen rovnice

$$\frac{1}{b(t_0)\,c(t_0)}\left(\frac{b'(t_0)}{b(t_0)}-\frac{c'(t_0)}{c(t_0)}\right)^2=\frac{1}{B(Z_0)\,C(Z_0)}\left(\frac{\dot B(Z_0)}{B(Z_0)}-\frac{\dot C(Z_0)}{C(Z_0)}\right)^2 \tag{33}$$

$$\left(\text{tedy } \frac{\dot B(Z_0)}{B(Z_0)}\neq\frac{\dot C(Z_0)}{C(Z_0)}\right)$$

a v případě, že

$$\frac{b'(t_0)}{b(t_0)}=\frac{c'(t_0)}{c(t_0)}, \tag{II}$$

existuje Z_0 jako kořen rovnice

$$\frac{\dot B(Z_0)}{B(Z_0)}=\frac{\dot C(Z_0)}{C(Z_0)}. \tag{34}$$

Pak transformace **A** *je typu $A_{\beta\gamma}$ tehdy a jen tehdy, jsou-li počáteční podmínky pro funkce $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ ($M \neq 0$ je libovolná konstanta) tvaru*

$$\left.\begin{aligned}\alpha(t_0)&=(\alpha_0=)\;M\sqrt{\frac{b(t_0)}{B(Z_0)}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}},\\ \beta(t_0)&=\gamma(t_0)=0,\\ \delta(t_0)&=(\delta_0=)\;M\sqrt{\frac{B(Z_0)}{b(t_0)}}\sqrt{|Z_0'|}\,\operatorname{sgn} Z_0',\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

a je-li funkce $Z(t)$ řešením rovnice (Q_1, q_1) a současně i rovnice (Q_2, q_2) (tj. $Z(t) \in M_z$) daným počátečními podmínkami

$$\left.\begin{aligned}Z(t_0)&=Z_0\\ Z'(t_0)&=(Z_0'=)\;\varepsilon\sqrt{\frac{b(t_0)\,c(t_0)}{B(Z_0)\,C(Z_0)}}\\ Z''(t_0)&=(Z_0''=)\;\varepsilon\frac{b'(t_0)}{b(t_0)}\sqrt{\frac{b(t_0)\,c(t_0)}{B(Z_0)\,C(Z_0)}}-\frac{\dot B(Z_0)}{B(Z_0)}\,\frac{b(t_0)\,c(t_0)}{B(Z_0)\,C(Z_0)},\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

přičemž v případě (I) *je Z_0 kořenem rovnice* (33) *a*

$$\varepsilon=\operatorname{sgn}\left[\left(\frac{b'(t_0)}{b(t_0)}-\frac{c'(t_0)}{c(t_0)}\right)\left(\frac{\dot B(Z_0)}{B(Z_0)}-\frac{\dot C(Z_0)}{C(Z_0)}\right)\right] \tag{37}$$

a v případě (II) *je Z_0 kořenem rovnice* (34) *a ε je libovolné z čísel* ± 1.

Důkaz: Nechť $Z(t)$ je řešením rovnice (Q_1, q_1) i rovnice (Q_2, q_2) daným počátečními podmínkami (36). Ježto

$$\frac{b'(t_0)}{b(t_0)}-\frac{\dot B(Z_0)\,Z_0'}{B(Z_0)}-\frac{Z_0''}{Z_0'}=\frac{b'(t_0)}{b(t_0)}-\varepsilon\frac{\dot B(Z_0)}{B(Z_0)}\sqrt{\frac{b(t_0)\,c(t_0)}{B(Z_0)\,C(Z_0)}}$$

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{B(Z_0)\,C(Z_0)}{b(t_0)\,c(t_0)}}\left(\varepsilon\frac{b'(t_0)}{b(t_0)}\sqrt{\frac{b(t_0)\,c(t_0)}{B(Z_0)\,C(Z_0)}}-\frac{\dot B(Z_0)}{B(Z_0)}\,\frac{b(t_0)\,c(t_0)}{B(Z_0)\,C(Z_0)}\right)=0, \tag{38}$$

má $\gamma(t_0)$ tvar (31) a podle lemmatu 1,5 je transformace daná podmínkami (35) typu A_β. Označme nyní $\overline{M} = \varepsilon M$ a poznamenejme, že podle (36) je $\operatorname{sgn} Z_0' = \varepsilon$. Máme

$$\alpha(t_0) = M \sqrt{\frac{b(t_0)}{B(Z_0)}} \sqrt[4]{\frac{B(Z_0)\, C(Z_0)}{b(t_0)\, c(t_0)}} = \overline{M} \varepsilon \sqrt{\frac{C(Z_0)}{c(t_0)}} \sqrt[4]{\frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}} = \overline{M} \varepsilon \sqrt{\frac{C(Z_0)}{c(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|}. \tag{39}$$

Dále v případě (I) platí

$$\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{c'(t_0)}{c(t_0)} = \varepsilon \sqrt{\frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}} \left(\frac{\dot{B}(Z_0)}{B(Z_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)}{C(Z_0)}\right), \tag{40}$$

takže ze vztahu (40) dostáváme dosazením za $\frac{c'(t_0)}{c(t_0)}$

$$\frac{c'(t_0)}{c(t_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)\, Z_0'}{C(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'} = \frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \varepsilon \sqrt{\frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}} \left(\frac{\dot{B}(Z_0)}{B(Z_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)}{C(Z_0)}\right) - \varepsilon \frac{\dot{C}(Z_0)}{C(Z_0)} \sqrt{\frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}} - \varepsilon \sqrt{\frac{B(Z_0)\, C(Z_0)}{b(t_0)\, c(t_0)}} \left(\varepsilon \frac{b'(t_0)}{b(t_0)} \sqrt{\frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}} - \frac{\dot{B}(Z_0)}{B(Z_0)} \frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}\right) = 0. \tag{41}$$

V případě (II) máme podle (34), (38)

$$\frac{c'(t_0)}{c(t_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)\, Z_0'}{C(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'} = \frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{\dot{B}(Z_0)\, Z_0'}{B(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'} = 0.$$

V obou případech má tedy $\beta(t_0)$ tvar (32). Konečně je

$$\delta(t_0) = M \varepsilon \sqrt{\frac{B(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt[4]{\frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}} = \overline{M} \sqrt{\frac{c(t_0)}{C(Z_0)}} \sqrt[4]{\frac{B(Z_0)\, C(Z_0)}{b(t_0)\, c(t_0)}} = \overline{M} \sqrt{\frac{c(t_0)}{C(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}. \tag{42}$$

Vidíme, že $\alpha(t_0)$, $\beta(t_0)$, $\gamma(t_0)$, $\delta(t_0)$ jsou tvaru (32), takže podle lemmatu 1,6 je daná transformace typu A_γ, tedy typu $A_{\beta\gamma}$.

Uvažujme nyní naopak transformaci typu $A_{\beta\gamma}$. Příslušná funkce $Z(t)$ vyhovuje tedy současně rovnici (Q_1, q_1) i rovnici (Q_2, q_2). Ježto je tato transformace typu A_β, jsou prvky matice $K(t)$ tvaru (21), odkud pro daný bod t_0 dostáváme (31). Ježto je daná transformace současně typu A_γ, platí $\gamma(t) \equiv 0$, tj. též $\gamma(t_0) = 0$; z (31) tak plynou podmínky (35). Z rovnosti $\gamma(t) \equiv 0$ vzhledem k (21) plyne (18) a tedy rovněž

$$\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{\dot{B}(Z_0)\, Z_0'}{B(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'} = 0. \tag{43}$$

Daná transformace je typu A_γ, a proto pro ni platí též vzorce (22), tj. v daném bodě t_0 vzorce (32). Ježto je i typu A_β, nutně platí (20) a z toho

$$\frac{c'(t_0)}{c(t_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)\, Z_0'}{C(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'} = 0, \tag{44}$$

a dále porovnáním vztahů (31) a (32) dostaneme

$$M \sqrt{\frac{b(t_0)}{B(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}} = \bar{M} \sqrt{\frac{C(Z_0)}{c(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|} \operatorname{sgn} Z', \tag{45}$$

$$M \sqrt{\frac{B(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|} \operatorname{sgn} Z' = \bar{M} \sqrt{\frac{c(t_0)}{C(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}. \tag{46}$$

Po vynásobení rovnic (45), (46) dostáváme $M^2 = \bar{M}^2$, z čehož např. podle (45) platí $M = \varepsilon \bar{M}$, kde $\varepsilon = \operatorname{sgn} Z_0'$. Dělením rovnic (45), (46) dostaneme

$$Z_0' = \sqrt{\frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}}. \tag{47}$$

Z rovnic (43), (44) plyne

$$\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{c'(t_0)}{c(t_0)} = \left(\frac{\dot{B}(Z_0)}{B(Z_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)}{C(Z_0)}\right) Z_0'. \tag{48}$$

V případě (I) plyne z rovnice (48) ihned (37) a po dosazení ze (47) do (48) a po umocnění na druhou máme (33). V případě (II) plyne ze (48) rovnost (34). Ze vztahu (47) dostáváme vzorec (36) pro Z_0', kde ovšem v případě (I) je ε určeno výrazem (37) a v případě (II) to může být libovolné z čísel ± 1. Ze vztahu (43) pak s použitím už odvozeného vzorce pro Z_0' dostáváme, že Z_0'' je dáno příslušným výrazem v (36).

Poznámka 1,7. Vidíme, že počáteční hodnotu α_0 pro funkci $\alpha(t)$ lze předepsat. Pak z (35) je

$$M = \alpha_0 \sqrt{\frac{B(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|}. \tag{49}$$

takže

$$\delta(t_0) = \alpha_0 \frac{B(Z_0)}{b(t_0)} Z_0'.$$

Lemma 1,7. *Nechť platí předpoklady (A_β) a nechť jsou dány počáteční hodnoty $t_0 \in j$, $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$, γ_0, $\delta_0 \neq 0$, $Z_0 \in J$ transformace* **A**. *Pak k nim existuje řešení $Z_1(t)$ rovnice (Q_1, q_1) dané počátečními podmínkami*

$$\left.\begin{aligned} Z_1(t_0) &= Z_0 \\ Z_1'(t_0) &= \frac{b(t_0)}{B(Z_0)} \frac{\delta_0}{\alpha_0} \\ Z_1''(t_0) &= \frac{b(t_0)}{B(Z_0)} \frac{\delta_0}{\alpha_0} \left(\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{\dot{B}(Z_0)\, b(t_0)}{B^2(Z_0)} \frac{\delta_0}{\alpha_0} - \frac{2b(t_0)\, \gamma_0}{\alpha_0}\right) \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

takové, že transformace **A** *je typu A_β.*

Důkaz: Ve vztazích (50) označme $Z_1'(t_0) = Z_0'$, $Z_1''(t_0) = Z_0''$. Ukážeme, že čísla Z_0, Z_0', Z_0'' vyhovují při vhodné volbě konstanty M vztahům (31) v tom smyslu, že dostaneme

$$\alpha(t_0) = \alpha_0, \qquad \beta(t_0) = 0, \qquad \gamma(t_0) = \gamma_0, \; \delta(t_0) = \delta_0. \tag{51}$$

Z 1. rovnice (31) po dosazení za Z_0' z (50) máme

$$M = \sqrt{\frac{B(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|}\, \alpha_0 = \sqrt{\frac{B(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt{\frac{b(t_0)}{B(Z_0)}} \sqrt{\left|\frac{\delta_0}{\alpha_0}\right|}\, \alpha_0 = \sqrt{|\alpha_0 \delta_0|}\, \operatorname{sgn} \alpha_0. \tag{52}$$

Nyní se lze pouhým dosazením přesvědčit, že z platnosti (50), je-li M dáno (52), plyne, že je splněno (31), (51). Přitom uvážíme, že sgn $(\alpha_0\delta_0) = \operatorname{sgn} Z'$ (srovnej [5], 3, lemma 4). Úvahou použitou v důkaze lemmatu 1,5 pak dostaneme, že transformace **A** daná počátečními podmínkami (51) a funkcí $Z_1(t)$ danou počátečními podmínkami (50) je typu A_β.

Lemma 1,8. *Nechť platí předpoklady* (A_γ) *a nechť jsou dány počáteční hodnoty* $t_0 \in j$, $\alpha_0 \neq 0$, β_0, $\gamma_0 = 0$, δ_0, $Z_0 \in J$ *transformace* **A**. *Pak k nim existuje řešení* $Z_2(t)$ *rovnice* (Q_2, q_2) *dané počátečními podmínkami*

$$\left.\begin{aligned} Z_2(t_0) &= Z_0, \\ Z_2'(t_0) &= \frac{c(t_0)}{C(Z_0)} \frac{\alpha_0}{\delta_0}, \\ Z_2''(t_0) &= \frac{c(t_0)}{C(Z_0)} \frac{\alpha_0}{\delta_0} \left(\frac{c'(t_0)}{c(t_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)\, c(t_0)}{C^2(Z_0)} \frac{\alpha_0}{\delta_0} - \frac{2c(t)\, \beta_0}{\delta_0} \right) \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

takové, že transformace **A** *je typu* A_γ.

Poznámka 1,8. V 1. části důkazu věty 1,11 jsme použili lemmatu 1,5 a 1,6. Důkaz mohl být veden i na základě lemmatu 1,7 a 1,8. Tato dvě lemnata nám též dokreslují pohled na podmínky existence transformací typu A_β, A_γ a spolu s analogickými lemmaty 2,7 a 2,8 je ještě použijeme ve 3. části této práce.

2. Dosud jsme se zabývali pouze transformacemi typu A_β, A_γ a problémem jejich splývání v transformaci typu $A_{\beta\gamma}$. Všechny věty i všechna lemmata, které byly odvozeny v 1. části, lze bez větších obtíží formulovat i pro transformace typu A_α, A_δ a $A_{\alpha\delta}$. Vzhledem k jejich dalšímu použití se jeví účelné, abychom je v přehledu uvedli (důkazy jsou analogické jako v 1. části a proto je vynecháváme).

Věta 2,1. *Jestliže transformace* **A** *je typu* $A_{\alpha\delta}$, *pak platí*:
a) $\beta(t) = (\beta =)$ *konst.* $\neq 0$, $\gamma(t) = (\gamma =)$ *konst.* $\neq 0$;
b) funkce $Z(t)$ *splňuje vztahy*

$$\left.\begin{aligned} C[Z(t)]\, Z'(t) &= \frac{\gamma}{\beta}\, b(t), \\ B[Z(t)]\, Z'(t) &= \frac{\beta}{\gamma}\, c(t); \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

c) funkce $Z(t)$ *vyhovuje rovnici* (4);
d) $Z(t)$ *je nulovým bodem funkce* $B(T)$ $[C(T)]$ *tehdy a jen tehdy, je-li* t *nulovým bodem funkce* $c(t)$ $[b(t)]$;

e) pro $b(t) \neq 0$ platí

$$\frac{B[Z(t)]}{C[Z(t)]} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \frac{c(t)}{b(t)} \tag{55}$$

a pro $c(t) \neq 0$ platí

$$\frac{C[Z(t)]}{B[Z(t)]} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \frac{b(t)}{c(t)}. \tag{56}$$

Věta 2,2. *Nechť funkce $b(t)$ není identicky rovna nule na žádném podintervalu intervalu i a nechť existuje konstanta $k \neq 0$ taková, že při transformaci typu A_α hoví funkce $Z(t)$ rovnici*

$$C[Z(t)]\, Z'(t) = kb(t). \tag{57}$$

Pak je tato transformace rovněž typu A_δ.

Věta 2,3. *Nechť funkce $c(t)$ není identicky rovna nule na žádném podintervalu intervalu i a nechť existuje konstanta $k \neq 0$ taková, že při transformaci typu A_δ hoví funkce $Z(t)$ rovnici*

$$B[Z(t)]\, Z'(t) = \frac{1}{k}\, c(t). \tag{58}$$

Pak je tato transformace současně typu A_α.

Poznámka 2,1. Za předpokladu věty 2,2 nebo věty 2,3 platí vždy všechna zbývající tvrzení věty 2,1.

Nazveme M_z' množinu všech funkcí $Z(t)$ té vlastnosti, že pro každou funkci $Z(t)$ existuje transformace typu A_α i transformace typu A_δ.

Věta 2,4. *Nechť funkce $b(t)$, $c(t)$ nejsou identicky rovny nule na žádném podintervalu intervalu i a nechť ke každé funkci $Z(t) \in M_z'$ existuje konstanta $k \neq 0$ tak, že funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici* (57) *i rovnici* (58). *Pak pro každé $Z(t) \in M_z'$ transformace typu A_α, A_δ splývají.*

Věta 2,5. *Nechť funkce $b(t)$, $c(t)$ nejsou identicky rovny nule na žádném podintervalu intervalu i a nechť $\beta(t) = (\beta =)$ konst. $\neq 0$. Pak pro každé $Z(t) \in M_z'$ transformace typu A_α, A_δ splývají.*

Věta 2,6. *Nechť existuje číslo $k \neq 0$ takové, že funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnicím* (57), (58). *Pak transformace* **A** *daná počátečními podmínkami*

$$\alpha(t_0) = 0, \qquad \beta(t_0) = \beta_0, \qquad \gamma(t_0) = k\beta_0, \qquad \delta(t_0) = 0,$$

kde $\beta_0 \neq 0$ je libovolné číslo, je typu $A_{\alpha\delta}$.

Lemma 2,1. *Jestliže funkce $b(t)$, $C(T)$ mají spojitou derivaci 1. řádu a platí $b(t)\, C(T) \neq 0$ pro všechna $t \in j$, $T \in J$, a funkce $Z(t)$ má derivace do 2. řádu včetně, pak funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici*

$$Z''(t) = \frac{C[Z(t)]}{b(t)} \left(\frac{b(t)}{C[Z(t)]}\right)' Z'(t), \tag{59}$$

kterou lze psát též ve tvaru

$$\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{C}[Z(t)]\, Z'(t)}{C[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)} = 0, \tag{60}$$

tehdy a jen tehdy, existuje-li konstanta $k \neq 0$ tak, že platí (57).

Lemma 2,2. *Jestliže funkce $c(t)$, $B(T)$ mají spojitou derivaci 1. řádu a platí $c(t)\, B(T) \neq 0$ pro všechna $t \in j$, $T \in J$, a funkce $Z(t)$ má derivace do 2. řádu včetně, pak funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici*

$$Z''(t) = \frac{B[Z(t)]}{c(t)} \left(\frac{c(t)}{B[Z(t)]} \right)' Z'(t), \tag{61}$$

kterou lze psát též ve tvaru

$$\frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)} = 0 \tag{62}$$

tehdy a jen tehdy, existuje-li konstanta $k \neq 0$ tak, že platí (58).

Poznámka 2.2. Ve větě 2,2 [2,3] lze podle lemmatu 2,1 [2,2] nahradit předpoklad, že funkce vyhovuje rovnici (57) [(58)] předpokladem, že vyhovuje rovnici (59) nebo (60) [(61) nebo (62)].

Poznámka 2.3. V [4] se dokázalo, že za předpokladů (A_β) [(A_γ)] má soustava (2) řešení (21) [(22)], kde $Z(t)$ je řešením rovnice (Q_1, q_1) [(Q_2, q_2)]. Jestliže v předpokladech nahradíme nerovnost $b(t)\, B(T) > 0$ [$c(t)\, C(T) > 0$] nerovností $b(t)\, B(T) \neq 0$ [$c(t)\, C(T) \neq 0$], dostaneme vzorce, které se od (21) [(22)] liší jen tím, že v nich vystupují výrazy

$$\sqrt{\left|\frac{b(t)}{B[Z(t)]}\right|} \quad \left[\sqrt{\left|\frac{c(t)}{C[Z(t)]}\right|}\right]$$

a v rovnici pro $\delta(t)$ v (21) [pro $\alpha(t)$ v (22)] přibývá koeficient sgn bB [sgn cC] (ve výrazech se symbolem sgn vynecháváme argumenty t resp. T, které tu nehrají žádnou úlohu, ježto jde vesměs o konstantní činitele). Rovnice (Q_1, q_1) [(Q_2, q_2)] se nemění. Ve třetí části této práce provedeme specialisaci $T \equiv t$, $B(T) \equiv b(t)$, $C(T) \equiv c(t)$, takže v obou případech dostaneme nerovnost $b(t) \neq 0$ [$c(t) \neq 0$]. V případě transformací typu A_α, A_δ by nám setrvání na předpokladech z [4] zužovalo platnost výsledků při uvedené specialisaci, a proto zavedeme předpoklady obecnější. Označme je takto:

(A_α): Funkce $b(t)$ [$C(T)$] má v intervalu j [J] spojité derivace do 2. řádu včetně a platí $b(t)\, C(T) \neq 0$ pro všechna $t \in j$, $T \in J$.

(A_δ): Funkce $c(t)$ [$B(T)$] má v intervalu j [J] spojité derivace do 2. řádu včetně a platí $c(t)\, B(T) \neq 0$ pro všechna $t \in j$, $T \in J$.

O funkci $Z(t)$ nadále předpokládáme, že má spojité derivace do 3. řádu včetně. Na základě [4] lehce ověříme, že za předpokladu (A_α), $\alpha(t) \equiv 0$, má soustava (2) řešení

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha(t) \equiv 0, \qquad \beta(t) = M \sqrt{\left|\frac{b(t)}{C[Z(t)]}\right|}\, \frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},\\
&\gamma(t) = M \sqrt{\left|\frac{C[Z(t)]}{b(t)}\right|}\, \sqrt{|Z'(t)|}\, \operatorname{sgn}(Z'bC),\\
&\delta(t) = \frac{M}{2b(t)} \left(\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{C}[Z(t)]\, Z'(t)}{C[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)} \right) \sqrt{\left|\frac{b(t)}{C[Z(t)]}\right|}\, \frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}.
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

kde $Z(t)$ je řešením rovnice

$$-\{Z, t\} + Q_2(Z)\, Z'^2 = q_1(t). \qquad (Q_2, q_1)$$

Podobně za předpokladů (A_δ), $\delta(t) \equiv 0$, má soustava (2) řešení

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(t) &= \frac{M}{2c(t)}\left(\frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\sqrt{\left|\frac{c(t)}{B[Z(t)]}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},\\
\beta(t) &= M\sqrt{\left|\frac{B[Z(t)]}{c(t)}\right|}\sqrt{|Z'(t)|}\,\operatorname{sgn}(Z'cB),\\
\gamma(t) &= M\sqrt{\left|\frac{c(t)}{B[Z(t)]}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}, \qquad \delta(t) \equiv 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

kde $Z(t)$ je řešením rovnice

$$-\{Z, t\} + Q_1(Z)\, Z'^2 = q_2(t). \qquad (Q_1, q_2)$$

a kde v obou případech je M libovolná konstanta, $M \neq 0$.

Poznámka 2,4. Řešení rovnice (Q_2, q_1) $[(Q_1, q_2)]$ budeme dále zpravidla označovat $Z_3(t)$ $[Z_4(t)]$ a budeme opět uvažovat, že je pro libovolné počáteční hodnoty $t_0 \in j$, $Z_0 \in J$, $Z_0' \neq 0$, Z_0'' definováno počátečními podmínkami (Z^*) v jistém intervalu $i \subset j$.

Lemma 2,3. *Nechť platí předpoklady (A_α) a funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici* (57). *Pak rovněž vyhovuje rovnici*

$$-\{Z, t\} + [Q_2(Z) - B(Z)\, C(Z)]\, Z'^2 = q_1(t) - b(t)\, c(t). \qquad (65)$$

Lemma 2,4. *Nechť platí předpoklady (A_δ) a funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici* (58). *Pak rovněž vyhovuje rovnici*

$$-\{Z, t\} + [Q_1(Z) - B(Z)\, C(Z)]\, Z'^2 = q_2(t) - b(t)\, c(t). \qquad (66)$$

Věta 2,7. *Nechť platí předpoklady (A_α), (A_δ). Jestliže existuje číslo $k \neq 0$ tak, že funkce $Z_3(t)$ $[Z_4(t)]$ vyhovuje rovnici* (57) [(58)], *pak je tato funkce rovněž řešením rovnice (Q_1, q_2) $[(Q_2, q_1)]$.*

Věta 2,8. *Nechť platí předpoklady (A_α), (A_δ) a nechť existuje číslo $k \neq 0$ tak, že funkce $Z(t)$ vyhovuje oběma rovnicím* (57), (58). *Pak funkce $Z(t)$ je řešením současně obou rovnic (Q_1, q_2), (Q_2, q_1).*

Řekneme, že řešení rovnic (Q_2, q_1), (Q_1, q_2) jsou *zaměnitelná*, jestliže každá funkce $Z_3(t)$ je řešením rovnice (Q_1, q_2) a naopak, každá funkce $Z_4(t)$ je současně řešením rovnic (Q_2, q_1).

Věta 2,9. *Nechť platí předpoklady (A_α), (A_δ). Nutnou a postačující podmínkou zaměnitelnosti řešení rovnic (Q_2, q_1), (Q_1, q_2) je, aby rovnice*

$$Q_2(Z)\, Z'^2 - q_1(t) = Q_1(Z)\, Z'^2 - q_2(t) \qquad (67)$$

byla splněna pro všechna řešení rovnice (Q_2, q_1) i pro všechna řešení rovnice (Q_1, q_2).

Lemma 2,5. *Nechť platí předpoklady (A_α). Pak k řešení $Z(t)$ rovnice (Q_2, q_1) danému počátečními podmínkami (Z^*), kde $t_0 \in j$, $Z_0 \in J$, $Z_0' \neq 0$, Z_0'' jsou libovolně* *zvolené počáteční hodnoty, je počátečními podmínkami ($M \neq 0$ je libovolná konstanta)*

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(t_0) = 0, \qquad \beta(t_0) = M\sqrt{\left|\frac{b(t_0)}{C(Z_0)}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}},\\ &\gamma(t_0) = M\sqrt{\left|\frac{C(Z_0)}{b(t_0)}\right|}\sqrt{|Z_0'|}\operatorname{sgn}(Z'bC),\\ &\delta(t_0) = \frac{M}{2b(t_0)}\left(\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)Z_0'}{C(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'}\right)\sqrt{\left|\frac{b(t_0)}{C(Z_0)}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}} \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

definována transformace typu A_α.

Lemma 2.6. *Nechť platí předpoklady (A_δ). Pak k řešení $Z(t)$ rovnice (Q_1, q_2) danému počátečními podmínkami (Z^*), kde $t_0 \in j$, $Z_0 \in J$, $Z_0' \neq 0$, Z_0'' jsou libovolně zvolené počáteční hodnoty, je počátečními podmínkami ($M \neq 0$ je libovolná konstanta)*

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(t_0) = \frac{M}{2c(t_0)}\left(\frac{c'(t_0)}{c(t_0)} - \frac{\dot{B}(Z_0)Z_0'}{B(Z_0)} - \frac{Z_0''}{Z_0'}\right)\sqrt{\left|\frac{c(t_0)}{B(Z_0)}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}},\\ &\beta(t_0) = M\sqrt{\left|\frac{B(Z_0)}{c(t_0)}\right|}\sqrt{|Z_0'|}\operatorname{sgn}(Z'cB),\\ &\gamma(t_0) = M\sqrt{\left|\frac{c(t_0)}{B(Z_0)}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}, \qquad \delta(t_0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

definována transformace typu A_δ.

Věta 2,10. *Nechť platí předpoklady (A_α), (A_δ). Pak M_z' je množinou všech funkcí $Z(t)$, které vyhovují současně rovnicím (Q_2, q_1), (Q_1, q_2).*

Věta 2,11. *Nechť platí předpoklady (A_α), (A_δ) a nechť pro $t_0 \in j$ v případě, že platí* (I) *(viz větu 1,11), existuje Z_0 jako kořen rovnice* (33) *a v případě, že* (II), *existuje Z_0 jako kořen rovnice* (34). *Pak transformace* **A** *je typu $A_{\alpha\delta}$ tehdy a jen tehdy, jsou-li počáteční podmínky pro funkce $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ ($M \neq 0$ je libovolná konstanta) tvaru*

$$\begin{aligned} &\alpha(t_0) = 0,\\ &\beta(t_0) = M\sqrt{\left|\frac{b(t_0)}{C(Z_0)}\right|}\frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}},\\ &\gamma(t_0) = M\sqrt{\left|\frac{C(Z_0)}{b(t_0)}\right|}\sqrt{|Z_0'|}\operatorname{sgn}(Z'bc),\\ &\delta(t_0) = 0 \end{aligned}$$

a je-li funkce $Z(t)$ řešením rovnice (Q_2, q_1) a současně i rovnice (Q_1, q_2) (tj. $Z(t) \in M_z'$) daným počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} &Z(t_0) = Z_0\\ &Z'(t_0) = (Z_0' =)\, \varepsilon\sqrt{\frac{b(t_0)\,c(t_0)}{B(Z_0)\,C(Z_0)}} \end{aligned}$$

$$Z''(t_0) = (Z_0'' =)\, \bar{\varepsilon} \frac{b'(t_0)}{b(t_0)} \sqrt{\frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)}} - \frac{\dot{C}(Z_0)}{C(Z_0)} \frac{b(t_0)\, c(t_0)}{B(Z_0)\, C(Z_0)},$$

přičemž v případě (I) *je* Z_0 *kořenem rovnice* (33) *a* $\bar{\varepsilon} = -\varepsilon$ *z* (37) *a v případě* (II) *je* Z_0 *kořenem rovnice* (34) *a* $\bar{\varepsilon}$ *je libovolné z čísel* ± 1.

Lemma 2,7. *Nechť platí předpoklady* (A_α) *a jsou dány počáteční hodnoty* $t_0 \in j$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$, δ_0, $Z_0 \in J$ *transformace* **A**. *Pak k nim existuje řešení* $Z_3(t)$ *rovnice* (Q_2, q_1) *dané počátečními podmínkami*

$$\left.\begin{aligned} Z_3(t_0) &= Z_0, \\ Z_3'(t_0) &= \frac{b(t_0)}{C(Z_0)} \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \\ Z_3''(t_0) &= \frac{b(t_0)}{C(Z_0)} \frac{\gamma_0}{\beta_0} \left(\frac{b'(t_0)}{b(t_0)} - \frac{\dot{C}(Z_0)\, b(t_0)}{C^2(Z_0)} \frac{\gamma_0}{\beta_0} - \frac{2b(t_0)\, \delta_0}{\beta_0} \right) \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

takové, že transformace **A** je typu A_α.

Lemma 2,8. *Nechť platí předpoklady* (A_δ) *a jsou dány počáteční hodnoty* $t_0 \in j$, α_0, $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$, $Z_0 \in J$ *transformace* **A**. *Pak k nim existuje řešení* $Z_4(t)$ *rovnice* (Q_1, q_2) *dané počátečními podmínkami*

$$\left.\begin{aligned} Z_4(t_0) &= Z_0, \\ Z_4'(t_0) &= \frac{c(t_0)}{B(Z_0)} \frac{\beta_0}{\gamma_0}, \\ Z_4''(t_0) &= \frac{c(t_0)}{B(Z_0)} \frac{\beta_0}{\gamma_0} \left(\frac{c'(t_0)}{c(t_0)} - \frac{\dot{B}(Z_0)\, c(t_0)}{B^2(Z_0)} \frac{\beta_0}{\gamma_0} - \frac{2c(t_0)\, \alpha_0}{\gamma_0} \right) \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

takové, že transformace **A** *je typu* A_δ.

3. Nechť nyní soustava (A) je totožná se soustavou (a). Pak rovnice (1) má tvar

$$\mathbf{A}u = y(t) = K(t)\, u[Z(t)] \tag{1'}$$

a značí tedy jistou transformaci **A** řešení $u(t)$ soustavy (a) na řešení $y(t)$ téže soustavy. Všechny výsledky 1. a 2. části zůstávají ovšem v platnosti (po úpravě formulací, tj. klademe $J \equiv j$, $T \equiv t$, $B(T) \equiv b(t)$, $C(T) \equiv c(t)$, atd.) a pro tento speciální případ je už nebudeme znovu formulovat.

O funkci $Z(t)$ budeme dále předpokládat, že má spojité derivace do 3. řádu včetně, zobrazuje jistý interval $i \subset j$ na jistý interval $I \subset j$, přičemž daný bod $t_0 \in j$ zobrazuje na daný bod $Z_0 \in j$.

O funkci $b(t)$ $[c(t)]$ budeme v otázkách, které se týkají transformací typu A_α, A_β, A_δ $[A_\alpha, A_\gamma, A_\delta]$ předpokládat, že má v intervalu j spojité derivace do 2. řádu a že je $b(t) \neq 0$ $(c(t) \neq 0]$.

Uvažujme nyní rovnice

$$-\{Z, t\} + q_1(Z)\, Z'^2 = q_1(t), \tag{q_1, q_1}$$

$$-\{Z, t\} + q_2(Z)\, Z'^2 = q_2(t), \tag{q_2, q_2}$$

$$-\{Z, t\} + q_2(Z)\, Z'^2 = q_1(t), \tag{q_2, q_1}$$

$$-\{Z, t\} + q_1(Z)\, Z'^2 = q_2(t). \tag{q_1, q_2}$$

Podle [2] jsou to rovnice vlastních dispersí (dále jen „dispersí") po řadě prvního, druhého, třetího a čtvrtého druhu; budeme je označovat zpravidla $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $Z_3(t)$ a $Z_4(t)$.

Lemma 3,1. *Je-li* **A** *transformace typu A_β (A_γ, A_α, A_δ), pak funkce $Z(t)$ v příslušném vzorci* (1′) *je dispersí 1. (2., 3., 4.) druhu.*

Důkaz plyne ihned ze [4]; je-li totiž **A** např. typu A_β, hoví funkce $Z(t)$ nutně rovnici (q_1, q_1) a je tedy dispersí 1. druhu. Podobně dostáváme i ostatní případy.

Lemma 3,2. *Ke každé dispersi $Z(t)$ 1. [2., 3., 4.] druhu (dané počátečními podmínkami* (Z^*)*) je počátečními podmínkami* (31) [(32), (68), (69)] *definována transformace typu A_β [A_γ, A_α, A_δ].*

Důkaz plyne ihned z lemmat 1,5; 1,6; 2,5; 2,6.

Poznámka 3,1. Výsledky těchto dvou lemmat lze shrnout takto: Funkce $Z(t)$ je dispersí 1. (2., 3., 4.] druhu tehdy a jen tehdy, existuje-li k ní transformace typu A_β [A_γ, A_α, A_δ].

Lemma 3,3. *Jsou-li dány počáteční hodnoty $t_0 \in j$, $Z_0 \in j$,*

1° $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$, γ_0, $\delta_0 \neq 0$
2° $\alpha_0 \neq 0$, β_0, $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 \neq 0$
3° $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$, δ_0
4° α_0, $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$

transformace **A**, *pak k nim existuje disperse*

ad 1° 1. druhu vyhovující podmínkám (50) *taková, že transformace* **A** *je typu A_β.*
ad 2° 2. druhu, (51), *A_γ.*
ad 3° 3. druhu, (70), *A_α.*
ad 4° 4. druhu, (71), *A_δ.*

Důkaz: Toto lemma je bezprostředním důsledkem lemmat 1,7; 1,8; 2,7; 2,8.

Poznámka 3,2. Lemma 3,1 nelze obrátit (jak už naznačuje formulace lemmatu 3,3). Ověřme si to na příkladě disperse 1. druhu. Nechť tedy při transformaci **A** je $Z_1(t)$ dispersí 1. druhu; označme $Z_1(t_0) = Z_0$, $Z_1'(t_0) = Z_0'$ (t_0 je pevně zvolený bod). Pak transformace **A**, v níž $Z(t) \equiv Z_1(t)$ ještě nemusí být typu A_β a to ani tehdy, když $\beta_0 = 0$. Jestliže totiž zvolíme počáteční hodnoty transformace třeba tak, že

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 = M \sqrt{\frac{b(t_0)}{b(Z_0)}} \frac{1}{\sqrt{|Z_0'|}}, \qquad \beta_0 = 0, \\ \gamma_0 \text{ je libovolně dané, } \delta_0 = 2M \sqrt{\frac{b(Z_0)}{b(t_0)}} \sqrt{|Z_0'|} \operatorname{sgn} Z'. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

($M \neq 0$), pak funkce $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ vyhovující počátečním podmínkám

$$\alpha(t_0) = \alpha_0, \qquad \beta(t_0) = \beta_0, \qquad \gamma(t_0) = \gamma_0, \qquad \delta(t_0) = \delta_0 \tag{K*}$$

zřejmě v bodě t_0 nesplňují (31). Podle [4] však mají při transformaci typu A_β prvky matice $K(t)$ nutně tvar (21), tedy v bodě t_0 tvar (31). Ježto vzorce (31) pro danou funkci $Z_1(t)$ splněny nejsou, je $\beta(t) \not\equiv 0$. Analogické úvahy lze ovšem provést i pro disperse 2., 3. a 4. druhu.

Ve shodě s poznámkou před větou 1,9 [2,9] a s prací [2] budeme říkat, že disperse 1. a 2. [3. a 4.] druhu jsou zaměnitelné, jestliže každá disperse 1. [3.] druhu je zároveň dispersí 2. [4.] druhu a naopak. Nutná a postačující podmínka zaměnitelnosti dispersí je formulována ve větách 1,9 a 2,9.

Věta 3,1. *Je-li transformace* **A** *typu* $A_{\beta\gamma}$ [$A_{\alpha\delta}$], *je funkce* $Z(t)$ *současně dispersí 1. i 2.* [*3. i 4.*] *druhu.*

Důkaz plyne ihned z poznámky 3,1.

Porovnáme-li větu 3,1 s větami 1,1 a 2,1 vidíme, že vznikají problémy vztahů mezi zaměnitelností dispersí a tvrzeními vět 1,1 a 2,1. Některé tyto problémy byly do jisté míry řešeny už ve [2], ale právě s hlediska transformací soustav a splývání speciálních transformací, o nichž bylo pojednáno v 1. a 2. části této práce, lze dostat některé další výsledky.

Poznámka 3,3. Množina M_z [M'_z], která byla definována v 1. [2.] části, je množinou všech zaměnitelných dispersí 1. a 2. [3. a 4.] druhu, tj. každá funkce $Z(t) \in M_z$ [$Z(t) \in M'_z$] je současně dispersí 1. i 2. [3. i 4.] druhu.

Věta 3,2. *Jestliže existuje konstanta* $k \neq 0$ *tak, že disperse 1.* [*2., 3., 4.*] *druhu vyhovuje rovnici* (7) [(15), (57), (58)], *pak je rovněž dispersí 2.* (*1., 4., 3.*) *druhu.*

Důkaz plyne z vět 1,7 a 2,7.

Tato věta byla už ve [2] dokázána. Vzorce (53), (54), (64), (65) z [2] jsou zřejmě zvláštním případem vzorců (16), (19), (59), (61) z této práce.

Věta 3,3. *Jestliže existuje konstanta* $k \neq 0$ *tak, že funkce* $Z(t)$ *vyhovuje rovnicím* (7), (15) [(57), (58)], *pak funkce* $Z(t)$ *patří do* M_z [M'_z].

Důkaz plyne z vět 1,8 a 2,8.

Poznámka 3,4. V následujícím příkladě si ukážeme, že v množině M_z mohou být i funkce, které nesplňují podmínky (7), (15) (podobně to lze provést i pro M'_z), tedy že věty 3,2, 3,3 nelze obrátit. Přitom místo rovnic (7), (15) použijeme ekvivalentních rovnic (16), (19).

Příklad 3.1. Uvažujme soustavu

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\frac{1}{t^2}\,x_1, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

a nechť $0 \in j$; tedy $b(t) = 1$, $c(t) = -\frac{1}{t^2}$. Lehce zjistíme, že $q_1(t) = q_2(t) = -\frac{1}{t_2}$. Rovnice (q_1, q_1) a (q_2, q_2) mají obě tvar

$$\{Z, t\} + \frac{Z'^2}{Z^2} = \frac{1}{t^2} \tag{74}$$

a tedy zcela jistě disperse 1. druhu a 2. druhu jsou zaměnitelné. Rovnice (74) má např. řešení

$$Z(t) = \frac{a}{t} \tag{75}$$

(a je libovolná konstanta). Podmínky (16), (19) mají tvar

$$Z''(t) = 0, \tag{76}$$

$$Z''(t) = 2Z'(t)\left(\frac{Z'(t)}{Z(t)} - \frac{1}{t}\right), \tag{77}$$

ale funkce $Z(t)$ daná (75), jak lehce zjistíme, nevyhovuje žádné z rovnic (76) (77).

Poznámka 3,5. Podejme ještě vysvětlení k poznámce 3,4 a k příkladu 3,1. Nechť

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}, \tag{x}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{pmatrix}, \tag{X}$$

značí dvě báze soustavy (a). Z [2] víme, že funkce $Z(t)$ je dispersí 1. druhu tehdy a jen tehdy, hoví-li rovnici tvaru

$$X_{11}(t)\, x_{12}[Z(t)] - X_{12}(t)\, x_{11}[Z(t)] = 0 \tag{78}$$

a podobně funkce $Z(t)$ je dispersí 2. druhu tehdy a jen tehdy, hoví-li rovnici tvaru

$$X_{21}(t)\, x_{22}[Z(t)] - X_{22}(t)\, x_{21}[Z(t)] = 0. \tag{79}$$

Princip té skutečnosti, že podmínky (16), (19) nejsou pro zaměnitelnost dispersí 1. a 2. druhu nutné, spočívá v tom, že může nastat případ, že funkce $Z(t)$ vyhovuje rovnici (78) vzhledem k jisté dvojici bází (x), (X), ale rovnici (79) vyhovuje vzhledem k jiné dvojici bází

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{21} \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{22} \end{pmatrix}, \tag{$\bar{x}$}$$

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} \bar{X}_{11} \\ \bar{X}_{21} \end{pmatrix}, \qquad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} \bar{X}_{12} \\ \bar{X}_{22} \end{pmatrix}. \tag{$\bar{X}$}$$

V následujících lemmatech a větě popíšeme ještě jeden zajímavý případ.

Lemma 3,4. *Mějme dvě dvojice bází: (x), (X); $(\bar{x})$, $(\bar{X})$. Jestliže mezi nimi existují vztahy*

$$\begin{aligned} \bar{x}_{11} &= k_1 x_{21}, & \bar{X}_{11} &= k_2 X_{21}, \\ \bar{x}_{12} &= \varepsilon_1 k_1 x_{22}, & \bar{X}_{12} &= \varepsilon_1 k_2 X_{22}, \end{aligned} \tag{80}$$

kde $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ jsou konstanty a ε_1 je jedno z čísel ± 1 (stejné v obou případech), pak funkce $Z(t)$, která vyhovuje rovnici (78) vzhledem k bázím $(\bar{x})$, $(\bar{X})$ a je tedy dispersí 1. druhu, hoví současně rovnici (79) pro báze (x), (X) a je tedy současně dispersí 2. druhu.

Důkaz plyne z dosazení vztahů (80) do rovnice (78) vzaté pro báze $(\bar{x})$, $(\bar{X})$.

Lemma 3,5. *Mějme dvě dvojice bází (x), (X); $(\bar{x})$, $(\bar{X})$. Jestliže mezi nimi existuje vztah*

$$\begin{aligned} \bar{x}_{21} &= k_3 x_{11}, & \bar{X}_{21} &= k_4 X_{11}, \\ \bar{x}_{22} &= \varepsilon_2 k_3 x_{12}, & \bar{X}_{22} &= \varepsilon_2 k_4 X_{12}, \end{aligned} \tag{81}$$

kde $k_3 \neq 0$, $k_4 \neq 0$ jsou konstanty a ε_2 je jedno z čísel ± 1 (stejné v obou případech), pak funkce $\bar{Z}(t)$, která hoví rovnici (79) pro báze $(\bar{x})$, $(\bar{X})$ a je tedy dispersí 2. druhu, vyhovuje současně rovnici (78) pro báze (x), (X) a je tedy současně dispersí 1. druhu.

Důkaz plyne z dosazení vztahů (81) do rovnice (79) vzaté pro báze (x), $(\bar{X})$.

Věta 3,4. *Mějme dvě dvojice bází* (x), (X); $(\bar{x})$, $(\bar{X})$. *Jestliže mezi nimi existují vztahy* (80), (81), *kde* $k_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *jsou konstanty a* $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2)$, *pak funkce* $Z(t)$, $\bar{Z}(t)$, *které hoví po řadě rovnicím* (78), (79) *pro báze* $(\bar{x})$, $(\bar{X})$ *(a jsou podle lemmat 3,4, 3,5 obě dispersemi 1. i 2. druhu), vyhovující rovnicím* (78), (79) *vzhledem k bázím* (x), (X) *v opačném pořadí.*

Důkaz plyne ihned z lemmat 3,4 a 3,5.

Poznámka 3,6. Je zřejmé, že podmínky (80), (81) lze formulovat i jinak: lze např. zaměnit pořadí bází (x), (X) a věta 3,4 přitom zůstane v platnosti.

V následujícím příkladě si ukážeme, že případ popsaný větou 3,4 skutečně může nastat.

Příklad 3,2. Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1. \end{aligned} \tag{82}$$

Pro tuto soustavu mají rovnice (q_1, q_1) i (q_2, q_2) tvar

$$\{Z, t\} + Z'^2 = 1; \tag{83}$$

viz [3].

Uvažujme následující báze soustavy (82):

$$x_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_1 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že podmínky (80), (81) jsou splněny, přičemž $k_1 = k_2 = -1$, $k_0 = k_4 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$.

Rovnice (78) má pro báze (x), (X) tvar

$$\cos t[2\sin Z(t)] - \sin t \cos Z(t) = 0 \tag{84}$$

a definuje dispersi 1. druhu, která je na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rovna

$$Z(t) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} t\right), \tag{85}$$

ale jako řešení rovnice (83) je to současně disperse 2. druhu. Pro tytéž báze má rovnice (79) tvar

$$-\sin t[2\cos Z(t)] - \cos t[-\sin Z(t)] = 0 \tag{86}$$

a definuje dispersi 2. druhu, která je na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rovna

$$Z(t) = \operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} t), \tag{87}$$

která je ovšem rovněž dispersí 1. druhu.

Jestliže nyní sestavíme rovnici (78) pro báze $(\bar{x})$, $(\bar{X})$, vidíme, že je to rovnice (86), jíž tedy hoví funkce (87), a podobně rovnice (79) pro báze $(\bar{x})$, $(\bar{X})$ má tvar (84) a vyhovují jí tedy funkce (85).

Podobné úvahy (jejich formulaci neuvádíme) lze provést i pro disperse 3. a 4. druhu. Vystupují při tom rovnice

$$X_{11}(t)\, x_{22}[Z(t)] - X_{12}(t)\, x_{21}[Z(t)] = 0 \tag{88}$$

pro disperse 3. druhu a

$$X_{21}(t)\, x_{12}[Z(t)] - X_{22}(t)\, x_{11}[Z(t)] = 0 \tag{89}$$

pro disperse 4. druhu.

Věta 3,5. *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby disperse 1. [2., 3., 4.] druhu $Z(t)$ byla současně dispersí 2. [1., 4., 3.] druhu a aby přitom splňovala rovnice* (78), (79) [(78), (79); (88), (89); (88), (89)] *vztaé pro tutéž dvojici bází* (x), (X) *je, aby $Z(t)$ hověla vztahu* (16) [(19), (59), (61)].

Důkaz provedeme např. pro disperse 1. druhu, další části důkazu jsou analogické. Nechť tedy $Z(t)$ je dispersí 1. druhu. Pak existuje dvojice bází (x), (X) tak, že platí (78), odkud po derivování a po úpravě máme

$$Z'(t) = \frac{b(t)\left(X_{21}(t)\, x_{12}[Z(t)] - X_{22}(t)\, x_{11}[Z(t)]\right)}{b[Z(t)]\left(X_{12}(t)\, x_{21}[Z(t)] - X_{11}(t)\, x_{22}[Z(t)]\right)} \tag{90}$$

a z toho

$$Z''(t) = \left[\frac{b[Z(t)]}{b(t)} \cdot \left(\frac{b(t)}{b[Z(t)]}\right)' + 2b(t)\, \frac{X_{21}(t)\, x_{22}[Z(t)] - X_{22}(t)\, x_{21}[Z(t)]}{X_{12}(t)\, x_{21}[Z(t)] - X_{11}(t)\, x_{22}[Z(t)]}\right] Z'(t). \tag{91}$$

Jestliže nyní disperse $Z(t)$ vyhovuje rovnici (16), pak z (91) plyne, že pro ni platí (79) a je tedy dispersí 2. druhu, přičemž vztah (79) je splněn pro tutéž dvojici bází jako (78). Nechť nyní naopak je $Z(t)$ dispersí 2. druhu, která splňuje rovnici (79) pro tutéž dvojici bází jako v (78). Pak z (91) plyne (16).

V předchozích úvahách se vyskytla samozřejmá postačující podmínka zaměnitelnosti dispersí 1. a 2. druhu, a to $q_1(t) \equiv q_2(t)$. Je zřejmé, že je to současně postačující podmínka pro zaměnitelnost dispersí 3. a 4. druhu.

Poznámka 3,7. Vzhledem k poznámce 3,4 není k zaměnitelnosti dispersí 1. a 2. [3. a 4.] druhu nutná ani platnost vztahu (4), ani platnost vztahu

$$\frac{b[Z(t)]}{c[Z(t)]} = k^2\, \frac{b(t)}{c(t)} \qquad \left[\frac{c[Z(t)]}{b[Z(t)]} = k^2\, \frac{b(t)}{c(t)}\right] \tag{92}$$

(viz (5) a (56)).

Vidíme tedy, že cesta přes speciální transformace umožňuje hlubší pohled na problémy zaměnitelnosti dispersí, a ovšem i naopak.

LITERATURA

[1] *Борувка, О.:* О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка. „Чехословацкий математический журнал“ Прага Т. 3 (78), 1953, с. 99—247.

[2] *Šantavá—Krohová, S.:* Transformace integrálů systémů dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Kandidátská disertační práce, UJEP Brno 1960.

[3] *Палат, И.:* Пример к теории преобразования и дисперсий О. Борувки. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. T. 12, 1963.

[4] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. T. 9, 1961.

[5] *Trávníček, S.:* Poznámky o charakteristické rovnici jisté transformace. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. T. 21, 1966.

Резюме

СОВПАДЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ЕГО СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ДИСПЕРСИЙ

Станислав Травничек

Настоящая работа является продолжением [4]. Здесь рассматривается проблема совпадения специальных линейных преобразований систем (A), (a) и его связи с собственными дисперсиями определенными на основе [1] для систем вида (a) в работе [2].

В 1-ой части изучается линейное преобразование $\mathbf{A}$ решений системы (A) на решения системы (a) в виде (1). Из [4] мы знаем, что это преобразование определено тогда и только тогда, когда элементы матрицы $K(t)$ удовлетворяют вместе с функцией $Z(t)$ системе (2). Если в матрице $K(t)$ имеется $\beta(t) \equiv 0$, то преобразование $\mathbf{A}$ называем *преобразование типа A_β*; аналогически мы определяем преобразования типов A_γ, A_α, A_δ и тоже преобразование типа $A_{\beta\gamma}$ (для $\beta(t) \equiv 0 \equiv \gamma(t)$ и преобразование типа $A_{\alpha\delta}$ (для $\alpha(t) \equiv 0 \equiv \delta(t)$). Если при данных условиях каждое преобразование типа $A_\beta[A_\alpha]$ является также преобразованием типа $A_\gamma [A_\delta]$ и наоборот, то мы говорим, что при данных условиях произошло совпадение преобразований типа $A_\beta [A_\alpha]$ и типа $A_\gamma [A_\delta]$ в преобразование типа $A_{\beta\gamma} [A_{\alpha\delta}]$.

В теореме 1,1 приведены некоторые необходимые условия для существования преобразования типа A_β. Теорема 1,2 [1,3] показывает, что (7) [(15)], является дотсаточным условием для того, чтобы преобразование типа $A_\beta [A_\gamma]$ было одновременно преобразованием типа $A_\gamma [A_\beta]$. Определяется множество M_z как множество функций $Z(t)$ имеющих свойство, что для всякой $Z(t) \in M_z$ существует преобразование типа A_β и также преобразование типа A_γ. В теоремах 1,4, 1,5 и 1,6 разбирается вопрос об условиях совпадения этих специальных преобразований. При подходящих предположениях имеет решение системы (2) вид (21) [(22)], где функция $Z(t)$ является решением дифференциального уравнения (Q_1, q_1) $[(Q_2, q_2)]$ и мы таким образом получаем формулы для преобразования типа $A_\beta [A_\gamma]$. В теоремах 1,7; 1,8 и 1,9 разбирается вопрос заменимости решений этих уравнений. Теорема 1,10 описывает множество M_z. В теореме 1,11 приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование $\mathbf{A}$ было преобразованием типа $A_{\beta\gamma}$.

Во 2-ой части этой статьи формулированы результаты первой части для преобразований типа A_α, A_δ и для их совпадение в преобразование типа $A_{\alpha\delta}$.

В 3-ей части совершается специализация $(A) = (a)$ и использованы собственные дисперсии по определению из работы [2]. С начала описываются отношения между специальными преобразованиями и дисперсиями (до теоремы 3,1 включительно). Дальше изучается связь между условиями (7), (15), (57), (58) и проблемой заменимости дисперсий (см. [2]). Показывается, что при этом надо отличить случай, когда дисперсии удовлетворяют уравнениям (78), (79) или (88), (89) для той же самой пары базисов (x), (X).

Таким образом специальные преобразования и их совпадение дают возможность лучшего постижения проблемы заменимости дисперсий и наоборот.