Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Stanislav Trávníček; Jaroslav Zaoral

Transformation der Lösungen der Systeme von vier linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica*, Vol. 11 (1971), No. 1, 119--129

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119931`

1971 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 33

*Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty*
*Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.*

# TRANSFORMATION DER LÖSUNGEN DER SYSTEME VON VIER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG

STANISLAV TRÁVNÍČEK UND JAROSLAV ZAORAL († 1971)

*(Eingelangt am 12. Mai 1969)*

Meinem vorzeitig verstorbenen Freund und Kollegen zum Gedächtnis.

In der Arbeit [7] beschäftigte sich S. Trávníček mit der Transformation

$$(AU = )\; u(t) = K(t)\, U[Z(t)], \tag{1}$$

der Lösungen $U(T)$, $u(t)$ der Systeme von $n$ linearen Differentialgleichungen (Dgl.) erster Ordnung. Für $n = 3$ wurde eine spezielle Transformation studiert, nämlich der Fall einer dreiecksförmigen Matrix $K(t)$ mit lauter Nullen oberhalb der Hauptdiagonale; es zeigten sich Zusammenhänge zwischen dieser speziellen Transformation und der Arbeit [4] von M. Laitoch. Analogische spezielle Transformationen für $n = 2$ wurden bereits in [6] benutzt, an die Transformationstheorie von O. Borůvka ([1], [2]) anknüpfend. J. Zaoral führte in seiner Diplomarbeit die nötigen Berechnungen für den Fall $n = 4$ durch; hier tauchen Berührungspunkte mit der Arbeit [5] auf. Dabei ist der Fall $n = 4$ der letzte, in welchem die Methode, die zur Errechnung der Koeffizienten der Transformation $A$ benutzt wurde, in der benutzten Symbolik noch übersichtliche explizite Formeln liefert.

Wir studieren Systeme von linearen Dgl. erster Ordnung in der Form

$$\text{(a)} \qquad y' = M(t)\, y, \qquad\qquad \dot{Y} = N(T)\, Y, \qquad \text{(A)}$$

wo

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & a(t) & 0 & 0 \\ b_1(t) & 0 & b_2(t) & 0 \\ c_1(t) & c_2(t) & 0 & c_3(t) \\ d_1(t) & d_2(t) & d_3(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$N(T) = \begin{pmatrix} 0 & A(T) & 0 & 0 \\ B_1(T) & 0 & B_2(T) & 0 \\ C_1(T) & C_2(T) & 0 & C_3(T) \\ D_1(T) & D_2(T) & D_3(T) & 0 \end{pmatrix},$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}, \qquad Y(T) = \begin{pmatrix} Y_1(T) \\ Y_2(T) \\ Y_3(T) \\ Y_4(T) \end{pmatrix}.$$

In diesen Formeln bedeuten Striche Ableitungen nach $t$ und Punkte Ableitungen nach $T$. Alle Koeffizienten unserer Systeme (d. h. Elemente der Matrizen $M(t)$, $N(T)$) seien in den zugehörigen Intervallen $j$, $J$ stetig vorausgesetzt; die Lösungen $u(t)$, $U(T)$ der Systeme ($a$), ($A$) seien in diesen Intervallen durch Cauchysche Anfangsbedingungen definiert: Für gegebene $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ gilt

$$(\mathrm{a}^*) \qquad u(t_0) = u_0, \qquad\qquad U(T_0) = U_0, \qquad (A^*)$$

wo

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \\ u_{40} \end{pmatrix}, \qquad U_0 = \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \\ U_{40} \end{pmatrix};$$

dabei sind $u_{i0}$, $U_{i0}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) gegebene Anfangswerte.

Das System [7], (1) ist der Form

(2):

$$\begin{aligned}
\alpha'_{11}(t) &= -B_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{12}(t) - C_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{13}(t) - \\
&\quad - D_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{14}(t) + a(t)\, \alpha_{21}(t) \\
\alpha'_{12}(t) &= -A[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{11}(t) - C_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{13}(t) - \\
&\quad - D_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{14}(t) + a(t)\, \alpha_{22}(t) \\
\alpha'_{13}(t) &= -B_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{12}(t) - D_3[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{14}(t) + a(t)\, \alpha_{23}(t) \\
\alpha'_{14}(t) &= -C_3[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{13}(t) + a(t)\, \alpha_{24}(t) \\
\alpha'_{21}(t) &= b_1(t)\, \alpha_{11}(t) - B_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{22}(t) - C_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{23}(t) - \\
&\quad - D_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{24}(t) + b_2(t)\, \alpha_{31}(t) \\
\alpha'_{22}(t) &= b_1(t)\, \alpha_{12}(t) - A[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{21}(t) - C_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{23}(t) - \\
&\quad - D_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{24}(t) + b_2(t)\, \alpha_{32}(t) \\
\alpha'_{23}(t) &= b_1(t)\, \alpha_{13}(t) - B_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{22}(t) - D_3[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{24}(t) + b_2(t)\, \alpha_{33}(t) \\
\alpha'_{24}(t) &= b_1(t)\, \alpha_{14}(t) - C_3[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{23}(t) + b_2(t)\, \alpha_{34}(t) \\
\alpha'_{31}(t) &= c_1(t)\, \alpha_{11}(t) + c_2(t)\, \alpha_{21}(t) - B_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{32}(t) - \\
&\quad - C_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{33}(t) - D_1[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{34}(t) + c_3(t)\, \alpha_{41}(t) \\
\alpha'_{32}(t) &= c_1(t)\, \alpha_{12}(t) + c_2(t)\, \alpha_{22}(t) - A[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{31}(t) - \\
&\quad - C_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{33}(t) - D_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{34}(t) + c_3(t)\, \alpha_{42}(t) \\
\alpha'_{33}(t) &= c_1(t)\, \alpha_{13}(t) + c_2(t)\, \alpha_{23}(t) - B_2[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{32}(t) - \\
&\quad - D_3[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{34}(t) + c_3(t)\, \alpha_{43}(t)
\end{aligned}$$

$$\alpha'_{34}(t) = c_1(t)\,\alpha_{14}(t) + c_2(t)\,\alpha_{24}(t) - C_3[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{33}(t) + c_3(t)\,\alpha_{44}(t)$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{41}(t) = {} & d_1(t)\,\alpha_{11}(t) + d_2(t)\,\alpha_{21}(t) + d_3(t)\,\alpha_{31}(t) - \\ & - B_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{42}(t) - C_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{43}(t) - D_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{44}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{42}(t) = {} & d_1(t)\,\alpha_{12}(t) + d_2(t)\,\alpha_{22}(t) + d_3(t)\,\alpha_{32}(t) - \\ & - A[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{41}(t) - C_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{43}(t) - D_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{44}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{43}(t) = {} & d_1(t)\,\alpha_{13}(t) + d_2(t)\,\alpha_{23}(t) + d_3(t)\,\alpha_{33}(t) - \\ & - B_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{42}(t) - D_3[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{44}(t)\end{aligned}$$

$$\alpha'_{44}(t) = d_1(t)\,\alpha_{14}(t) + d_2(t)\,\alpha_{24}(t) + d_3(t)\,\alpha_{34}(t) - C_3[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha_{43}(t).$$

Wir werden uns nun mit der speziellen Transformation befassen, die in der Matrix $K(t) = (\alpha_{ik}(t))$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, die Bedingungen $\alpha_{12}(t) \equiv \alpha_{13}(t) \equiv \alpha_{14}(t) \equiv 0$ erfüllt. Für $a(t) \neq 0$ geht dann aus der dritten Gleichung (2) $\alpha_{23}(t) \equiv 0$ hervor und aus der vierten Gleichung $\alpha_{24}(t) \equiv 0$. Ist $b_2(t) \neq 0$, haben wir aus der achten Gleichung (2) $\alpha_{34}(t) \equiv 0$. Infolgedessen ist $K(t)$ eine dreiecksförmige Matrix mit lauter Nullen oberhalb der Hauptdiagonale; wir werden Sie mit

$$K_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & 0 & 0 \\ \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \gamma_3(t) & 0 \\ \delta_1(t) & \delta_2(t) & \delta_3(t) & \delta_4(t) \end{pmatrix}$$

bezeichnen. Für die Elemente von $K_0(t)$ bekommen wir also aus (2)

(3):

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= a(t)\,\beta_1(t) \\ 0 &= -A[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha(t) + a(t)\,\beta_2(t)\end{aligned}$$

$$\beta'_1(t) = b_1(t)\,\alpha(t) - B_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\beta_2(t) + b_2(t)\,\gamma_1(t)$$

$$\begin{aligned}\beta'_2(t) &= -A[Z(t)]\,Z'(t)\,\beta_1(t) + b_2(t)\,\gamma_2(t) \\ 0 &= -B_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\beta_2(t) + b_2(t)\,\gamma_3(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma'_1(t) = {} & c_1(t)\,\alpha(t) + c_2(t)\,\beta_1(t) - B_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\gamma_2(t) - \\ & - C_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\gamma_3(t) + c_3(t)\,\delta_1(t)\end{aligned}$$

$$\gamma'_2(t) = c_2(t)\,\beta_2(t) - A[Z(t)]\,Z'(t)\,\gamma_1(t) - C_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\gamma_3(t) + c_3(t)\,\delta_2(t)$$

$$\begin{aligned}\gamma'_3(t) &= -B_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\gamma_2(t) + c_3(t)\,\delta_3(t) \\ 0 &= -C_3[Z(t)]\,Z'(t)\,\gamma_3(t) + c_3(t)\,\delta_4(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta'_1(t) = {} & d_1(t)\,\alpha(t) + d_2(t)\,\beta_1(t) + d_3(t)\,\gamma_1(t) - \\ & - B_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_2(t) - C_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_3(t) - D_1[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_4(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta'_2(t) = {} & d_2(t)\,\beta_2(t) + d_3(t)\,\gamma_2(t) - A[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_1(t) - \\ & - C_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_3(t) - D_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_4(t)\end{aligned}$$

$$\delta'_3(t) = d_3(t)\,\gamma_3(t) - B_2[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_2(t) - D_3[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_4(t)$$

$$\delta'_4(t) = -C_3[Z(t)]\,Z'(t)\,\delta_3(t).$$

Wir bezeichnen mit $\mathbf{C}_k(\delta)$ die Menge aller Funktionen mit stetiger k-ter Ableitung im Intervalle $\delta$ ($\mathbf{C}_0(\delta)$ ist die Menge aller Funktionen, die im $\delta$ stetig sind).

Wir setzen weiter voraus: $a(t)$, $b_2(t)$, $c_3(t) \in \mathbf{C}_4(j)$; $A(T)$, $B_2(T)$, $C_3(T) \in \mathbf{C}_4(J)$; $a(t)\, c_3(t)\, A(T)\, C_3(T) > 0$ und $b_2(t)\, B_2(T) \neq 0$ für alle $t \in j$, $T \in J$; $b_1(t)$, $c_2(t)$, $d_3(t) \in \mathbf{C}_2(j)$; $B_1(T)$, $C_2(T)$, $D_3(T) \in \mathbf{C}_2(J)$; $c_1(t)$, $d_2(t) \in \mathbf{C}_1(j)$; $C_1(T)$, $D_2(T) \in \mathbf{C}_1(J)$. Wir definieren jetzt die Funktionen

$$p(t) = -\frac{1}{4}\left[\frac{3a'(t)}{a(t)} + \frac{2b_2'(t)}{b_2(t)} + \frac{c_3'(t)}{c_3(t)}\right],$$

$$q(t) = -\frac{1}{6}\left[8p(t)\frac{a'(t)}{a(t)} + \frac{3a''(t)}{a(t)} + \frac{b_2''(t)}{b_2(t)} - \frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\left(\frac{2b_2'(t)}{b_2(t)} + \frac{c_3'(t)}{c_3(t)}\right) + \right.$$
$$\left. + a(t)\, b_1(t) + b_2(t)\, c_2(t) + c_3(t)\, d_3(t)\right],$$

$$r(t) = -\frac{1}{4}\left[4p(t)\frac{a''(t)}{a(t)} + 6q(t)\frac{a'(t)}{a(t)} + \frac{a'''(t)}{a(t)} - \right.$$
$$- a(t)\, b_1(t)\left(\frac{2b_2'(t)}{b_2(t)} + \frac{c_3'(t)}{c_3(t)}\right) - b_2(t)\, c_2(t)\frac{c_3'(t)}{c_3(t)} +$$
$$\left. + 2a(t)\, b_1'(t) + a'(t)\, b_1(t) + b_2(t)\, c_2'(t) + a(t)\, b_2(t)\, c_1(t) + b_2(t)\, c_3(t)\, d_2(t)\right],$$

$$s(t) = \left(a(t)\, b_1'(t) - a(t)\, b_1(t)\frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right)\left(\frac{2b_2'(t)}{b_2(t)} + \frac{c_3'(t)}{c_3(t)}\right) +$$
$$+ a(t)\, b_1(t)\left(\frac{b_2''(t)}{b_2(t)} + c_3(t)\, d_3(t)\right) +$$
$$+ a(t)\, b_2(t)\left(c_1(t)\frac{c_3'(t)}{c_3(t)} - c_1'(t) - c_3(t)\, d_1(t)\right) - a(t)\, b_1''(t),$$

$$\omega(t) = q(t) - p^2(t) - p'(t),$$

$$h_3(t) = r(t) - 3p(t)\, q(t) - 2p^3(t) - p''(t) - \frac{3}{2}\,\omega'(t),$$

$$h_4(t) = s(t) - 4p(t)\, r(t) + 6(p^2(t)\, q(t) + p'(t)\, p^2(t) - p'(t)\, q(t)) +$$
$$+ 3(p'^2(t) - p^4(t)) - p'''(t) - \frac{81}{25}\,\omega^2(t) - \frac{9}{5}\,\omega''(t),$$

$$\bar{h}_4(t) = h_4(t) - 2h_3'(t).$$

Analog, mittels der Koeffizienten des Systems $(A)$ definieren wir die Funktionen $P(T)$, $Q(T)$, $R(T)$, $S(T)$, $\Omega(T)$, $H_3(T)$, $H_4(T)$, $\bar{H}_4(T)$.

Wir haben dann $p(t) \in \mathbf{C}_3(j)$; $q(t)$, $\omega(t) \in \mathbf{C}_2(j)$; $r(t)$, $h_3(t) \in \mathbf{C}_1(j)$; $s(t)$, $h_4(t)$, $\bar{h}_4(t) \in \mathbf{C}_0(j)$; ähnlich $P(T) \in \mathbf{C}_3(J)$; $Q(T)$, $\Omega(T) \in \mathbf{C}_2(J)$; $R(T)$, $H_3(T) \in \mathbf{C}_1(J)$; $S(T)$, $H_4(T)$, $\bar{H}_4(T) \in \mathbf{C}_0(J)$.

Über $Z(t)$ setzen wir voraus, daß sie ein bestimmtes Intervall $i \subset j$ auf das Intervall $I \subset J$ abbildet; dabei geht ein gegebener Punkt $t_0 \in j$ in einen gegebenen Punkt $T_0 \in J$ über (es gilt freilich $t_0 \in i$, $T_0 \in I$), $Z(t) \in \mathbf{C}_5(i)$, $Z'(t) \neq 0$.

*Satz 1; $U(T)$ sei die durch Anfangsbedingungen $(A^*)$ definierte Lösung von $(A)$, $Z(t)$ sei die durch Anfangsbedingungen*

$$Z(t_0) = Z_0(= T_0), \qquad Z'(t_0) = Z_0', \qquad Z''(t_0) = Z_0'', \tag{Z*}$$

*definierte Lösung der Dgl.*

$$\{Z, t\} + \frac{3}{5}\,\Omega(Z)\,Z'^2 = \frac{3}{5}\,\omega(t), \tag{$\Omega$, $\omega$}$$

*(in $(Z^*)$ bedeuten $t_0 \in j$, $T_0 \in J$, $Z_0' \neq 0$, $Z_0''$ die vorgeschriebenen Anfangswerte). Weiter sei*

$$H_3[Z(t)]\,Z'^3(t) = h_3(t), \tag{4}$$

$$\bar{H}_4[Z(t)]\,Z'^3(t) = \bar{h}_4(t), \tag{5}$$

*und die Elemente von $K_0(t)$ seien durch folgende Formeln gegeben:*

$$\alpha(t) = \sqrt[4]{\frac{a^3(t)\,b_2^2(t)\,c_3(t)}{A^3[Z(t)]\,B_2^2[Z(t)]\,C_3[Z(t)]}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|^3}}}, \tag{6}$$

$$\beta_1(t) = \frac{1}{a(t)}\left[P[Z(t)]\,Z'(t) - p(t) - \frac{3}{2}\,\frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right]\alpha(t),$$

$$\beta_2(t) = \frac{A[Z(t)]\,Z'(t)}{a(t)}\,\alpha(t),$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) = \frac{1}{a(t)\,b_2(t)}\Bigg[&\left(P^2[Z(t)] + \dot{P}[Z(t)] + \frac{9}{5}\,\Omega[Z(t)] + A[Z(t)]\,B_1[Z(t)]\right)Z'^2(t) - \\
&- 2P[Z(t)]\,Z''(t) - \left(\frac{a'(t)}{a(t)} + 2p(t)\right)P[Z(t)]\,Z'(t) + p^2(t) - p'(t) - \\
&- \frac{9}{5}\,\omega(t) - a(t)\,b_1(t) + \frac{a'(t)}{a(t)}\,p(t) + \\
&+ \frac{3}{2}\left(\frac{a'(t)}{a(t)} + 2p(t)\right)\frac{Z''(t)}{Z'(t)} + \frac{3}{2}\,\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)}\Bigg]\alpha(t),
\end{aligned}$$

$$\gamma_2(t) = \frac{A[Z(t)]\,Z'(t)}{a(t)\,b_2(t)}\left[\left(\frac{\dot{A}[Z(t)]}{A[Z(t)]} + 2P[Z(t)]\right)Z'(t) - \frac{a'(t)}{a(t)} - 2p(t) - 2\,\frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right]\alpha(t),$$

$$\gamma_3(t) = \frac{A[Z(t)]\,B_2[Z(t)]}{a(t)\,b_2(t)}\,Z'^2(t)\,\alpha(t),$$

$$\begin{aligned}
\delta_1(t) = \frac{1}{a(t)\,b_2(t)\,c_3(t)}\Bigg\{&\Big(P^3[Z(t)] + 3P[Z(t)]\,\dot{P}[Z(t)] + \ddot{P}[Z(t)] + \\
&+ \frac{21}{5}\,P[Z(t)]\,\Omega[Z(t)] + \frac{9}{5}\,\dot{\Omega}[Z(t)] + 3A[Z(t)]\,B_1[Z(t)]\,P[Z(t)] + \\
&+ 2\dot{A}[Z(t)]\,B_1[Z(t)] + A[Z(t)]\,\dot{B}_1[Z(t)] + A[Z(t)]\,B_2[Z(t)]\,C_1[Z(t)]\Big)\,. \\
&.\, Z'^3(t) - \left(\frac{2a'(t)}{a(t)} + \frac{b_2'(t)}{b_2(t)} + 2p(t)\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\left(P^2[Z(t)] + \dot{P}[Z(t)] + \frac{9}{5}\,\Omega[Z(t)] + A[Z(t)]\,B_1[Z(t)]\right) Z'^2(t) + \\
&+ \left[\left(\frac{2a'(t)}{a(t)} + \frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right)\left(\frac{a'(t)}{a(t)} + 2p(t)\right) - \frac{a''(t)}{a(t)} + 3p^2(t) - 3p'(t) - \right.\\
&- \left.\frac{21}{5}\,\omega(t) - a(t)\,b_1(t) - b_2(t)\,c_2(t)\right]\left(P[Z(t)]\,Z'(t) - \frac{3}{2}\,\frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right) - \\
&- \frac{3}{2}\left(P^2[Z(t)] + \dot{P}[Z(t)] + \frac{9}{5}\,\Omega[Z(t)] + A[Z(t)]\,B_1[Z(t)]\right)\cdot \\
&\cdot Z'(t)\,Z''(t) + 2\left(3p(t) + 2\,\frac{a'(t)}{a(t)} + \frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right)\left(P[Z(t)]\,Z''(t) - \frac{3}{4}\,\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)}\right) - \\
&- p^3(t) + 3p(t)\,p'(t) - p''(t) + \frac{27}{5}\,p(t)\,\omega(t) - \\
&- \frac{9}{5}\,\omega'(t) + a(t)\,b_1(t)\,p(t) - 2a'(t)\,b_1(t) - a(t)\,b_1'(t) - \\
&- a(t)\,b_2(t)\,c_1(t) + b_2(t)\,c_2(t)\,p(t) + \frac{a''(t)}{a(t)}\,p(t) - \\
&- \left(\frac{2a'(t)}{a(t)} + \frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right)\left(p^2(t) - p'(t) - \frac{9}{5}\,\omega(t) - a(t)\,b_1(t) + \frac{a'(t)}{a(t)}\,p(t)\right) + \\
&+ \left.\frac{3}{2}\left(P[Z(t)]\,Z'(t) - \frac{1}{2}\,\frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)}\right\}\alpha(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2(t) = \frac{A[Z(t)]\,Z'(t)}{a(t)\,b_2(t)\,c_3(t)}&\left[\left(3\,\frac{\dot{A}[Z(t)]}{A[Z(t)]}\,P[Z(t)] + 3P^2[Z(t)] + \right.\right.\\
&+ 3\dot{P}[Z(t)] + \frac{\ddot{A}[Z(t)]}{A[Z(t)]} + \frac{21}{5}\,\Omega[Z(t)] + A[Z(t)]\,B_1[Z(t)] + \\
&+ \left. B_2[Z(t)]\,C_2[Z(t)]\right) Z'^2(t) - \left(3p(t) + \frac{2a'(t)}{a(t)} + \frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right)\cdot \\
&\cdot\left(\frac{\dot{A}[Z(t)]}{A[Z(t)]} + 2P[Z(t)]\right) Z'(t) - \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{A}[Z(t)]}{A[Z(t)]} + 2P[Z(t)]\right) Z''(t) + \\
&+ \left(\frac{a'(t)}{a(t)} + 2p(t)\right)\left(\frac{2a'(t)}{a(t)} + \frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right) - \frac{a''(t)}{a(t)} + 3p^2(t) - \\
&- 3p'(t) - \frac{21}{5}\,\omega(t) - a(t)\,b_1(t) - b_2(t)\,c_2(t) + \\
&+ \left. 2\left(3p(t) + \frac{2a'(t)}{a(t)} + \frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right)\frac{Z''(t)}{Z'(t)} + \frac{3}{2}\,\frac{Z''^2(t)}{Z'^2(t)}\right]\alpha(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_3(t) = \frac{A[Z(t)]\,B_2[Z(t)]\,Z'^2(t)}{a(t)\,b_2(t)\,c_3(t)}&\left[\left(3P[Z(t)] + \frac{2\dot{A}[Z(t)]}{A[Z(t)]} + \frac{\dot{B}_2[Z(t)]}{B_2[Z(t)]}\right) Z'(t) - \right.\\
&- \left.\left(3p(t) + \frac{2a'(t)}{a(t)} + \frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right) - \frac{3}{2}\,\frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right]\alpha(t),
\end{aligned}
$$

$$\delta_4(t) = \frac{A[Z(t)]\,B_2[Z(t)]\,C_3[Z(t)]}{a(t)\,b_2(t)\,c_3(t)}\,Z'^3(t)\,\alpha(t).$$

*Dann ist die durch (1) definierte Vektorfunktion $u(t)$ die durch Anfangsbedingungen $u(t_0) = K_0(t_0)\,U_0$ definierte Lösung des Systems (a).*

Der Beweis dieser Behauptung geht aus dem Satz 1,1 [7] hervor; durch Einsetzen kann man sich leicht überzeugen, daß bei unseren Voraussetzungen die Funktionen (6) dem System (3) genügen.

*Satz 2: A sei die durch die Gleichung (1) definierte lineare Transformation, welche den Raum der Lösungen des Systems (A) in den Raum der Lösungen des Systems (a) abbildet und $K(t)$ sei der Form $K_0(t)$. Die Elemente der Matrix $K_0(t)$ sind dann bis auf einen konstanten Faktor durch die Formeln (6) gegeben; die Funktion $Z(t)$ ist eine Lösung der Dgl. $(\Omega, \omega)$ und erfüllt dabei* (4), (5). *Wenn $u(t)$ $[U(T)]$ die Anfangsbedingungen $(a^*)$ $[(A^*)]$ und $Z(t)$ die Anfangsbedingungen $(Z^*)$ erfüllt, genügt die Matrix $K_0$ der Anfangswerte der Funktionen* (6) *der Relation*

$$u_0 = K_0 U_0. \tag{7}$$

*Beweis:* Laut Satz 1,2 [7] erfüllen die Elemente der Matrix $K_0(t)$ zusammen mit der Funktion $Z(t)$ das System (3). Im weiteren, der Übersichtlichkeit halber, schreiben wir in diesem Beweise die Argumente $t$ der Funktionen von $t$ nicht auf.

Aus der ersten Gleichung (3) haben wir

$$\beta_1 = \frac{1}{a}\alpha' \tag{8}$$

und aus der zweiten Gleichung (3)

$$\beta_2 = \frac{A(Z)}{a}\,Z'\alpha. \tag{9}$$

Aus der vierten Gleichung (3) folgt, wenn wir (8) und (9) erwägen

$$\gamma_2 = \frac{1}{b_2}\left[\left(\frac{A(Z)}{a}\,Z'\right)'\alpha + \frac{2A(Z)}{a}\,Z'\alpha'\right]. \tag{10}$$

Aus der fünften Gleichung (3) bekommen wir mittels (9)

$$\gamma_3 = \frac{A(Z)\,B_2(Z)}{ab_2}\,Z'^2\alpha \tag{11}$$

und aus der neunten Gleichung (3) und aus (11) haben wir

$$\delta_4 = \frac{A(Z)\,B_2(Z)\,C_3(Z)}{ab_2c_3}\,Z'^3\alpha. \tag{12}$$

Aus der achten Gleichung (3) bekommen wir mittels (9), (10)

$$\delta_3 = \frac{1}{c_3}\left[\left(\frac{A(Z)\,B_2(Z)}{ab_2}\,Z'^2\right)' + \frac{B_2(Z)}{b_2}\,Z'\left(\frac{A(Z)}{a}\,Z'\right)'\right]\alpha + $$
$$+ \frac{3A(Z)\,B_2(Z)}{ab_2c_3}\,Z'^2\alpha. \tag{13}$$

Aus der dreizehnten Gleichung (3) geht, wenn wir noch (12) erwägen

$$\delta_3 = -\frac{1}{C_3(Z)\,Z'}\left[\left(\frac{A(Z)\,B_2(Z)\,C_3(Z)}{ab_2c_3}\,Z'^3\right)'\alpha + \frac{A(Z)\,B_2(Z)\,C_3(Z)}{ab_2c_3}\,Z'^3\alpha'\right] \tag{14}$$

hervor. Wenn wir jetzt die rechten Seiten der Gleichungen (13), (14) vergleichen, bekommen wir nach einigen Umformungen

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{4}\left[\frac{3a'}{a} + \frac{2b_2'}{b_2} + \frac{c_3'}{c_3} - \frac{3\dot{A}(Z)\,Z'}{A(Z)} - \frac{2\dot{B}_2(Z)\,Z'}{B_2(Z)} - \frac{\dot{C}_3(Z)\,Z'}{C_3(Z)} - 6\,\frac{Z''}{Z'}\right]. \tag{15}$$

Durch Integration von (15) haben wir weiter

$$\alpha = k\,\sqrt[4]{\frac{a^3b_2^2c_3}{A^3(Z)\,B_2^2(Z)\,C_3(Z)}}\;\frac{1}{\sqrt{|Z'|^3}} \tag{16}$$

wo $k$ eine willkürliche (Integrations-) Konstante bedeutet. Für $k = 1$ kommt also die erste Formel (6) hervor. (15) kann man auch in der Form

$$\alpha' = \left(P(Z)\,Z' - p - \frac{3}{2}\,\frac{Z''}{Z'}\right)\alpha \tag{17}$$

schreiben. Die Formeln (6) für $\beta_1, \beta_2, \gamma_2, \gamma_3, \delta_4$ bekommen wir mittels (16), (17) aus den Relationen (8), (9), (10), (11), (12). Die Formeln (6) für $\gamma_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ bekommen wir der Reihe nach aus der 3., 6., 7. und 13. Gleichung (3). Wenn wir nun für $\gamma_3, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ in die zwölfte Gleichung (3) einsetzen, sehen wir durch einfache Berechnungen, daß $Z(t)$ eine Lösung der Gleichung $(\Omega, \omega)$ ist. Wenn wir für $\gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ in die elfte Gleichung (3) einsetzen und erwägen, daß $Z(t)$ der Dgl. $(\Omega, \omega)$ genügt, sehen wir daß $Z(t)$ die Bedingung (4) erfüllt. Wenn wir schließlich für $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \alpha$ in die zehnte Gleichung (3) einsetzen und erwägen, daß $Z(t)$ die Dgl. $(\Omega, \omega)$ und die Bedingung (4) erfüllt, folgern wir, daß $Z(t)$ auch der Bedingung (5) genügen muß.

Die Behauptung über die Relation zwischen den Anfangswerten folgt aus Satz 1,2 [7].

*Bemerkung 1.* Wenn wir das System $(a)$ in eine Dgl. überführen (wir setzen $y_1(t) = y(t)$), so bekommen wir

$$y^{(4)} + 4p(t)y''' + 6q(t)y'' + 4r(t)y' + s(t)\,y = 0. \tag{18}$$

Auf eine analoge Weise bekommen wir aus dem System $(A)$ die Dgl.

$$Y^{[4]} + 4P(T)\,\dddot{Y} + 6Q(T)\,\ddot{Y} + 4R(T)\,\dot{Y} + S(T)\,Y = 0. \tag{19}$$

Nach [3] ist $h_3(T)$ $[H_3(T)]$ ein Fundamentalinvariant der Dgl. (18) [(19)] von Dimension und Gewicht 3 und $\bar{h}_4(t)$ $[\bar{H}_4(T)]$ ein Fundamentalinvariant der Dgl. (18) [(19)] von Dimension und Gewicht 4.

*Bemerkung 2:* Zur Erfüllung von (4), (5) sind die Identitäten

$$h_3(t) \equiv 0,\ h_4(t) \equiv 0;\ H_3(T) \equiv 0,\ H_4(T) \equiv 0 \tag{20}$$

genügend (vgl. [3], Absazt III, Satz 6).

*Beispiel:* Wir nehmen zwei Systeme $(\bar{a})$, $(\bar{A})$ mit

$$M(t) \equiv \bar{M}(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) & 0 & 0 \\ 3c(t) & 0 & 2b(t) & 0 \\ 0 & 2c(t) & 0 & 3b(t) \\ 0 & 0 & c(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$N(T) \equiv \bar{N}(T) = \begin{pmatrix} 0 & B(T) & 0 & 0 \\ 3C(T) & 0 & 2B(T) & 0 \\ 0 & 2C(T) & 0 & 3B(T) \\ 0 & 0 & C(T) & 0 \end{pmatrix}.$$

Für alle $t \in j$, $T \in J$ seien die Relationen $b(t)\,B(T) > 0$, $b(t) \in \mathbf{C}_4(j)$, $B(T) \in \mathbf{C}_4(J)$, $c(t) \in \mathbf{C}_2(j)$, $C(T) \in \mathbf{C}_2(J)$ erfüllt.

Es ist leicht einzusehen, daß $(\bar{a})$, $(\bar{A})$ den Identitäten (20) genügen. Sind

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad Y(T) = \begin{pmatrix} Y_1(T) \\ Y_2(T) \end{pmatrix},$$

Lösungen der Systeme

$$(a_2) \qquad \begin{cases} y_1' = b(t)\,y_2 \\ y_2' = c(t)\,y_1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{rcases} \dot{Y}_1 = B(T)\,Y_2 \\ \dot{Y}_2 = C(T)\,Y_1 \end{rcases} \qquad (A_2),$$

dann sind die Vektoren

$$x(t) = \begin{pmatrix} y_1^3(t) \\ 3y_1^2(t)\,y_2(t) \\ 3y_1(t)\,y_2^2(t) \\ y_2^3(t) \end{pmatrix}, \qquad X(T) = \begin{pmatrix} Y_1^3(T) \\ 3Y_1^2(T)\,Y_2(T) \\ 3Y_1(T)\,Y_2^2(T) \\ Y_2^3(T) \end{pmatrix}$$

Lösungen der Systeme $(\bar{a})$, $(\bar{A})$ und zwischen der Transformation der Lösungen der Systeme $(a_2)$, $(A_2)$ und den Funktionen (6) für $(\bar{a})$, $(\bar{A})$ kann man analogische Beziehungen feststellen wie im Beispiel in der Arbeit [7].

*Bemerkung 3:* In [5] studiert man zwei iterierte Dgl. vierter Ordnung der Form

$$y^{(4)} + 10f(t)\,y'' + 10f'(t)\,y' + 3[3f^2(t) + f''(t)]\,y = 0, \tag{21}$$

$$Y^{[4]} + 10F(T)\,\ddot{Y} + 10\dot{F}(T)\,\dot{Y} + 3[3F^2(T) - \ddot{F}(T)]\,Y = 0. \tag{22}$$

Führen wir diese Gleichungen in Systeme von vier homogenen linearen Dgl. über so, daß die Lösung der Dgl. (21) bzw. (22) zur ersten Komponente der Lösung des zugehörigen Systems wird, gehört zur Gleichung (21) das System

$$x' = \tilde{M}(t)\,x, \tag{$\tilde{\text{a}}$}$$

und zur Gleichung (22) das System

$$\dot{X} = \tilde{N}(T)\, X. \tag{$\tilde{\text{A}}$}$$

Die Matrizen $\tilde{M}(t)$, $\tilde{N}(T)$ sind dabei

$$\tilde{M}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3[3f^2(t) + f''(t)] & -10f'(t) & -10f(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{N}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3[3F^2(T) + \ddot{F}(T)] & -10\dot{F}(T) & -10F(T) & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch einfache Rechnung bekommen wir $\tilde{p}(t) \equiv 0$, $\tilde{q}(t) = \omega(t) = \frac{5}{3} f(t)$, $\tilde{r}(t) = \frac{5}{2} f'(t)$, $\tilde{s}(t) = 3[3f^2(t) + f''(t)]$, $\tilde{h}_3(t) \equiv 0$, $\tilde{h}_4(t) \equiv 0$, und analogische Formeln auch für $(\tilde{A})$.

Es gilt also (20) und somit auch (4), (5). Die Dgl. $(\Omega, \omega)$ hat in diesem Falle die Form

$$\{Z, t\} + F(Z)\, Z'^2 = f(t). \tag{23}$$

Man kann leicht einsehen, daß z. B. Satz 1 [5] als Spezialfall aus dem Satz 1 dieser Arbeit folgt. Dazu genügt es, den Satz 1 auf die Lösungen der Systeme $(\tilde{A})$, $(\tilde{a})$ anzuwenden.

## LITERATUR


[1] *Борувка О.:* О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка. „Чех. мат. журнал" т. 3 (78) 1953.

[2] *Borůvka O.:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. "Annali di mat. pura ed apl." Bologna 1956, IV, t. XLI.

[3] *Hustý Z.:* Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiter Ordnung. „Czech. mat. journal" t. 15 (90) 1965, t. 16 (91) 1966.

[4] *Лайтох М.:* О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений. „Чех. мат. журнал" т. 10 (85) 1960.

[5] *Moravčík J.:* Poznámka k transformácii riešení lineárnych diferenciálnych rovníc. „Acta FRN Univ. Comen.", t. VI, F. VI 1961.

[6] *Травничек С.:* О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциуральных уравнений первого порядка. "Acta Univ. Pal. Olom." F. R. N. т. 9, 1962.

[7] *Травничек С.:* О преобразованиях решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. „Acta Univ. Pal. Olom." F. R. N. т. 18, 1965

## SHRNUTÍ

# TRANSFORMACE ŘEŠENÍ SOUSTAV ČTYŘ LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU

STANISLAV TRÁVNÍČEK A JAROSLAV ZAORAL

Tato práce navazuje na práci [7]. Užívá se tu obecných výsledků uvedených v [7] pro soustavy $n$ homogenních lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, a metod, jichž bylo v [7] užito v případě $n = 3$, je zde užito na případ $n = 4$. Ukazuje se, že tento případ je zřejmě poslední, kdy metoda použitá k výpočtu koeficientů transformace $A$ a zvolené označení dávají pro tyto koeficienty ještě poněkud přehledné explicitní vzorce.

V této práci se vyšetřuje speciální případ transformace (1), kdy matice $K(t)$ má tvar $K_0(t)$. Za jistých předpokladů o koeficientech soustav ($a$), ($A$) se pro tyto speciální transformace formulují dvě věty.

*Věta 1: Nechť* $U(T)$ *je řešením soustavy* ($A$) *definovaným počátečními podmínkami* ($A^*$), *funkce* $Z(t)$ *je řešením diferenciální rovnice* $(\Omega, \omega)$ *definovaným počátečními podmínkami* ($Z^*$), *kde* $t_0 \in j$, $T_0 \in J$, $Z_0 \neq 0$, $Z_0$ *jsou dané počáteční hodnoty, a platí* (4), (5), *a nechť prvky matice* $K_0(t)$ *jsou dány vzorci* (6). *Pak* $u(t)$, *jež je dáno vztahem* (1), *je řešením soustavy* ($a$) *a splňuje počáteční podmínky* $u(t_0) = K(t_0)\, U_0$.

*Věta 2: Nechť* $A$ *je lineární transformace definovaná rovnicí* (1) *a zobrazující prostor řešení soustavy* ($A$) *do prostoru řešení soustavy* ($a$) *a nechť* $K(t)$ *je tvaru* $K_0(t)$. *Pak prvky matice* $K_0(t)$ *jsou až na konstantního činitele vyjádřeny vzorci* (6) *a funkce* $Z(t)$ *je řešením diferenciální rovnice* $(\Omega, \omega)$, *přičemž pro ni platí* (4), (5). *Jestliže* $u(t)$ [$U(T)$] *hoví počátečním podmínkám* ($a^*$) [($A^*$)] *a funkce* $Z(t)$ *počátečním podmínkám* ($Z^*$), *pak matice* $K_0$ *počátečních hodnot funkcí* (6) *nutně hoví vztahu* (7).

Dále se ukazuje na souvislost podmínek (4), (5) s fundamentálními invarianty diferenciálních rovnic (18), (19) rozměru a váhy 3 resp. 4 (viz [3]).

Nakonec je uvedena souvislost vyšetřované speciální transformace s prací [5].