1971 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 33

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Doc. RNDr. Josef Šimek

O MNOŽINĚ STŘEDŮ KŘIVEK KONSTANTNÍ KŘIVOSTI HYPERBOLICKÉ ROVINY, KTERÉ SE DOTÝKAJÍ DVOU RŮZNÝCH KŘIVEK KONSTANTNÍ KŘIVOSTI

FRANTIŠEK MACHALA

(Předloženo 31. 3. 1970)

Při řešení daného problému budeme používat výsledků z lit. [2], [3], [4] a budeme také užívat symboliky tam zavedené. Pro křivky druhého stupně v hyperbolické rovině budeme užívat názvů, uvedených v lit. [1].

Podle definice 1 v lit. [3] existují tři druhy křivek konstantní křivosti v hyperbolické rovině: H-kružnice, H-ekvidistanta a H-horocykl. V dalším budeme předpokládat, že dané křivky konstantní křivosti jsou regulární. Uvažujme tři skupiny dvojic křivek konstantní křivosti:

I. Jedna z daných křivek je H-kružnice.
II. Jedna z daných křivek je H-ekvidistanta.
III. Obě křivky jsou H-horocykly.

Každou z uvedených skupin budeme vyšetřovat zvlášť.

I. Mějme dánu H-kružnici $\Phi(S_1, A_1)$ a libovolnou regulární křivku $\Phi(S_2, A_2)$. [Obr. 1, kde je $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta.] Průsečíky přímky S_1A_1 resp. S_2A_2 s absolutní kružnicí k označme T', T'' resp. W', W''. Na přímce S_2A_2 sestrojme body P_1, P_2, pro které je

$$(S_1A_1T'T'') = (A_2P_1W'W'') = (P_2A_2W'W''). \tag{1}$$

Podle lit. [3], věta 5, uvažujme kuželosečky k_1, k_2 resp. k_3, k_4 a společné tečny x, y křivky $\Phi(S_2, A_2)$ a absolutní kružnice k, jako množiny H-středů křivek konstantní křivosti, které procházejí bodem S_1 a dotýkají se křivky $\Phi(S_2, P_1)$ resp. $\Phi(S_2, P_2)$.

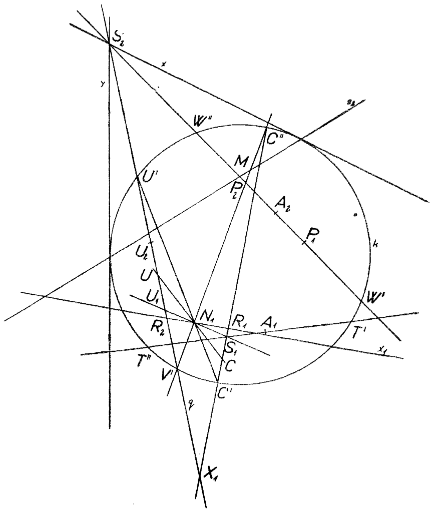
Věta 1. Kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 a přímky x, y jsou množinou H-středů křivek konstantní křivosti, které se dotýkají H-kružnice $\Phi(S_1, A_1)$ a křivky $\Phi(S_2, A_2)$.

Důkaz: 1. Zvolme si libovolnou sečnu q absolutní kružnice k, procházející bodem S_2 a její průsečíky s křivkou $\Phi(S_2, A_2)$ resp. s absolutní kružnicí k označme U, V resp. U', V'. Podle definice křivek konstantní křivosti a podle (1) můžeme označit

U_1, U_2 ty průsečíky přímky q s křivkami $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$, pro které platí

$$(A_2 P_1 W' W'') = (U_1 U U' V') = (U U_2 U' V'). \tag{2}$$

Podobně označme V_1, V_2 ty průsečíky přímky q s křivkami $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$, pro které platí $(A_2 P_1 W' W'') = (V V_1 U' V') = (V_2 V U' V')$ (na obr. 1 jsou narýsovány jen body U, U_1, U_2).



Obr. 1

Sestrojme podle lit. [2], věta 5, přímky m_1, m_2 resp. m_1', m_2' a n_1, n_2 resp. n_1', n_2', jako množiny H-středů křivek konstantní křivosti, které procházejí body U_1, S_1 resp. U_2, S_1 a V_1, S_1 resp. V_2, S_1. Průsečíky přímek m_1, m_2, m_1', m_2', n_1, n_2, n_1', n_2' s přímkou q označme X_1, X_2, X_1', X_2', Y_1, Y_2, Y_1', Y_2'. Podle věty 5, lit. [3] jsou tyto body průsečíky přímky q s kuželosečkami k_1, k_2, k_3, k_4.

a) Dokážeme, že průsečíky přímky q s kuželosečkami k_1, k_2, k_3, k_4 jsou H-středy křivek Φ^*[1]). Vybereme si na př. bod X_1. Křivka $\Phi(X_1, U)$ se podle věty 1, lit. [3]

[1]) Každou křivku konstantní křivosti, která se dotýká daných křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$, označíme pro stručnost Φ.*

dotýká v bodě U křivky $\Phi(S_2, A_2)$. Zbývá ještě dokázat, že se dotýká křivky $\Phi(S_1, A_1)$. Označme x_1 poláru bodu X_1 vzhledem k absolutní kružnici k a R_1, R_2 průsečíky přímek X_1S_1, q s přímkou x_1. Průsečíky přímky X_1S_1 s absolutní kružnicí k označme C', C'' tak, aby se dvojice bodů R_2, X_1 a U_1, U' oddělovaly stejně jako dvojice R_1, X_1 a S_1, C'. Protože křivka $\Phi(X_1, S_1)$ prochází bodem U_1, protínají se přímky S_1U_1, $C'U'$, $C''V'$ podle definice křivek konstantní křivosti v jednom bodě N_1 na přímce x_1. Označme C ten z průsečíků přímky X_1S_1 s H-kružnicí $\Phi(S_1, A_1)$, pro který platí: Dvojice bodů X_1, U_1 a U, U' se oddělují stejně jako dvojice X_1, S_1 a C, C'. Z definice H-kružnice plyne

$$(S_1A_1T'T'') = (S_1CC'C''). \tag{3}$$

Porovnáním rovností (1), (2), (3) obdržíme $(U_1UU'V') = (S_1CC'C'')$. Z toho vyplývá, že řady bodové $X_1S_1(S_1, C, C', C'', \ldots)$, $q(U_1, U, U', V', \ldots)$, jsou projektivní. Protože přímky S_1U_1, $C'U'$, $C''V'$ procházejí jedním bodem N_1, jsou tyto řady dokonce perspektivní a proto přímka CU prochází také bodem N_1. Z definice křivek konstantní křivosti pak plyne, že křivka $\Phi(X_1, U)$ prochází bodem C. Křivky $\Phi(X_1, U)$, $\Phi(S_1, A_1)$ se v bodě C dotýkají. Křivka $\Phi(X_1, U)$ je tedy křivkou Φ^*. Stejným způsobem dokážeme, že každý další průsečík přímky q s kuželosečkami k_1, k_2, k_3, k_4 je H-středem křivky Φ^*.

b) Dokážeme, že na přímce q neleží další H-střed křivky Φ^*. Každá křivka Φ^*, jejíž H-střed leží na přímce q, se dotýká křivky $\Phi(S_2, A_2)$ buď v bodě U nebo v bodě V. Předpokládejme, že je dána křivka $\Phi(S, U)$, $S \in q$. Poláru bodu S vzhledem k absolutní kružnici k označme s a Q_1, Q_2 průsečíky přímek SS_1, q s přímkou s. (Na obr. 1 není narýsováno.) Průsečíky přímky SS_1 s absolutní kružnicí k označme D', D'' a jako D označme ten průsečík přímky SS_1 s H-kružnicí $\Phi(S_1, A_1)$, pro který platí: Dvojice bodů U, U' a S, Q_2 se oddělují stejně jako dvojice D, D' a S, Q_1. Z vlastností křivky Φ^* plyne, že se přímky DU, $D'U'$, $D''V'$ protínají v bodě N' na přímce s. Platí buď $(S_1A_1T'T'') = (DS_1D'D'')$ nebo $(S_1A_1T'T'') = (S_1DD'D'')$. Podle (1), (2) pak platí buď $(DS_1D'D'') = (UU_2U'V')$ nebo $(S_1DD'D'') = (U_1UU'V')$. To znamená, že buď přímka S_1U_2 nebo přímka S_1U_1 prochází bodem N' a z definice křivek konstantní křivosti plyne, že bod S je H-středem křivky konstantní křivosti, která prochází buď body S_1, U_1 nebo body S_1, U_2. Na přímce q však leží jen čtyři body této vlastnosti a to body X_1, X_2, X_1', X_2'. Stejně ukážeme, že H-střed $S \in q$ křivky $\Phi^*(S, V)$ je totožný s některým průsečíkem přímky q s kuželosečkami k_3, k_4.

2. Předpokládejme, že křivka $\Phi(S_2, A_2)$ není H-kružnice. Pak je možno vést jejím H-středem tečnu x k absolutní kružnici k. Zvolme na přímce x libovolný bod R, jeho poláru označme r. Průsečíky přímky RS_1 s H-kružnicí $\Phi(S_1, A_1)$ označme E_1, E_2. Podle poznámky 1 v lit. [3] jsou křivky $\Phi(R, E_1)$, $\Phi(R, E_2)$ křivkami Φ^*.

3. Předpokládejme, že křivka $\Phi(S_2, A_2)$ je H-ekvidistanta. Pak je možno vést bodem S_2 přímku q, která nemá s absolutní kružnicí k žádný bod společný. Tato přímka neprotíná podle lit. [3] také kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4. Jestliže na přímce q zvolíme libovolný bod $S \neq S_2$, pak zřejmě neexistuje křivka Φ o H-středu S, která

by se dotýkala H-ekvidistanty $\Phi(S_2, A_2)$ a tedy neexistuje také křivka Φ^* o H-středu S.

Podle 1, 2, 3 jsou na všech přímkách svazku o středu S_2 body kuželoseček k_1, k_2, k_3, k_4 a tečen x, y, vedených z bodu S_2 k absolutní kružnici k a jen tyto body H-středy křivek Φ^*, c . b . d.

Provedeme diskusi o druhu H-kuželoseček k_1, k_2, k_3, k_4 v závislosti na typu křivky $\Phi(S_2, A_2)$ a na vzájemné poloze křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$. Budeme se opírat o výsledky diskuse, provedené v lit. [3] za větou 5. Předpokládáme stále, že křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ jsou regulární.

Označme M průsečík přímek S_2A_2, s_2 a předpokládejme nejdříve, že platí $(S_1A_1T'T'') \neq (MA_2W'W'')$, $(S_1A_1T'T'') \neq (A_2MW'W'')$ v případě, že je $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta a $(S_1A_1T'T'') \neq (S_2A_2W'W'')$, $(S_1A_1T'T'') \neq (A_2S_2W'W'')$ v případě, že je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice.

1. Nechť křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ neobsahují společné body a jedna neleží uvnitř druhé. Pak je bod S_1 vnějším bodem křivek $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak je možno volit označení tak, že H-kuželosečky k_1, k_3 jsou ideální a H-kuželosečky k_2, k_4 jsou vypuklé hyperboly.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 polohyperboly.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální a H-kuželosečky k_2, k_4 vypuklé hyperbolické paraboly.

2. Nechť se křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ protínají právě ve dvou bodech. Bod S_1 leží uvnitř jedné a vně druhé křivky $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$. Předpokládejme např., že leží uvnitř křivky $\Phi(S_2, P_1)$.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální, H-kuželosečka k_2 je elipsa a H-kuželosečka k_4 vypuklá parabola.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 polohyperboly.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální, H-kuželosečka k_2 je eliptická parabola a H-kuželosečka k_4 je vypuklá hyperbolická parabola.

3. Nechť jedna z křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ leží uvnitř druhé, popř. nechť se tyto křivky protínají ve čtyřech různých bodech. Pak bod S_1 leží uvnitř křivek $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální a H-kuželosečky k_2, k_4 elipsy.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 polohyperboly.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální, H-kuželosečky k_2, k_4 eliptické paraboly.

4. Nechť mají křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ vnější dotyk. Bod S_1 leží na křivce $\Phi(S_2, P_1)$ a vně křivky $\Phi(S_2, P_2)$.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální, H-kuželosečka k_4 je vypuklá hyperbola a H-kuželosečka k_2 je dvojnásobná přímka S_1S_2.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3, k_4 polohyperboly a H-kuželosečka k_2 dvojnásobná přímka S_1S_2.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální, H-kuželosečka k_4 vypuklá hyperbolická parabola a H-kuželosečka k_2 je dvojnásobná přímka S_1S_2.

5. Nechť mají křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ vnitřní dotyk. Bod S_1 leží uvnitř křivky $\Phi(S_2, P_1)$ a na křivce $\Phi(S_2, P_2)$.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální, H-kuželosečka k_2 je elipsa a H-kuželosečka k_4 dvojnásobná přímka S_1S_2.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3 polohyperboly a H-kuželosečka k_4 je dvojnásobná přímka S_1S_2.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální, H-kuželosečka k_2 je eliptická parabola a H-kuželosečka k_4 dvojnásobná přímka S_1S_2.

Předpokládejme nyní, že platí buď $(S_1A_1T'T'') = (A_2S_2W'W'')$ nebo $(S_1A_1T'T'') = (S_2A_2W'W'')$ v případě, že je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, po případě $(S_1A_1T'T'') = (MA_2W'W'')$ nebo $(S_1A_1T'T'') = (A_2MW'W'')$ v případě, že je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta.

1. Nechť je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice. Pak $P_2 \equiv S_2$, křivka $\Phi(S_2, P_2)$ je dvojnásobným bodem a $k_3 \equiv k_4 \equiv k'$, kde k' je dvojicí přímek – množinou H-středů křivek Φ, které procházejí H-body S_1, S_2. Druhy H-kuželoseček k_1, k_2 určíme podle předcházející diskuse.

2. Nechť je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta. Bod P_2 leží na její H-ose s_2. Křivka $\Phi(S_2, P_2)$ je dvojnásobnou úsečkou a $k_3 \equiv k_4 \equiv k'$, kde k' je množinou H-středů křivek Φ, které procházejí bodem S_1 a dotýkají se přímky s_2 (lit. [2]). Druhy H-kuželoseček k_1, k_2 určíme opět podle předcházející diskuse.

II. Mějme H-ekvidistantu $\Phi(S_1, A_1)$ a libovolnou regulární křivku $\Phi(S_2, A_2)$ (obr. 2, kde je $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta). Tečny v absolutních H-bodech H-ekvidistanty $\Phi(S_1, A_1)$ k absolutní kružnici k označme x, y, průsečíky přímky S_1A_1 s absolutní kružnicí k resp. s přímkou s_1 označme T', T'' resp. M. Průsečíky přímky S_2A_2 s absolutní kružnicí k označme W', W''. Sestrojme body P_1, P_2, pro které platí

$$(MA_1T'T'') = (A_2P_1W'W'') = (P_2A_2W'W''). \tag{1}$$

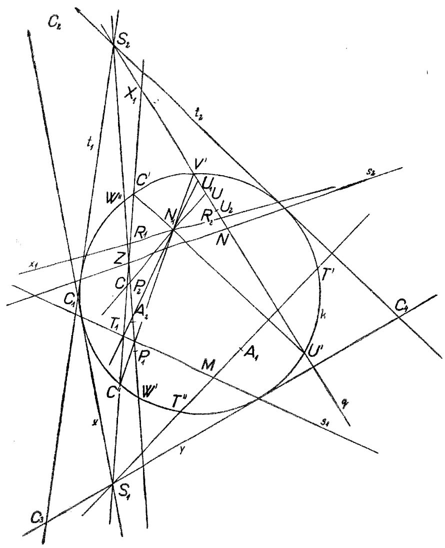
Uvažujme křivky $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$ a sestrojme podle lit. [4], věta 3, kuželosečky k_1, k_2 resp. k_3, k_4 a části $\overline{C_1C_3}$, $\overline{C_2C_4}$ společných tečen t_1, t_2 těchto křivek a absolutní kružnice k, jako množinu H-středů křivek Φ, které se dotýkají křivky $\Phi(S_2, P_1)$ resp. $\Phi(S_2, P_2)$ a přímky s_1.

Věta 2. Množinou H-středů křivek Φ, které se dotýkají H-ekvidistanty $\Phi(S_1, A_1)$ a křivky $\Phi(S_2, A_2)$, jsou kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 a dále

a) *v případě, že je křivka* $\Phi(S_2, A_2)$ *H-horocykl a* t *jeho společná tečna s absolutní kružnicí* k, *přímky* x, y, *část* $\overline{C_1C_3}$ *přímky* t *a body* C_1, C_3;

b) *v případě, že je křivka* $\Phi(S_2, A_2)$ *H-kružnice, přímky* x, y;

c) *v případě, že je křivka* $\Phi(S_2, A_2)$ *H-ekvidistanta, části* $\overline{C_1C_3}, \overline{C_2C_4}$ *přímek* t_1, t_2, *části* $\overline{C_1C_2}, \overline{C_3C_4}$ *přímek* x, y *a body* C_1, C_2, C_3, C_4.



Obr. 2

Důkaz: 1. Zvolme libovolnou sečnu q absolutní kružnice k, procházející bodem S_2. Průsečíky přímky q s křivkou $\Phi(S_2, A_2)$ resp. s absolutní kružnicí k označme U, V resp. U', V'. Označme dále U_1, U_2 ty průsečíky přímky q s křivkami $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$, pro které platí

$$(A_2P_1W'W'') = (U_1UU'V') = (UU_2U'V'). \tag{2}$$

Podobně označme V_1, V_2 ty průsečíky přímky q s křivkami $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$, pro které platí $(A_2P_1W'W'') = (VV_1U'V') = (V_2VU'V')$. Sestrojme tečny u_1, v_1, u_2, v_2 v bodech U_1, V_1, U_2, V_2 ke křivkám $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$ a podle věty 1, lit. [4]

přímky m_1, m_2 resp. m'_1, m'_2; n_1, n_2 resp. n'_1, n'_2, jako množinu H-středů křivek konstantní křivosti, které se dotýkají přímek u_1 resp. v_1; u_2 resp. v_2 a přímky s_1. Průsečíky $X_1, X_2, X'_1, X'_2, Y_1, Y_2, Y'_1, Y'_2$ přímky q s přímkami $m_1, m_2, m'_1, m'_2, n_1, n_2, n'_1, n'_2$ jsou podle věty 3, lit. [4], body kuželoseček k_1, k_2, k_3, k_4. (Konstrukce nejsou na obr. 2 provedeny.)

a) Dokážeme, že každý průsečík přímky q s kuželosečkami k_1, k_2, k_3, k_4 a s přímkami x, y je H-středem křivky Φ^*. Ukážeme např., že křivka $\Phi(X_1, U)$ je křivkou Φ^*. Křivka $\Phi(X_1, U)$ se dotýká v bodě U křivky $\Phi(S_2, A_2)$, zbývá ještě dokázat, že se dotýká křivky $\Phi(S_1, A_1)$. Průsečík T_1 přímky X_1S_1 s přímkou s_1 je bod dotyku přímky s_1 a křivky $\Phi(X_1, U_1)$. Poláru bodu X_1 k absolutní kružnici k označme x_1 a R_1, R_2 označme průsečíky přímek X_1S_1, q s přímkou x_1. Průsečíky přímky X_1S_1 s absolutní kružnicí k označme C', C'' tak, aby se dvojice bodů R_2, X_1 a U_1, U' oddělovaly stejně jako dvojice R_1, X_1 a S_1, C'. Protože křivka $\Phi(X_1, U_1)$ prochází bodem T_1, protínají se přímky $U_1T_1, C'U', C''V'$ v bodě N_1 na přímce x_1. Označme C ten z průsečíků přímky X_1S_1 s křivkou $\Phi(S_1, A_1)$, pro který platí: Dvojice bodů X_1, U_1 a U, U' se oddělují stejně jako dvojice X_1, T_1 a C, C'. Z definice H-ekvidistanty plyne

$$(MA_1T'T'') = (T_1CC'C''). \tag{3}$$

Porovnáním rovností (1), (2), (3) dostaneme $(T_1CC'C'') = (U_1UU'V')$. Z toho vyplývá, že řady bodové $X_1S_1(T_1, C, C', C'', \ldots)$, $q(U_1, U, U', V', \ldots)$ jsou projektivní. Protože přímky $U_1T_1, C'U', C''V'$ procházejí bodem N_1, prochází bodem N_1 také přímka CU. Křivka $\Phi(X_1, U)$ prochází proto bodem C a dotýká se v něm křivky $\Phi(S_1, A_1)$. Křivka $\Phi(X_1, U)$ je křivkou Φ^*. Stejným způsobem dokážeme, že každý další průsečík přímky q s kuželosečkami k_1, k_2, k_3, k_4 je H-středem křivky Φ^*. Označme W_1, W_2 průsečíky přímky q s přímkami x, y. Pak podle věty 1 a poznámky 1 v lit. [3] jsou křivky $\Phi(W_1, U)$, $\Phi(W_2, U)$, $\Phi(W_1, V)$, $\Phi(W_2, V)$ křivkami Φ^*.

b) Dokážeme, že na přímce q neleží další H-střed křivky Φ^*. Označme $\widehat{xy}$ úhel přímek x, y, ve kterém leží absolutní kružnice k a úhel k němu vrcholový. Podle lit. [4] se kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 dotýkají přímek x, y. Kromě příslušných bodů dotyku leží všechny ostatní body těchto kuželoseček uvnitř $\widehat{xy}$. Každá křivka Φ^*, jejíž H-střed leží na přímce q, se dotýká křivky $\Phi(S_2, A_2)$ buď v bodě U nebo v bodě V. Zvolme na přímce q bod S, který leží vně $\widehat{xy}$. Žádná křivka konstantní křivosti o H-středu S se nedotýká křivky $\Phi(S_1, A_1)$ a proto nejsou křivky $\Phi(S, U)$, $\Phi(S, V)$ křivkami Φ^*. V části a) jsme ukázali, že průsečíky W_1, W_2 přímek x, y s přímkou q jsou H-středy křivek Φ^*. Zvolme na přímce q uvnitř $\widehat{xy}$ libovolný H-střed S křivky Φ^*. Předpokládejme pro určitost, že $\Phi^* \equiv \Phi(S, U)$. Poláru bodu S vzhledem k absolutní kružnici k označme s a Q_1, Q_2 průsečíky přímek SS_1, q s přímkou s. (Na obr. 2 není narýsováno.) Průsečíky přímky SS_1 s absolutní kružnicí k resp. s přímkou s_1 označme D', D'' resp. M'. Jako D označíme ten průsečík přímky SS_1 s křivkou $\Phi(S_1, A_1)$, pro který platí: Dvojice bodů U, U' a S, Q_2 se oddělují stejně jako dvojice D, D' a S, Q_1. Přímky $DU, D'U', D''V'$ se protínají v bodě N' na přímce s. Platí buď $(MA_1T'T'') =$

$= (DM'D'D'')$ nebo $(MA_1T'T'') = (M'DD'D'')$. Podle (1), (2) pak platí buď $(DM'D'D'') = (UU_2U'V')$ nebo $(M'DD'D'') = (U_1UU'V')$. To znamená, že buď přímka $M'U_2$ nebo přímka $M'U_1$ prochází bodem N'. Bod S je H-středem křivky konstantní křivosti, která se dotýká křivky $\Phi(S_2, A_2)$ v bodě U a přímky s_1 v bodě M'. Na přímce q však mají tuto vlastnost jen body X_1, X_2, X_1', X_2'. Podobně ukážeme pro H-střed S každé křivky $\Phi^*(S, V)$.

2. Předpokládejme, že křivka $\Phi(S_2, A_2)$ není H-kružnice. Pak je možno vést jejím H-středem S_2 tečnu t k absolutní kružnici k. Zvolme libovolný bod W části $\overline{C_1C_3}$ přímky t, průsečíky přímky WS_1 s H-ekvidistantou $\Phi(S_1, A_1)$ označme H_1, H_2. Křivky $\Phi(W, H_1)$, $\Phi(W, H_2)$ jsou zřejmě křivkami Φ^*. Zvolíme-li vnější bod W části $\overline{C_1C_3}$ přímky t, pak neexistuje křivka Φ o H-středu W, která se dotýká křivky $\Phi(S_1, A_1)$ a proto také neexistuje křivka Φ^* o H-středu W. Jestliže zvolíme $W \equiv C_1$ resp. $W \equiv C_3$, pak každá křivka Φ o H-středu W je křivkou Φ^*.

3. Předpokládejme, že H-křivka $\Phi(S_2, A_2)$ je H-ekvidistanta. Pak je možno bodem S_2 vést přímku q, která neprotíná absolutní kružnici k. Zvolme libovolný bod $S \neq S_2$ přímky q. Neexistuje křivka konstantní křivosti o H-středu S, která by se dotýkala křivky $\Phi(S_2, A_2)$ a proto neexistuje křivka Φ^* o H-středu S. Všechna tvrzení věty jsou dokázána.

Provedeme diskusi o druhu kuželoseček k_1, k_2, k_3, k_4 v závislosti na typu křivky $\Phi(S_2, A_2)$ a na vzájemné poloze křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$. Budeme se opírat o výsledky diskuse, provedené v lit. [4] za větou 3.

Předpokládejme nejdříve, že $(MA_1T'T'') \neq (S_2A_2W'W'')$, $(MA_1T'T'') \neq (A_2S_2W'W'')$ v případě, že je $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice a $(MA_1T'T'') \neq (ZA_2W'W'')$, $(MA_1T'T'') \neq (A_2ZW'W'')$ v případě, že je $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta a Z je průsečík přímek S_2A_2, s_2.

1. Nechť křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ neobsahují společné body a jedna neleží uvnitř druhé. Pak přímka s_1 nemá s křivkami $\Phi(S_2, P_1)$, $\Phi(S_2, P_2)$ žádný společný bod.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 polohyperboly.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_2, k_4 ideální, H-kuželosečky k_2, k_4 jsou vyduté hyperboly.

c) Jestliže je $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 ideální, H-kuželosečky k_2, k_4 vyduté hyperbolické paraboly.

2. Nechť se křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ protínají ve dvou různých bodech. Přímka s_1 nemá s jednou křivkou, např. s $\Phi(S_2, P_1)$, žádný bod společný a křivku $\Phi(S_2, P_2)$ protíná ve dvou různých bodech.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 polohyperboly.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak je H-kuželosečka k_1 ideální, H-kuželosečky k_2, k_3, k_4 jsou vyduté hyperboly.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak je H-kuželosečka k_1 ideální, H-kuželosečky k_2, k_3 jsou vyduté hyperbolické paraboly a k_4 je hyperbolická parabola.

3. Nechť jedna z křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ leží uvnitř druhé, popř. nechť se křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ protínají ve čtyřech různých bodech. Pak přímka s_1 protíná jak křivku $\Phi(S_2, P_1)$, tak $\Phi(S_2, P_2)$ ve dvou různých bodech.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 polohyperboly.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 vyduté hyperboly.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 hyperbolické paraboly a H-kuželosečky k_2, k_4 vyduté hyperbolické paraboly.

4. Nechť mají křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ vnější dotyk. Přímka s_1 se dotýká např. křivky $\Phi(S_2, P_1)$ a nemá s křivkou $\Phi(S_2, P_2)$ žádný bod společný.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3, k_4 polohyperboly a H-kuželosečka k_2 je dvojnásobná přímka.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak H-kuželosečky k_1, k_3 jsou vyduté hyperboly, H-kuželosečka k_2 je dvojnásobná přímka a H-kuželosečka k_4 je ideální.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 vyduté hyperbolické paraboly, H-kuželosečka k_2 je dvojnásobná přímka a H-kuželosečka k_4 je ideální.

5. Nechť mají křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ vnitřní dotyk v H-bodě. Pak se přímka s_1 dotýká např. křivky $\Phi(S_2, P_1)$ a křivku $\Phi(S_2, P_2)$ protíná ve dvou různých bodech.

a) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3, k_4 polohyperboly a H-kuželosečka k_2 je dvojnásobná přímka.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3, k_4 vyduté hyperboly a H-kuželosečka k_2 je dvojnásobná přímka.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 vyduté hyperbolické paraboly, H-kuželosečka k_4 je hyperbolická parabola a H-kuželosečka k_2 je dvojnásobná přímka.

6. Nechť se křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ dotýkají v právě jednom absolutním H-bodě. Pak přímka s_1 prochází absolutním H-bodem křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$.

b) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_3 vyduté hyperbolické paraboly a H-kuželosečky k_2, k_4 hyperbolické paraboly.

c) Jestliže je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-horocykl, pak jsou H-kuželosečky k_1, k_2, k_3, k_4 oskulační paraboly.

7. Nechť je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta a nechť se křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ dotýkají v obou absolutních H-bodech. Pak $s_1 \equiv s_2$, H-kuželosečky k_1, k_3 jsou H-ekvidistanty a H-kuželosečky k_2, k_4 jsou ideální.

Předpokládejme nyní, že platí buď $(MA_1T'T'') = (S_2A_2W'W'')$ nebo $(MA_1T'T'') = (A_2S_2W'W'')$ v případě, že je $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice a $(MA_1T'T'') = (ZA_2W'W'')$ nebo $(MA_1T'T'') = (A_2ZW'W'')$ v případě, že je $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta.

1. Nechť je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-kružnice. Pak je $S_2 \equiv P_2$. Křivka $\Phi(S_2, P_2)$ je dvojnásobným bodem a platí $k_3 \equiv k_4 \equiv k'$, kde k' je polohyperbola, jako množina H-středů křivek Φ, které procházejí H-bodem S_2 a dotýkají se přímky s_1. Druhy H-kuželoseček k_1, k_2 určíme podle předchozí diskuse.

2. Nechť je křivka $\Phi(S_2, A_2)$ H-ekvidistanta. Pak $P_2 \in s_2$. Křivka $\Phi(S_2, P_2)$ je dvojnásobnou úsečkou a platí $k_3 \equiv k_4 \equiv k'$, kde k' je množinou H-středů křivek Φ, které se dotýkají přímek s_1, s_2. (lit. [4]). Druhy H-kuželoseček k_1, k_2 určíme opět podle předchozí diskuse.

Poznámka. Případ, kdy je jednou křivkou H-kružnice a druhou H-ekvidistanta, jsme zkoumali jak v části I, tak v části II. Stačí porovnat výsledky diskuse v odstavcích b) části I s odstavci a) části II.

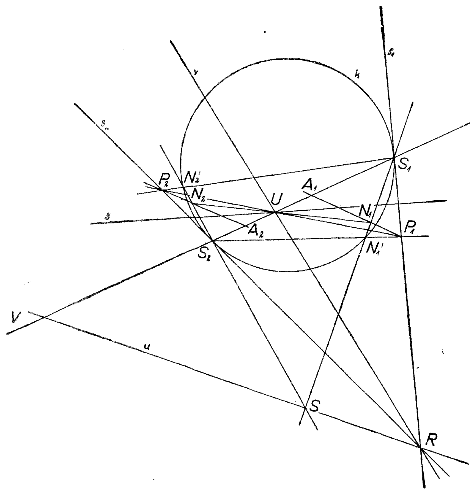
III. Mějme dány různé H-horocykly $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$. Předpokládejme nejdříve, že $S_1 \neq S_2$. Body A_1, A_2 zvolme tak, aby ležely na přímce S_1S_2. Poláry bodů S_1, S_2 označme s_1, s_2 a R jejich průsečík (obr. 3). Podle úmluvy 1 v lit. [3] uvažujme na přímce S_1S_2 body U, V, pro které $[UVA_1A_2]$.

Věta 3. Množinou H-středů křivek Φ, které se dotýkají H-horocyklů $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$, jsou přímky $u \equiv VR$, $v \equiv UR$, s_1, s_2.

Důkaz: a) Dokážeme, že každý bod přímek u, v je H-středem křivky Φ^*. Podle věty 5, lit. [2] prochází křivky $\Phi(U, A_1)$, $\Phi(V, A_1)$ bodem A_2 a podle věty 1, lit. [3] jsou křivkami Φ^*. Každá křivka konstantní křivosti o H-středu R je křivkou Φ^*. Zvolme na přímce u libovolný bod $S \neq V$, $S \neq R$. Průsečíky přímek SS_1, SS_2 s absolutní kružnicí k, různé od bodů S_1, S_2 označme N_1', N_2' a průsečíky přímky S_2N_1' resp. S_1N_2' s přímkou s_1 resp. s_2 označme P_1 resp. P_2. Podle definice křivky konstantní křivosti jsou body $N_1 \equiv P_1A_1 \,.\, SS_1$, $N_2 \equiv P_2A_2 \,.\, SS_2$ průsečíky přímek SS_1, SS_2 s křivkami $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$. Uvažujme involutorní kolineaci φ o středu U a ose u. Kružnice k je v této kolineaci invariantní, bodu S_1 odpovídá bod S_2. Zřejmě také $A_1 \to A_2$ a z toho $\Phi(S_1, A_1) \to \Phi(S_2, A_2)$. Dále $SS_1 \to SS_2$ a $N_1 \to N_2$. Přímka N_1N_2 prochází tedy bodem U. Polára s bodu S prochází také bodem U a z definice křivek konstantní křivosti plyne, že křivka $\Phi(S, N_1)$ prochází bodem N_2. Tato křivka se zřejmě v bodech N_1, N_2 dotýká křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ a je křivkou Φ^*. Stejně ukážeme, že také každý bod přímky v je H-středem křivky Φ^*. Každý bod přímek s_1, s_2 je zřejmě také H-středem křivky Φ^*.

b) Dokážeme dále, že neexistuje další H-střed křivky Φ^*. Předpokládejme, že bod S neleží na přímce S_1S_2 a je H-středem křivky Φ^*. Sestrojme průsečíky N_1, N_2 přímek SS_1, SS_2 s křivkami $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$. Uvažovaná křivka Φ^* se dotýká křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ v bodech N_1, N_2. Uvažujme úplný čtyřroh $S_1S_2N_1'N_2'$, vepsaný absolutní kružnici k. (Postup můžeme sledovat na obr. 3.) Označme $W \equiv N_1'N_2' \,.\, S_1S_2$, $Z \equiv N_1'S_2 \,.\, N_2'S_1$ diagonální body tohoto čtyřrohu, různé od S. Pak přímka $s \equiv WZ$ je polára bodu S. Protože křivka Φ^* prochází body N_1, N_2, prochází přímka N_1N_2 buď bodem W nebo bodem Z. Uvažujme involutorní kolineaci

ψ o středu W a ose $w \equiv SZ$. V této kolineaci je kružnice k invariantní a proto $S_1 \to S_2$, $N_1' \to N_2'$, $s_1 \to s_2$, čili $S_1N_2' \to S_2N_1'$ a $P_1 \equiv s_1 \,.\, SN_1' \to P_2 \equiv s_2 \,.\, S_1N_2'$. Z toho vyplývá, že přímka N_1N_2 prochází bodem W a $N_1 \to N_2$, $P_1N_1 \to P_2N_2$, $A_1 \to A_2$. Jestliže označíme Q průsečík přímek S_1S_2, w, pak $(A_1A_2WQ) = -1$ a $[WQA_1A_2]$. To však znamená, že buď $W \equiv U$ nebo $W \equiv V$ a $S \in u$ nebo $S \in v$. Tím je věta dokázaná.



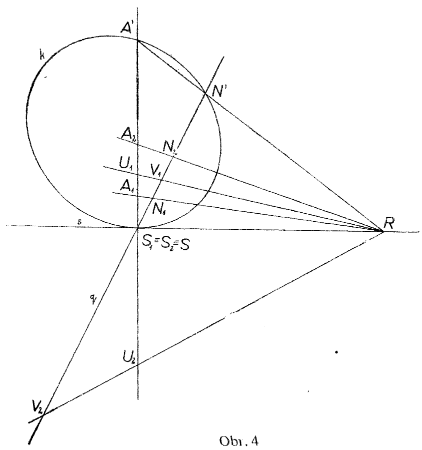
Obr. 3

Mějme dva různé H-horocykly $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$, přičemž $S_1 \equiv S_2 \equiv S$. Předpokládejme, že body A_1, A_2 jsou voleny tak, že leží na přímce, procházející bodem S (obr. 4). Označme $A' \neq S$ průsečík přímky A_1A_2 s absolutní kružnicí k a body U_1, U_2 takové, že $[U_1U_2A_1A_2]$, přičemž U_1 nechť je H-bod. Veďme bodem S přímku $q \neq A_1A_2$, $q \neq s$, kde s je polára bodu S vzhledem ke kružnici k. Průsečík přímky q s absolutní kružnicí k, různý od bodu S, označme N' a průsečíky této přímky s křivkami $\Phi(S, A_1)$, $\Phi(S, A_2)$ označme N_1, N_2. Sestrojme na přímce q body V_1, V_2 takové, že $[V_1V_2N_1N_2]$, přičemž nechť je V_1 H-bod. Přímky N_1A_1, N_2A_2, $N'A'$ se protínají v bodě R na přímce s. Protože se středovým promítáním zachovává dvojpoměr bodů, procházejí bodem R také přímky U_1V_1, U_2V_2. Body V_1, V_2, vytvářejí kuželosečky k_1, k_2, kolineární s křivkou $\Phi(S_1, A_1)$, v kolineacích $\alpha(S, s, A_1 \to U_1)$, $\beta(S, s, A_1 \to U_2)$.

Věta 4. Množinou H-středů křivek konstantní křivosti, které se dotýkají křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$, *jsou kuželosečky* k_1, k_2 *a přímka s.*

Důkaz: Zvolme libovolný bod $V_1 \neq S$ kuželosečky k_1. Přímka SV_1 protíná H-horocykly $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ v bodech N_1, N_2. Podle věty 5 lit. [3] prochází křivka $\Phi(V_1, N_1)$ bodem N_2 a zřejmě se v bodech N_1, N_2 dotýká křivek $\Phi(S_1, A_1)$ $\Phi(S_2, A_2)$. Křivka $\Phi(V_1, N_1)$ je tedy křivkou Φ^*. Stejně dokážeme pro každý bod kuželosečky k_2. Každá křivka konstantní křivosti, jejíž H-střed leží na přímce s, se dotýká křivek $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ v bodě S.

Zvolme H-střed W libovolné křivky Φ^* a uvažujme přímku WS. Tato přímka protíná křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ v bodech N_1, N_2. Křivka Φ^* prochází body N_1, N_2 a podle věty 5, lit. [2] leží bod W na kuželosečce k_1 nebo na kuželosečce k_2.



Obr. 4

LITERATURA

[1] *Kagan V. F.:* Osnovanija geometrii. Část 2. Moskva 1956.

[2] *Machala F.:* O množině středů křivek konstantní křivosti hyperbolické roviny, které se dotýkají dané přímky a procházejí daným bodem. Acta Univ. Pal. Olomucensis, 1968.

[3] *Machala F.:* O množině středů křivek konstantní křivosti rozšířené hyperbolické roviny, které procházejí daným bodem hyperbolické roviny a dotýkají se dané křivky konstantní křivosti Acta Univ. Pal. Olomucensis, 1969.

[4] *Machala F.:* O množině středů křivek konstantní křivosti hyperbolické roviny, které se dotýka dané křivky konstantní křivosti a přímky. Acta Univ. Pal. Olomucensis, 1970.

Zusammenfassung

ÜBER DIE MENGE DER MITTELPUNKTE VON KURVEN KONSTANTER KRÜMMUNG DER HYPERBOLISCHEN EBENE, DIE ZWEI VERSCHIEDENE KURVEN KONSTANTER KRÜMMUNG BERÜHREN

FRANTIŠEK MACHALA

In der vorliegenden Arbeit wird die Menge der Mittelpunkte von Kurven konstanter Krümmung der hyperbolischen Ebene gefunden, die zwei verschiedene Kurven konstanter Krümmung berühren. Weiter wird eine volle Diskussion des gegebenen Problems für alle Arten der Kurven und für verschiedene gegenseitige Lagen dieser Kurven durchgeführt. Die Lösung wird synthetisch am Beltrami-Klein-Modell angegeben.

Summary

ON A SET OF CENTRES OF CURVES OF CONSTANT CURVATURE IN HYPERBOLIC PLANE, TOUCHING TWO DIFFERENT CURVES OF CONSTANT CURVATURE

FRANTIŠEK MACHALA

A set of centres of curves of constant curvature in hyperbolic plane is found, touching the given two different curves of constant curvature. More above a thorough treatment of the given problem is carried out for all types of curves and for different mutual positions of these curves. The solution is obtained synthetically by using the Beltrami-Klein model.