1972 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 37

Katedra metodiky matematiky a elementární matematiky přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. Paed. Dr. Miloslav Zedek.

PSEUDORINGE

STANISLAV ŽIDEK

(Eingelangt am 13. 4. 1971)

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie der Pseudoringe entwickelt, der eine Verallgemeinerung der Ringtheorie darstellt. Als Anregung zu dieser Arbeit diente besonders [1].

Vor allem wollen wir das neutrale Element relativ zu der partiellen binären Operation definieren, die wir mit dem Symbol $+$ als partielle Addition bezeichnen werden.

D_1: Auf der Menge E sei eine partielle binäre Operation definiert, welche als Addition geschrieben wird.

$o \in E$ wird neutrales Element relativ zu $+$ genannt, falls beide Summen $o + x$ und $x + o$ für jedes solche Element $x \in E$ definiert sind, das mindestens mit einem Elemente von E addierbar ist und wenn weiter $x + o = o + x = x$ gilt.

I. Pseudoringe.

D_2: Als Pseudoring wollen wir eine Menge E bezeichnen, auf der folgende zwei innere binäre Operationen definiert sind:

a) die assoziative Multiplikation xy;

b) die partielle Addition, welche folgenden Axiomen genügt:

A_1: sie ist kommutativ ($x + y = y + x$ falls mindestens eine der Summen $x + y$, $y + x$ definiert ist; wir sagen in diesem Falle, dass x und y addierbare Elemente sind);

A_2: wenn x und y addierbare Elemente sind, ist zur Addierbarkeit von $(x + y)$ und z notwendig und genügend die Addierbarkeit von x und z und gleichzeitig von y und z; x und $(y + z)$ sind dann auch addierbar und es gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

A_3: es gibt ein neutrales Element o;

A_4: wenn x und z und gleichzeitig y und z addierbar sind und $x + z = y + z$, dann gilt auch $x = y$;

A_5: die Multiplikation ist mit der Addition von rechts und von links distributiv.

Verabredung I: Die Menge aller Elemente, die mit o addierbar sind werden wir mit A_o bezeichnen.

$$A_o = \{x\ ;\ x \in E\ ,\ x + o \text{ def.}\}\ .$$

Satz 1: Wenn $x \in A_o$ und $y \in A_o$ addierbar sind und $x + y = x$, dann gilt $y = o$.

Beweis: Für $x \in A_o$ folgt aus der Definition von A_o

$$x + o = x. \tag{1}$$

Laut Voraussetzung unseres Satzes gilt

$$x + y = x. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun $x + o = x + y$ und hiervon laut A_4 bekommen wir $y = o$.

D_3: Das neutrale Element relativ zur partiellen Addition des Pseudoringes E, welche den Axiomen $A_1 - A_5$ und D_1 folgt, werden wir Nullelement des Pseudoringes nennen und durch 0 bezeichnen.

Satz 2: Für das Nullelement 0 des Pseudoringes E gilt $0 + 0 = 0$.

Beweis: Es sei $x \in A_o$. Aus *Verabredung I* folgt, dass $x + 0 = x$ und dass die Summe $(x + 0) + 0$ für jedes $x \in A_o$ definiert ist. Daraus bekommen wir, mit Beachtung von A_2, dass auch die Summe $0 + 0$ definiert ist und auch, dass $(x + 0) + 0 = x + (0 + 0)$ ist. Mittels Umformung der linken Seite folgt weiter $x + 0 = x + (0 + 0)$ und daraus wieder behelfs A_4 schliesslich $0 = 0 + 0$. Damit ist auch $0 \in A_o$ bewiesen.

Satz 3: Für jedes $\alpha \in E$ gilt $\alpha 0 = 0\alpha = 0$.

Beweis: x sei ein beliebiges Element aus A_o, α ein beliebiges Element aus der Menge E. Es folgt aus der Definition des Pseudoringes, dass das Produkt α $(x + 0)$ definiert ist und laut A_5 ist es gleich der Summe der addierbaren Elemente αx und $\alpha 0$;

$$\alpha(x + 0) = \alpha x + \alpha 0\ . \tag{1}$$

Für das Produkt $\alpha(x + 0)$ gilt aber auch

$$\alpha(x + 0) = \alpha x\ . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun $\alpha x + \alpha 0 = \alpha x$ und daraus und aus dem *Satz 1* haben wir $\alpha 0 = 0$. Analog kann man auch $0\alpha = 0$, beweisen für jedes $\alpha \in E$; somit haben wir für dieses α $\alpha 0 = 0\alpha = 0$, was zu beweisen war.

Satz 4: Für jedes $\alpha \in E$ und jedes $x \in A_o$ gilt $\alpha x \in A_o$, $x\alpha \in A_o$.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus *Satz 3* und aus A_5.

Satz 5: Die Summe zweier beliebigen addierbaren Elemente x, y des Pseudoringes E gehört der Menge A_o.

Beweis: $x + y$ sei definiert. Aus der Definition der Menge A_o und aus dem *Satz 2* folgt $x \in A_o$ und gleichzeitig $y \in A_o$ und also $x + 0 = x$ sowie auch $y + 0 = y$. Laut A_2 ist auch die Summe $(x + y) + 0$ definiert und somit $x + y \in A_o$.

D_4: Pseudoring mit kommutativer Multiplikation werden wir kommutativen (abelschen) Pseudoring nennen.

D_5: Pseudoring welcher das Einheitselement $e \in A_o$ enthält, wird Einheitspseudoring genannt.

Satz 6: Wenn der Pseudoring E ein Einheitspseudoring ist, gilt $A_o = E$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus D_5 und aus *Satz 4*; es genügt dabei für $x \in A_o$ das Element e zu wählen.

D_6: A_x sei die Menge aller Elemente $y \in A_o$, die mit x addierbar sind, wo x ein fest gewähltes Element aus A_o ist. Wenn wir zu jedem $x \in A_o$ die zugehörige

Menge A_x konstruieren, so wollen wir den Durchschnitt dieser Mengen $(\bigcap_{x \in A_0} A_x)$ mit A bezeichnen.

Bemerkung: 1. $A \subset A_0$, $A \neq \emptyset$ $(0 \in A)$

2. A ist die Menge aller miteinander addierbaren Elemente des Pseudoringes E.

Satz 7: A ist eine additive kommutative Halbgruppe regulärer Elemente, die auch das Nullelement von E enthält.

Beweis: Alles ist klar laut D_2 und D_6.

Satz 8: Es sei eine Menge E gegeben mit zwei inneren binären Operationen mit folgenden Eigenschaften:

a) relativ zu der Multiplikation ist E eine Halbgruppe,

b) relativ zu der Addition, die auf $A \subset E$ definiert ist, ist A eine abelsche Halbgruppe mit regulären Elementen und mit dem Nullelement 0,

c) für beliebige Elemente x, y aus A und beliebiges $z \in E$ finden die Distributivgesetze

$$(x + y)\,z = xz + yz,\ z\,(x + y) = zx + zy$$

statt.

Die Menge E ist dann ein Pseudoring E.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus D_2 und *Satz 7*.

Bemerkung: Jeder Ring ist gleichzeitig ein Pseudoring.

Satz 9: E sei ein Einheitspseudoring, der ein solches Element x enthält, für welches $x + e$ definiert und $x + e = 0$ ist. Dann gibt es zu jedem Elemente $a \in E$ das Element $xa = ax$, addierbar mit a mit der Eigenschaft $xa + a = 0$.

Beweis: E sei ein Einheitspseudoring und es gelte $x + e = 0$ für $x \in E$. Für jedes Element $a \in E$ ist der Produkt $a(x + e)$ definiert und laut *Sazt 3* ist dieser Produkt gleich dem Nullelemente des Pseudoringes E. Aus A_5 und A_1 folgern wir auch

$$a(x + e) = ax + a = a + ax = 0 \tag{1}$$

und

$$(x + e)a = xa + a = a + xa = 0\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun $a + ax = a + xa$ und daraus, mit Hilfe von A_4 schliesslich $ax = xa$.

Satz 10: E sei ein Einheitspseudoring, der ein solches Element x enthält, für welches $x + e$ definiert ist und $x + e = 0$ gilt. Für jedes $a \in E$ gilt dann

$$a = x(xa) = (xx)a = x(ax) = (ax)x = a(xx).$$

Beweis: E sei ein Einheitspseudoring und es gelte $x + e = 0$, wo $x \in E$. Für jedes $a \in E$ ist laut *Satz 9* die Summe $xa + a$ definiert und gleich dem Nullelemente des Pseudoringes E. Es ist also auch $x(xa) + xa = 0$. Aus der Richtigkeit der Relation $x(xa) + xa = xa + a$ folgt jetzt, mit Hilfe von A_1, dass auch $xa + x(xa) = xa + a$ gilt und daraus behelfs A_4 nun $x(xa) = a$. Aus dem Assoziativgesetz für die Multiplikation und aus dem *Satz 9* folgt bereits die Behauptung des Satzes.

Bemerkung: Das Element x ist symmetrisch zu e respektiv zu der Addition, das Element $xa = ax$ ist symmetrisch zu a respektiv zu der Addition.

Verabredung II: Das relativ zu der Addition symmetrische Element ax zu a werden wir als entgegengesetztes Element durch $-a$ bezeichnen.

Satz 11: E sei ein Einheitspseudoring, welcher das Element $x = -e$ enthält. Für jedes $a \in E$ und jedes $b \in E$ ist dann die Summe $a + b \in E$ definiert.

Beweis: E sei ein Einheitspseudoring, welcher das Element $x = -e$ enthält.

Laut *Satz 9* ist die Šumme $b + xb$ fúr jedeš $b e E$ definiert und sie ist dem Nullelemente des Pseudoringes E gleich. Dabei gilt $xb = bx$. Aus dem *Satz 6,* aus A_2 und A_4 folgt, dass auch die Summen *(Jb* f J(>) { *a,* 6 4 a, x6 f *a* definiert sind, welche der Menge A_0 — E angehoren.

Satz 12: Der Einheitspseudoring E ist ein Ring E genau dann, wenn er das entgegengcsetzte Element x — *-e* zu dem Einheitselemente e enthált.

Beweis : E sei ein Einheitspseudoring, welcher das Element x = *-e* enthált. Aus den *Satzen 8,9,10,11* folgt, dass die Menge E eine kommutative Gruppe relativ zu der Addition ist. Relativ zu der Multiplikation, die distributiv von links und von rechts ist, ist E eine Halbgruppe und E ist also ein Ring. Die Gultigkeit des umgekehrten Satzes ist unmittelbar kíar *(Bemerkung* zum *Satz 8).*

D_7: Als Unterpseudoring des Pseudoringes E wird jede nichtleere Menge *HczE* bezeichnet, in der die aus E induzierte Struktur die Pseudoringstruktur ist.

D_8: Der Pseudoring *E,* fúr welchen $A_0 \setminus A = 0$ heisst ^Í-Pseudoring.

Bemerkung: Aus dem *Satze 12* und $Z)_8$ folgt, dass eine notwendige Bedingung dazu, dass der Pseudoring E ein Ring sei geniigt, wenn er ein A -Pseudoring ist.

II. Pseudoringideal.

$Z)_9$: Als linkes (rechtes) Ideál des Pseudoringes E wird eine relativ zur Addition geschlossene Menge a genannt, fiir welche a Q c a (o a c o) fúr jedeš a e E gilt. Eine Untermenge des Pseudoringes *E,* welche gleichzeitig linkes und rechtes Ideál des Pseudoringes ist, wird beiderseitiges Ideál genannt.

Bemerkung: Fiir einen kommutativen Pseudoring E fallen die drei Arten der Ideále zusammen; in diesem Falle betrachten wir bloss Ideále des Pseudoringes ***E.***

D_{10}: Das Ideál des Pseudoringes *E,* welches nur das Nullelement des Pseudoringes E enthált, werden wir Nullideal des Pseurodingeš E nennen und mit 0 bezeichnen.

Satz 13: Jeder Pseudoring £ enthált das Nullideal des 0 Pseudoringes *E.*

Beweis: Die Gultigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus D_{10} und aus dem *Satz 3.*

Satz 14: Es sei ein /l-Pseudoring E gegeben, die Menge A ist dann ein beiderseitiges Ideál des ^-Pseurodingeš *E.*

Beweis : Laut *Satz 4* gilt, dass *<xx* und gleichzeitig auch *xa* der Menge A_0 gehort fiir jedeš x *e* A_0 und fúr jedeš *oc e E.* Fúr den J4-Pseudoring E gilt aber A_0 ~ A und also *ocA* c A und gleichzeitig *Aoc* c *A,* was zu beweisen war.

Satz 15: E sei ein Einheits-/í-Pseudoring; die Menge E ist dann beiderseitiges Ideál des A - Pseudoringes *E.*

Beweis : Fúr E folgt aus *Satz 6* und aus der Definition des A -Pseudoringes A_0 --= $A = E$ und daraus laut *Satz 14* folgt bereits, dass E biederseitiges Ideál des A -Pseudoringes E ist.

Bemerkung: 1. Ein analoger Satz gilt auch fúr Einheitsringe.

2. Laut *Satz 15* ist im Einheits-./1-Pseudoringe E die Addition in der ganzen Menge £ definiert; E ist relativ zu der Addition eine kommutative Halbgruppe regulárer Elemente mit dem Nullelement 0.

3. Fúr das Einheits-/4-Pseudoring kann mm den *Satz 12* mit Hilfe des Ideales des A -Pseudoringes E beweisen.

Satz 16: Eine notwendige und genúgende Bedingung dazu, dass ein Einheits--v4-Pseudoring *E*ein Ring sei ist, dass er das Element x enthalte, fúr das x -\- e = 0 gilt.

Beweis: 1. Es sei ein Einheits-A-Pseudoring E gegeben, der das Element x enthält, für das $x + e = 0$ ist. Aus dem *Satze 15* wissen wir, dass die Menge $A_o = A = E$ ein beiderseitiges Ideal ist. Aus den *Satzen 9* und *10* folgt, dass zu jedem Element $\alpha \in E$ das entgegengesetzte Element relativ zu der Addition existiert- die Menge E ist also eine kommutative additive Gruppe. Relativ zu der Multiplikation ist E eine Halbrgruppe mit neutralem Elemente, es gilt A_5 und E ist daher ein Ring.

2. Der umgekehrte Satz gilt, denn jeder Einheitsring ist ein Eintheitspseudoring, die abelsche additive Gruppe des Ringes ist beiderseitiges Ideal und deshalb ist der Einheitsrign ein Einheits-A-Pseudoring, der $x = -e$ enthält, für welches $x + e = 0$ gilt.

III. Modelle des Pseudoringes.

Satz 17: Jede abelsche Halbgruppe G mit regulären Elementen und mit neutralem Element ist eine additive abelsche Halbgruppe eines Pseudoringes.

Beweis: Die binäre Operation in G möge additiv geschrieben werden. Wir führen weiter in G die Nullmultiplikation ein, d. h. wir setzen $ab = 0$ für beliebige zwei Elemente $a, b \in G$. Diese Nullmultiplikation ist assoziativ, kommutativ und auch distributiv; laut *Satz 8* gilt also auch die Behauptung unseres Satzes.

Bemerkung: Auf die Weise, die im Beweis des vorigen Satzes beschrieben ist, haben wir einen speziellen kommuntativen Pseudoring gewonnen, den wir Nullpseudoring nennen werden.

Satz 18: Jeder Nullpseudoring E enthält nur das Nullideal $\mathbf{0}$ des Pseudoringes E.

Beweis: Alles folgt aus D_{10} und aus der Nullmultiplikation im Nullpseudoringe E.

Satz 19: Es sei eine Menge C ganzer Zahlen gegeben mit zwei inneren binären Operationen:

a) der gewöhnlichen Multiplikation,

b) der gewöhnlichen Addition, die aber nur für ganze Zahlen vom Type $y = nx$ definiert ist, wo n eine fest gewählte natürliche Zahl bedeuted und $x \in C$. Dann ist die Menge C ein kommutativer A-Pseudoring C_n.

Beweis: Die Menge C ein relativ zu der Multiplikation nach a) eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Elemente. Die Menge $A_o = \{y; y = nx, n$-eine fest gewählte natürliche Zahl, $x \in C\}$ ist eine kommutative Gruppe relativ zu der Addition nach b). Est ist klar, dass auch distributives Gesetz gilt und die Menge C ist also laut *Satz 8*, D_4 und D_7 ein kommutativer A-Pseudoring C_n.

Bemerkung: Für $n = 1$ ist $A = A_o = C$ und der A-Pseudoring C_1 ist dem Ringe ganzer Zahlen gleich. Für $n = 2$ bekommen wir einen kommutativen A-Pseudoring C_2. Der Ring aller geraden Zahlen ist ein A-Unterpseudoring des A-Pseudoringes C_2. Der A-Pseudoring C_4 ist ein A-Unterpseudoring des A-Pseudoringes C_2 und so ähnlich.

Satz 20: E sei die Menge aller geordneten Paare $[a, b] \in C \times C$, wo C die Menge aller ganzen Zahlen ist, mit zwei inneren binären Operationen:

a) der Multiplikation, die durch die Vorschrift

$$[a, b]\,[c, d] = [ac, bd] \tag{1}$$

gegeben ist,

b) der Addition, die nur für geordnete Paare der Form $[a, 0]$ definiert ist durch die Vorschrift

$$[a, 0] + [b, 0] = [a + b, 0] . \tag{2}$$

E ist dann ein kommutativer A-Pseudoring.

Beweis: Aus der Gültigkeit des Kommutativ- und Assoziativgesetzes für Multiplikation ganzer Zahlen folgt die Gültigkeit des kommutativen und assoziativen Gesetzes auch für die durch (1) definierte Multiplikation geordneter Paare.

Aus der Gültigkeit des kommutativen und assoziativen Gesetzes für die Addition ganzer Zahlen folgt auch die Gültigkeit dieser Gesetze für die partielle Addition geordneter Paare, die durch (2) definiert ist. Das neutrale Element für die Addition ist das Paar [0,0]. Die Gültigkeit von A_4 ist klar. Schliesslich wollen wir noch die Gültigkeit des distributiven Gesetzes zeigen:

$$[a, b] ([c, 0] + [d, 0]) = [a, b] [c, 0] + [a, b][d, 0] = [ac, 0] + [ad, 0] = \\ = [a(c + d), 0] ,$$

$$[a, b] ([c, 0] + [d, 0]) = [a, b] [c + d, 0] = [a(c + d), 0] .$$

Aus $0x = x0 = 0$ für jede ganze Zahl x und aus den Vorschriften (1) und (2) für Multiplikation und Addition geordneter Paare folgt $A_0 \setminus A = \varnothing$ — die Menge E ist also ein kommutativer A-Pseudoring.

Satz 21: Es sei die Menge $E = \{0, e\}$ definiert mit zwei benären inneren Operationen

a) der Multiplikation nach folgender Tabelle

.	0	e
0	0	0
e	0	e

(1),

b) der partiellen Addition nach folgender Tabelle

+	0	e
0	0	e
e	e	nicht def.

(2).

Die Menge E ist ein endlicher Einheitspseudoring.

Beweis: Aus der Tabelle (1) folgt, dass die Menge E relativ zu der Multiplikation eine kommutative Halbgruppe ist mit neutralem Elemente e. Aus der Tabelle (2) folgt, dass $A_0 = \{0, e\}$ und $A = \{0\}$ ist; A ist eine kommutative Gruppe. Die Gültigkeit des distributiven Gesetzes für die Multiplikation (1) realtiv zu der Addition (2) ist leicht wahrnehmbar. Nach dem *Satz 8* ist E ein Pseudoring. $A_0 \setminus A \neq \varnothing$ und laut D_8 kann E nicht ein A-Pseudoring sein.

Satz 22: G sei eine multiplikative Gruppe, f und g seine Endomorphismen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Abbildung $\alpha(x) = f(x)g(x)$ ein Endomorphismus sei ist, dass jedes Element der Untergruppe $f(G)$ mit jedem Elemente der Untergruppe $g(G)$ vertauschbar sei.

Beweis: 1. α sei ein Endomorphismus der Gruppe G. Für beliebige x, $y \in G$ gilt:

$$\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) = f(x)g(x)f(y)g(y) , \tag{1}$$

$$\alpha(xy) = f(xy)g(xy) = f(x)f(y)g(x)g(y) . \tag{2}$$

Aus der Gleichheit linker Seiten von (1), (2) folgt

$$f(x)g(x)f(y)g(y) = f(x)f(y)g(x)g(y)$$

und $f(y)$, $g(x)$ sind für beliebige $x, y \in G$ vertauschbar.

2. Jedes Element der Untergruppe $f(G)$ sei mit jedem Elemente der Untergruppe $g(G)$ vertauschbar. Für beliebiges $x, y \in G$ und für die Abbildung α gilt

$$\alpha(x,y) = f(xy)g(xy) = f(x)f(y)g(x)g(y) = f(x)g(x)f(y)g(y) = \alpha(x)\alpha(y)$$

und die Abbildung α ist ein Endomorphismus.

Die Menge aller Endomorphismen der Gruppe G werden wir mit E bezeichnen. In E führen wir folgende zwei binäre innere Operationen ein.

D_{11}: G sei eine multiplikative Gruppe, f, g seine Endomorphismen.

a) Die Abbildung $\alpha(x) = f(x)g(x)$, soweit sie ein Endomorphismus der Gruppe G ist, werden wir mit $f + g$ bezeichnen und die Endomorphismen f, g nennen wir in diessem Falle addierbare Endomorphismen der Gruppe G.

b) Wir setzen $fg(x) = f(g(x))$.

Satz 23: Die Menge E aller Endomorphismen einer multiplikativen Gruppe G mit den binären Operationen aus D_{11} ist ein Einheitspseudoring.

Beweis: Die Menge E aller Endomorphismen der multiplikativen Gruppe G ist relativ zu der binären Operation b) aus D_{11} eine Halbgruppe mit dem Einheitselement i, wo i den identischen Endomorphismus bedeutet.

Weiter werden wir die Gültigkeit von $A_1 - A_5$ aus der Definition des Pseudoringes, für die Menge aller Endomorphismen der multiplikativen Gruppe G mit den binären Operationen aus D_{11} beweisen:

A_1: f, g seien addierbare Endomorphismen der Gruppe G. Nach *Satz 22* und D_{11} gilt für jedes $x \in G$

$$(f + g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g + f)(x)$$

und also

$$f + g = g + f\,.$$

A_2: Es mögen die Summen $f + g, f + h, g + h$. $(f + g) + h$ von Endomorphismen f, g, h der Gruppe G existieren. Laut *Satz 22* und D_{11} gilt für jedes $x \in G$:

$$[(f + g) + h](x) = [(f + g)(x)]h(x) = [f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)] =$$
$$= f(x)\,[(g + h)(x)] = [f + (g + h)](x)\,,$$

da für jedes $x, y \in G$ golgende Gleichheiten gelten

$$f(x)\,(g + h)(y) = f(x)g(y)h(y) = g(y)f(x)h(y) = g(y)h(y)f(x) = (g + h)(y)f(x)$$

und also

$$(f + g) + h = f + (g + h)\,.$$

A_3: Der Endomorphismus $\tilde{o}(x) = e$, wo e das Einheitselement der multiplikativen Gruppe G bedeutet, hat den Charakter des neutralen Elementes in bezug auf die partielle Operation $+$ aus D_{11}, weil für jeden Endomorphismus f der Gruppe G und für jedes $x \in G$ folgendes gilt:

$$f(x) = f(x)e = ef(x) = \tilde{o}(x)f(x) = f(x)\tilde{o}(x) = (f + \tilde{o})(x) = (\tilde{o} + f)(x)\,.$$

Wir haben also $f + \tilde{o} = \tilde{o} + f = f$ für jeden Endomorphismus f der Gruppe G.

A_4: Es mögen die Summen $f + h$, $g + h$ von Endomorphismen f, g, h der Gruppe G existieren und es gelte $f + h = g + h$. Für jedes $x \in G$ gilt nachher $(f + h)(x) = (g + h)(x)$, $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, $f(x) = g(x)$ und also: wenn f mit h und g mit h addierbar sind und $f + h = g + h$ gilt, so gilt auch $f = g$.

A_5: f, g seien addierbare Endomorphismen der Gruppe G und h sei ihr Endomorphismus. Für jedes Element $x \in G$ gelten dann die Relationen $[(f + g)h](x) = (f + g)(h(x)) = f(h(x))g(h(x)) = fh(x)gh(x) = (fh + gh)(x)$, da $fh(G) \subset f(G)$ und $gh(G) \subset g(G)$ ist. Die Abbildung $fh(x)gh(x)$ ist also laut *Satz 22* ein Endomorphismus der Gruppe G. Es gilt also

$$(f + g)h = fh + gh\,.$$

Ähnlich gilt für jedes $x \in G$, dass $[h(f + g)](x) = h(f(x)g(x)) = h(f(x))h(g(x)) = hf(x)hg(x)$. Die Abbildung $hf(x)hg(x)$ ist ein Endomorphismus der Gruppe G, da für beliebige zwei Elemente $m \in hf(G)$, $n \in hg(G)$ $mn = nm$ gilt. Es sei $m = hf(z_1)$, $n = hg(z_2)$, dann ist $mn = hf(z_1)hg(z_2) = h(f(z_1)g(z_2)) = h(g(z_2)f(z_1)) = hg(z_2)hf(z_1) = nm$. Es gilt also auch

$$h(f + g) = hf + hg.$$

Bemerkung: Der *Sazt 23* stellt eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes über die Menge aller Endomorphismen einer multiplikativen kommutativen Gruppe G dar.

LITERATURVERZEICHNIS:

[1] *БУРБАКИ, Н.*: АЛГЕБРА, алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра; ГОСФИЗМАТ, Москва 1962

[2] *Kuroš, A. G.*: Kapitoly z obecné algebry, ACADEMIA. Praha 1968

SHRNUTÍ

PSEUDOOKRUHY

STANISLAV ŽIDEK

V článku je budována teorie pseudookruhů, která je zobecněním teorie okruhů.

V úvodu článku je definován neutrální prvek množiny vzhledem k vnitřní parciální binární operaci (D_1).

V první části článku je uvedena definice pseudookrouhu (D_2). Pseudookruh E je množina se dvěma vnitřními binárními operacemi: asociativním násobením a parciálním sčítáním, které vyhovuje axiomům A_1 až A_5. První část článku je zakončena větou (V_{12}), která uvádí nutnou a postačující podmínku pro to, aby jednotkový pseudookruh (D_5) byl jednotkovým okruhem.

Druhá část článku obsahuje definici ideálu pseudookruhu a některé věty o ideálech pseudookruhu.

V závěrečné části článku jsou uvedeny některé modely pseudookruhu. Článek je zakončen větou V_{23}: Množina E všech endomorfismů multiplikativní grupy G s vnitřními binárními operacemi podle D_{11} je jednotkový pseudookruh E.

РЕЗЮМЭ

ПСЕВДОКОЛЬЦА

СТАНИСЛАВ ЖИДЕК

В статье строится теория псевдоколец (колъцоидов), обобществляющая теорию колец.

В введении статьи определяется нейтральный элемент множества относителъно не всюду определенного внутреннего закона композиции (D_1).

В первой части статъи даётся определение псевдоколъца (D_2). Псевдоколъцом E называтся множество, наделенное двумя внутренними законами композиции:

а) всюду определенным ассоциативным умножением

б) аддитивно записываемым не всюду определенным законом, удовлетворяющим условиям A_1 по A_5.

Первая часть работы окончена теоремой V_{12}, которая приводит необходимое и достаточное условие того, чтобы псевдокольцо (колъцоид) с единицей (D_5) было кольцом с единицей.

Во второй части статьи даётся определение идеала псевдокольца и некоторые теоремы об идеалах псевдокольца.

Третья часть статьи содержит примеры некоторых моделей псевдоколец. Статья окончена теоремой V_{23}: Множество E всех эндоморфизмов мультипликативной группы G, наделенное двумя внутренними законами композиции по определению D_{11}, есть псевдокольцо E с единицей.