1974 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM—TOM 45

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Josef Šimek

O-IDÉAUX DES ENSEMBLES ORDONNÉS

JIŘÍ RACHŮNEK

(Reçu le 30. 5. 1973)

Dans la théorie des treillis, les idéaux et les antiidéaux jouent un rôle important. On peut généraliser ces notions pour les ensembles ordonnés. Nous obtenons les o-idéaux et les o-antiidéaux. On se montre que cette généralisation est utile par exemple dans la théorie des groupes ordonnés. (Voir [4].) A cet article, nous étudions les propriétés élémentaires des o-idéaux et des o-antiidéaux. En spécialisant les résultats au cas des treillis, nous obtenons les propriétés connues de leurs idéaux et de leurs antiidéaux. (Voir par exemple [1], [3].)

Tout d'abord, nous allons rappeler quelques notions nécessaires. Soit $M = [M, \leqq]$ un ensemble ordonné par une relation d'ordre $\leqq$. Soient $a_1, \dots, a_n \in M$. On note $L(a_1, \dots, a_n) = \{x \in M: x \leqq a_i$ pour tout $i = 1, \dots, n\}$, $U(a_1, \dots, a_n) = \{y \in M: y \geqq a_i$ pour tout $i = 1, \dots, n\}$. Un ensemble ordonné M est dit *l-dirigé* [*u-dirigé*] si pour tout couple (a, b) d'éléments de M, $L(a, b) \neq \phi$ $[U(a, b) \neq \phi]$. Un ensemble ordonné est *dirigé* s'il est l-dirigé et aussi u-dirigé. On dit qu'un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné M est *l-dirigé* [*u-dirigé*, *dirigé*] si A est un ensemble l-dirigé [u-dirigé, dirigé] relativement à la restriction de $\leqq$ sur A. Une partie B d'un ensemble ordonné M est dite *convexe* si $a, b \in B$, $x \in M$, $a \leqq x \leqq b$ impliquent $x \in B$.

Définition 1. Soit M un ensemble ordonné. Nous appellerons *o-idéal de M* tout sous-ensemble $\phi \neq I$ de M tel que:

(1) Pour tout couple (a, b) d'éléments de I, on a $U(a, b) \cap I \neq \phi$, c'est-à-dire I est un sous-ensemble u-dirigé de M.

(2) Pour tout élément $x \in M$ et pour tout élément $a \in I$, $a \geqq x$ entraîne $x \in I$.
En transformant par dualité la notion de o-idéal, on arrive à celle de o-antiidéalt Il est clair qu'un ensemble ordonné M est un o-idéal de M si et seulement si M es. u-dirigé.

Note. A [2, p. 148], la notion d'idéal est introduite de cette manière: Soit M un ensemble ordonné. $\phi \neq A \subseteqq M$ nous appellerons *idéal* de M si

1. $x \in M$, $a \in A$, $x \leqq a$ impliquent $x \in A$;
2. S'il existe $c = \sup_M A_1$(où $A_1 \subseteqq A$), alors $c \in A$.

Il est clair que tout o-idéal est aussi l'idéal au sens de [2] tandis que le fait inverse n'est pas vrai.

Théorème 1. Tout o-idéal I d'un ensemble ordonné M est un sous-ensemble convexe et u-dirigé de M. Si M est l-dirigé en plus, alors I est un sous-ensemble convexe et dirigé de M.

Démonstration. Soient $a, b \in I$, $x \in M$, $a \geqq x \geqq b$. Alors $a \geqq x$ et d'après la définition 1, $x \in I$. Supposons M l-dirigé. Alors $L(a, b) \neq \phi$ pour tout a, $b \in I$. Pour tout $y \in L(a, b)$, on a $y \leqq a, b$, donc $y \in I$.

Théorème 2. Tout sous-ensemble convexe et dirigé A d'un ensemble ordonné M est une intersection d'un o-idéal et d'un o-antiidéal de M.

Démonstration. Soit A un sous-ensemble convexe et dirigé de M. Considérons l'ensemble $I = \{x \in M$: il existe $a \in A$ tel que $a \geqq x\}$. Il est clair que la condition (2) est vraie pour I. Si $x, y \in I$, on a $a \geqq x$, $b \geqq y$ pour $a, b \in A$. A est dirigé, par suite il existe $c \in U(a, b) \cap A$. On a $c \geqq x, y$, $c \geqq c$, $c \in A$, donc $c \in U(x, y) \cap I$. Il en résulte que I est un o-idéal.
On montre de la même manière que $F = \{y \in M$: il existe $b \in A$ tel que $y \geqq b\}$ est un o-antiidéal.
Il est évident que $A \subseteqq I \cap F$. Montrerons l'inclusion inverse. Soit $d \in I \cap F$. On a donc $a \geqq d \geqq b$, pour $a, b \in A$, et parce que A est convexe, $d \in A$.

Définition 2. On appelle *chaîne de o-idéaux* d'un ensemble ordonné M tout ensemble de o-idéaux de M totalement ordonné par l'inclusion.

Définition 3. On appelle *o-antifiltre* d'un ensemble ordonné M tout o-idéal I de M tel que le plus grand élément de M (s'il existe) n'appartient pas à I. (Voir aussi [4].) Par la dualité *o-filtre* de M.

Théorème 3. La réunion d'une chaîne de o-idéaux de M est aussi un o-idéal de M.

Démonstration. Soit $\mathscr{C} = (I_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ une chaîne de o-idéaux de M et soit $I = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$. Soient $x, y \in I$. Il existe deux o-idéaux $I_{\gamma_1}, I_{\gamma_2} \in \mathscr{C}$ tels que $x \in I_{\gamma_1}$, $y \in I_{\gamma_2}$. Nous pouvons supposer que $I_{\gamma_1} \subseteq I_{\gamma_2}$. Alors $x, y \in I_{\gamma_2}$. Par suite, il existe $u \in U(x, y) \cap \cap I_{\gamma_2} \subseteq U(x, y) \cap I$. Cela signifie que I est u-dirigé. Soient $x \in I_{\gamma_1}$, $a \in M$, $x \geqq a$. Mais alors $a \in I_{\gamma_1} \subseteq I$. Donc I satisfait aussi à la condition (2).

Corollaire. Si tout o-idéal $I_\gamma(\gamma \in \Gamma)$ du théorème 3 est un o-antifiltre, alors $I = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ est encore un o-antifiltre.

Démonstration. Si le plus grand élément 1 de M existe, alors $1 \notin I_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ et par suite $1 \notin \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma = I$.

Soit $\mathscr{I}(M)$ l'ensemble des o-idéaux de M, $\mathscr{I}^*(M)$ l'ensemble des o-antifiltres de M. Supposons $\mathscr{I}(M)$ et $\mathscr{I}^*(M)$ ordonnés par l'inclusion.

Définition 4. On dit qu'un o-antifiltre I d'un ensemble ordonné M est *o-ultra-antifiltre* de M si I est un élément maximal de $\mathscr{I}^*(M)$.

Théorème 4. Tout o-antifiltre d'un ensemble ordonné M est contenu dans un o-ultra-antifiltre de M.

Démonstration. Le théorème résulte du théorème 3, du corollaire de ce théorème et du théorème de Kuratowski-Zorn (voir [3, p. 13]).

Il est clair que pour un élément a d'un ensemble ordonné M, $L(a) = \{x \in M: x \leqq a\}$ est un o-idéal de M. De la même manière, $U(a) = \{y \in M: y \geqq a\}$ est un o-antiidéal de M.

Définition 5. $L(a)$ $[U(a)]$ est dit *o-idéal principal* [*o-antiidéal principal*] de M engendré par a.

Théorème 5. Pour que tout o-idéal d'un ensemble ordonné M soit principal, il faut et il suffit que M satisfasse à la condition maximale.

Démonstration. Soit I un o-idéal de M. Si la condition maximale est satisfaite dans M, elle l'est aussi dans I. Par suite, tout élément de I est inférieur à un élément maximal de I. Soient a, b deux éléments maximaux distincts de I. I est u-dirigé, donc il existe $c \in U(a, b) \cap I$, c'est une contradiction. Il existe alors le plus grand élément 1_I de I, c'est-à-dire $I = L(1_I)$.

D'autre part, si M ne satisfait pas à la condition maximale, il existe une sous-chaîne infinie de M de la forme

$$c_0 < c_1 < c_2 < \dots$$

Soit $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} L(c_n)$. I est la réunion d'une chaîne de o-idéaux, alors, d'après le théorème 3, I est aussi un o-idéal de M. Mais I n'a pas de plus grand élément, puisque pour chacun $x \in I$, il existe un élément $c_n > x$. Il en résulte que I ne peut être un o-idéal principal.

Théorème 6. Soit M un ensemble ordonné satisfaisant a la condition maximale et soit $\mathscr{I}(M)$ l'ensemble des o-idéaux de M ordonné par l'inclusion. Alors, pour que $\mathscr{I}(M)$ soit un treillis, il faut et il suffit que M soit un treillis.

Démonstration. Soit $\mathscr{I}(M)$ un treillis. M satisfait à la condition maximale, alors, d'après le théorème 5, $\mathscr{I}(M) = \mathscr{I}_0(M)$, où $\mathscr{I}_0(M)$ est l'ensemble des o-idéaux principaux de M. Par suite, si $a, b \in M$, il existe $c, d \in M$ tels que

$$\inf_{\mathscr{I}(M)}(L(a), L(b)) = L(c),$$
$$\sup_{\mathscr{I}(M)}(L(a), L(b)) = L(d).$$

Montrerons que $c = a \wedge b$, $d = a \vee b$. Il est clair que $a, b \geqq c$. Si $x \in M$, $a, b \geqq x$, alors aussi $L(x) \subseteq L(a), L(b)$, et par suite, on a $L(x) \subseteq \inf_{\mathscr{I}(M)}(L(a), L(b)) = L(c)$. Il en résulte $c \geqq x$, c'est-à-dire $c = a \wedge b$. On montre de la même mainère que $d = a \vee b$. Par suite, M est un treillis.
L'implication inverse est évidente.

Soit $\mathscr{I}(M)$ l'ensemble des o-idéaux d'un ensemble ordonné M ordonné par l'inclusion, $A, B \in \mathscr{I}(M)$. Dans le théorème suivant, $A \leqq B$ signifie que $A \subseteq B$ et $A \prec B$ que B couvre A dans $\mathscr{I}(M)$.

Théorème 7. Soit A un o-idéal d'un ensemble ordonné M et soit $a \in M$ tel que $A < L(a)$ dans $\mathscr{I}(M)$. Il existe alors un o-idéal B de M tel que $A \leqq B \prec L(a)$ dans $\mathscr{I}(M)$.

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathscr{I}_1$ des o-idéaux I pour lesquels $A \leqq I < L(a)$. Si $(I_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ est une sous-chaîne de $\mathscr{I}_1$, alors $\bar{I} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ est aussi un o-idéal de M (d'après le théorème 3) et on a $A \leqq \bar{I} < L(a)$. D'après le théorème de Kuratowski-Zorn, il existe au moins un élément maximal de $\mathscr{I}_1$. Notons B l'un d'entre eux. Supposons qu'il existe un o-idéal C de M tel que $B < C < L(a)$. Mais alors C appartient à $\mathscr{I}_1$, et donc B n'est pas maximal de $\mathscr{I}_1$, une contradiction. C'est-à-dire que $B \prec L(a)$.

Définition 6. Nous appellerons un o-idéal P d'un ensemble ordonné M *premier* si on a: Pour tout couple (x, y) d'éléments de M, $L(x, y) \neq \phi$ et $L(x, y) \subseteq P$ entraînent $x \in P$ ou $y \in P$.

Par dualité *o-antiidéal premier*.

Théorème 8. Soient M un ensemble dirigé, $\phi \neq P \subset M$. Alors P est un o-idéal premier de M si et seulement si $M \setminus P$ est un o-antiidéal premier de M.

Démonstration. Soit $P \neq M$ un o-idéal premier.

1. Soient $c, d \in M \setminus P$, $L(c, d) \cap (M \setminus P) = \phi$. Mais puis $\phi \neq L(c, d) \subseteq P$, et parce que le o-idéal P est premier, on a $c \in P$ ou $d \in P$, ce qui est impossible. C'est-à-dire: Si $c, d \in M \setminus P$, alors $L(c, d) \cap (M \setminus P) \neq \phi$.

2. Soient $c \in M \setminus P$, $c \leqq u$, $u \in P$. Par suite $c \in P$, une contradiction. C'est-à-dire: Si $c \in M \setminus P$, $u \in M$, $c \leqq u$, alors $u \in M \setminus P$.

3. Soient $u, v \in M$, $U(u, v) \subseteq M \setminus P$, $u \in P$, $v \in P$. Lorsque P est un o-idéal, on a $U(u, v) \cap P \neq \phi$, une contradiction. C'est-à-dire: Si $u, v \in M$, $U(u, v) \subseteq M \setminus P$, alors $u \in M \setminus P$ ou $v \in M \setminus P$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Birkhoff, G.:* Lattice theory, édition russe, Moskva 1952.
[2] *Kuroš, A. G.:* Lekcii po obščej algebre, édition tchéque, Praha 1968.
[3] *Szász, G.:* Théorie des treillis, Budapest 1971.
[4] *Rachůnek, J.:* Prime subgroups of ordered groups, Czech. Math. J., 24 (99) (1974), 541–551.

Jiří Rachůnek
Leninova 26
771 46 Olomouc

Souhrn

O-IDEÁLY V USPOŘÁDANÝCH MNOŽINÁCH

JIŘÍ RACHŮNEK

Podstatnou roli v teorii svazů hrají ideály a antiideály. Ukázalo se užitečným (např. v teorii uspořádaných grup) zobecnit tyto pojmy pro libovolné uspořádané množiny. Dostaneme tzv. o-ideály a o-antiideály. V článku jsou zavedeny pojmy o-ideálu, o-antifiltru, hlavního o-ideálu, o-prvoideálu, uspořádané množiny o-ideálů a ukázány jejich základní vlastnosti.

Резюме

О-ИДЕАЛЫ В УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

ИРЖИ РАХУНЕК

В теории решёток существенную роль играют идеалы и антиидеалы. Показалось полезным (например в теории упорядоченных групп) эти понятия обобщить для произвольных упорядоченных множеств. (Получаются o-идеалы и o-антиидеалы.) В статье введены понятия: o-идеал, o-антифильтр, главный o-идеал, простой o-идеал, упорядоченное множество o-идеалов, и показаны их основные свойства.