Jiří Zeman

Eine Bemerkung zu einer Aufgabe von prof. N. P. Erugin

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 15 (1976), No. 1, 35--49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120039

1975 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 46

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

EINE BEMERKUNG ZU EINER AUFGABE VON PROF. N. P. ERUGIN

JIŘÍ ZEMAN

Eingegangen am 25. Juni 1974

Im Buch [1] von N. P. Erugin (Kap. XII, Seite 524) ist die folgende Aufgabe formuliert:
Es sei ein System von linearen Differentialgleichungen gegeben

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(\tau)x_1 + p_{12}(\tau)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= p_{21}(\tau)x_1 + p_{22}(\tau)x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

bzw.

$$\frac{dx}{dt} = xP(\tau), \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

mit $t \in \langle 0, T\rangle = I_t$, $\tau = \varepsilon t$ mit dem Parameter $\varepsilon \in \langle -r, r\rangle = I_\varepsilon$. Wir wollen nun die Lösung von (1), welche den Anfangsbedingungen

$$x_1(t, \tau, \varepsilon)\,|_{t=0} = a, \qquad x_2(t, \tau, \varepsilon)\,|_{t=0} = b \tag{2}$$

genügt, in der Form von unendlichen Reihen

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(1)}(t, \tau)\,\varepsilon^k, \qquad x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(2)}(t, \tau)\,\varepsilon^k \tag{3}$$

bestimmen. Wenn wir (3) in (1) einsetzen, so bekommen wir durch Vergleichung der Koeffizienten der gleichen Potenzen von ε folgende Bedingungen für $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}$ aus (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0^{(1)}}{\partial t} &= p_{11}(\tau)x_0^{(1)} + p_{12}(\tau)x_0^{(2)}, \\ \frac{\partial x_0^{(2)}}{\partial t} &= p_{21}(\tau)x_0^{(1)} + p_{22}(\tau)x_0^{(2)}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial t} = p_{11}(\tau)\, x_1^{(1)} + p_{12}(\tau)\, x_1^{(2)} - \frac{\partial x_0^{(1)}}{\partial \tau},$$
$$\frac{\partial x_1^{(2)}}{\partial t} = p_{21}(\tau)\, x_1^{(1)} + p_{22}(\tau)\, x_1^{(2)} - \frac{\partial x_0^{(2)}}{\partial \tau}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial x_k^{(1)}}{\partial t} = p_{11}(\tau)\, x_k^{(1)} + p_{12}(\tau)\, x_k^{(2)} - \frac{\partial x_{k-1}^{(1)}}{\partial \tau},$$
$$\frac{\partial x_k^{(2)}}{\partial t} = p_{21}(\tau)\, x_k^{(1)} + p_{22}(\tau)\, x_k^{(2)} - \frac{\partial x_{k-1}^{(2)}}{\partial \tau}. \tag{6}$$

Der Parameter τ kann man in der Bedingung (4) als konstant betrachten und auf diese Weise findet man hiervon $x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}$ als Funktionen von t für konstantes τ. (4) stellt also ein lineares System mit konstanten Koeffizienten dar. Wenn nun $x_{10}^{(1)}, x_{10}^{(2)}; x_{20}^{(1)}, x_{20}^{(2)}$ solche Lösungen von (4) sind, dass

$$x_{10}^{(1)}(0, \tau) = x_{20}^{(2)}(0, \tau) = 1, \qquad x_{10}^{(2)}(0, \tau) = x_{20}^{(1)}(0, \tau) = 0$$

gilt, so kann die allgemeine Lösung von (4) in der Form

$$x_0^{(1)} = C_1(\tau)\, x_{10}^{(1)}(t, \tau) + C_2(\tau)\, x_{20}^{(1)}(t, \tau),$$
$$x_0^{(2)} = C_1(\tau)\, x_{10}^{(2)}(t, \tau) + C_2(\tau)\, x_{20}^{(2)}(t, \tau), \tag{7}$$

geschrieben werden, wo $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ beliebige Funktionen von τ bedeuten. Diese Funktionen sind durch die Anfangsbedingungen (2) nur in einem Punkte bestimmt, da aus (2) und (7)

$$a = C_1(\tau), \qquad b = C_2(\tau)$$

folgt. Es ist möglich beispielsweise $a = C_1(0)$, $b = C_2(0)$ wählen. Ferner kann man zum Beispiel $x_k^{(1)}(0, 0) = x_k^{(2)}(0, 0) = 0$ für $k \geqq 1$ verlangen (so dass die Anfangsbedingung bereits durch die Glieder nullter Ordnung der Reihen (3) erfüllt wird). Ganz analog tauchen willkürliche Funktionen $C_1^{(1)}(\tau)$, $C_2^{(1)}(\tau)$ (allgemein $C_k^{(1)}(\tau)$, $C_k^{(2)}(\tau)$) heraus, wenn wir die Funktionen $x_1^{(1)}(t, \tau)$, $x_1^{(2)}(t, \tau)$ aus (5) (allgemein die Funktionen $x_k^{(1)}(t, \tau)$, $x_k^{(2)}(t, \tau)$ aus (6) ausdrücken wollen. So ensteht natürlich die Aufgabe zu entscheiden, ob es möglich ist die willkürlichen Funktionen so zu wählen, dass die Formalreihen (3) konvergieren.

Die Existenz der geeigneten Wahl von $C_k^{(1)}(\tau)$, $C_k^{(2)}(\tau)$ wird in folgendem Satze bewiesen.

Satz 1: Die Matrix $P(\tau)$ im System (1) *sei auf der Menge $I_t \times I_\varepsilon$ stetig. Die Integralmatrix des betrachteten Systems*

$$X(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{11}(t, \varepsilon) & x_{12}(t, \varepsilon) \\ x_{21}(t, \varepsilon) & x_{22}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

welche der Bedingung $X(0, \varepsilon) = E$ genügt, kann in der Form einer unendlichen Reihe von Matrixen

$$X(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t, \varepsilon), \qquad X_0(t, \varepsilon) = E \tag{9}$$

ausgedrückt werden, wo $X_k(t, \varepsilon)$ durch die Formeln

$$X_k(t, \varepsilon) = \int_0^t X_{k-1}(u, \varepsilon) \, . \, P(\tau) \, \mathrm{d}u, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

gegeben ist. Die Matrixenreihe (9) konvergiert gleichmässig in den Veränderlichen $t \in I_t$ und $\varepsilon \in I_\varepsilon$.

Beweis: Wir betrachten die Matrixdifferentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = X \, . \, P(\tau) \, . \, \lambda, \tag{11}$$

mit dem Parameter λ. Ihre Lösung wird in der Form

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t, \varepsilon) \, \lambda^k, \qquad X_0(t, \varepsilon) = E. \tag{12}$$

Durch Einsetzen von (12) in (11) bekommen wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} X_k(t, \varepsilon) \, \lambda^k\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} X_k(t, \varepsilon) \, \lambda^k\Big) \, . \, P(\tau) \, . \, \lambda,$$

oder, was dasselbe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}X_k(t, \varepsilon)}{\mathrm{d}t} \lambda^k = \sum_{k=1}^{\infty} X_{k-1}(t, \varepsilon) \, . \, P(\tau) \, \lambda^k.$$

Die Koeffizienten derselben Potenzen von λ gleichen miteinander; durch Integration der so gewonnenen Identitäten von 0 bis t erhalten wir folgende Rekurrentformeln für die gesuchten Koeffizienten der Reihe (12)

$$X_k(t, \varepsilon) = X_k(0, \varepsilon) + \int_0^t X_{k-1}(u, \varepsilon) \, P(\tau) \, \mathrm{d}u.$$

Die Integralmatrix (8) muss auch die Bedingung $X(0, \varepsilon) = E$ erfüllen, das heisst $\sum_{k=0}^{\infty} X_k(0, \varepsilon) \, \lambda^k = E$. Man kann z. B. dazu verlangen dass $X_k(0, \varepsilon) = \| 0 \|$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ und $X_0(0, \varepsilon) = E$ wäre. Unsere Rekurrentformel geht dann in die Form

$$X_k(t, \varepsilon) = \int_0^t X_{k-1}(u, \varepsilon) \, P(\tau) \, \mathrm{d}u, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

über. Die Matrix $P(\tau)$ ist beschränkt auf der betrachteten Menge; es sei hier z. B. $|P(\tau)| \leqq M$. Es gilt für $t \in I_t$:

$$|X_1(t, \varepsilon)| \leqq \int_0^t |EP(\tau)| \, du = \int_0^t |P(\tau)| \, . \, du \leqq \int_0^t M \, du = Mt,$$

$$|X_2(t, \varepsilon)| \leqq \int_0^t |X_1(u, \varepsilon) \, . \, P(\tau)| \, du \leqq \int_0^t MuM \, du = \frac{M^2 t^2}{2!},$$

$$\vdots$$

$$|X_k(t, \varepsilon)| \leqq \int_0^t |X_{k-1}(u, \varepsilon) \, . \, P(\tau)| \, du \leqq \int_0^t \frac{M^{k-1} u^{k-1}}{(k-1)!} \, . \, M \, du = \frac{M^k t^k}{k!}.$$

Als Majorante für (12) bekommen wir also die Exponentialreihe

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k}{k!} \lambda^k = e^{M\lambda t}, \tag{14}$$

die auch für $\lambda = 1$ konvergiert. Der Beweis ist so erbracht, da (14) kein ε enthält.

Bemerkungen:

a) Im Spezialfalle $\varepsilon = 0$ hat die konvergente Matrizenreihe (9) die Form

$$X(t, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(0)^k t^k}{k!} = e^{P(0)t} \tag{9'}$$

und (1) ist ein System mit konstanten Koeffizienten. Für $\varepsilon \neq 0$ haben wir

$$X_1(t, \varepsilon) = \int_0^t EP(\tau) \, du = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau P(z) \, dz = \frac{1}{\varepsilon} S_1(\tau),$$

$$X_2(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} S_1(\tau) P(\tau) \, . \, du = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\tau S_1(z) \, . \, P(z) \, dz = \frac{1}{\varepsilon^2} S_2(\tau),$$

$$\vdots$$

und die Formel (10) kann in der Form

$$X_k(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^k} \, . \, S_k(\tau) \tag{10'}$$

geschrieben werden, wo

$$S_k(\tau) = \int_0^\tau S_{k-1}(z) \, . \, P(z) \, dz, \qquad S_0 = E, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

b) Die Reihe (9) konvergiert genau dann, wenn die vier Funktionenreihen

$$x_{ij}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{ij}^{(k)}(t, \varepsilon), \qquad i, j = 1, 2, \tag{15}$$

konvergieren, die aus den Elementen der Matrizen $X(t, \varepsilon)$ bzw. $X_k(t, \varepsilon)$ bestehen.

c) Der Satz 1 kann bewiesen werden auch im allgemeinen Falle einer n-reihigen Matrix $P(\tau)$. Es folgt aus unserem Beweise, dass die Reihen (15) absolut konvergieren.

Wir wollen jetzt die Struktur der Reihen (15) näher untersuchen. Dazu setzen wir

$$P(\tau) = p_{11}(\tau)\, A + p_{12}(\tau)\, B + p_{21}(\tau)\, C + p_{22}(\tau)\, D, \tag{16}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für A, B, C, D haben wir folgende Formeln:

$$\begin{array}{llll} A^2 = A & BA = B & CA = \| 0 \| & DA = \| 0 \| \\ AB = \| 0 \| & B^2 = \| 0 \| & CB = A & DB = B \\ AC = C & BC = D & C^2 = \| 0 \| & DC = \| 0 \| \\ AD = \| 0 \| & BD = \| 0 \| & CD = C & D^2 = D. \end{array}$$

Wir erhalten so

$$X_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau P(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{\varepsilon} [s_{11}^{(1)}(\tau)\, A + s_{12}^{(1)}(\tau)\, B + s_{21}^{(1)}(\tau)\, C + s_{22}^{(1)}(\tau)\, D],$$

wo

$$s_{ij}^{(1)}(\tau) = \int_0^\tau p_{ij}(z)\, \mathrm{d}z, \qquad i, j = 1, 2$$

ist. Weiter haben wir

$$X_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\tau S_1(z) \,.\, P(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{\varepsilon^2} [s_{11}^{(2)}(\tau)\, A + s_{12}^{(2)}(\tau)\, B + s_{21}^{(2)}(\tau)\, C + s_{22}^{(2)}(\tau)\, D],$$

wo

$$s_{11}^{(2)}(\tau) = \int_0^\tau [p_{11}(z)\, s_{11}^{(1)}(z) + p_{12}(z)\, s_{21}^{(1)}(z)]\, \mathrm{d}z,$$

$$s_{12}^{(2)}(\tau) = \int_0^\tau [p_{11}(z)\, s_{12}^{(1)}(z) + p_{12}(z)\, s_{22}^{(1)}(z)]\, \mathrm{d}z,$$

$$s_{21}^{(2)}(\tau) = \int_0^\tau [p_{21}(z)\, s_{11}^{(1)}(z) + p_{22}(z)\, s_{21}^{(1)}(z)]\, \mathrm{d}z,$$

$$s_{22}^{(2)}(\tau) = \int_0^\tau [p_{21}(z)\, s_{12}^{(1)}(z) + p_{22}(z)\, s_{22}^{(1)}(z)]\, \mathrm{d}z$$

bedeutet. Durch Induktion finden wir daraus ganz allgemein

$$X_k(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^\tau S_{k-1}(z)\, P(z)\, \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^k} [s_{11}^{(k)}(\tau)\, A + s_{12}^{(k)}(\tau)\, B + s_{21}^{(k)}(\tau)\, C + s_{22}^{(k)}(\tau)\, D], \tag{17}$$

wo $s_{11}^{(k)}(\tau)$, $s_{12}^{(k)}(\tau)$, $s_{21}^{(k)}(\tau)$, $s_{22}^{(k)}(\tau)$ die folgende Bedeutung haben:

$$
\begin{aligned}
s_{11}^{(k)}(\tau) &= \int_0^\tau [p_{11}(z)\, s_{11}^{(k-1)}(z) + p_{12}(z)\, s_{21}^{(k-1)}(z)]\, \mathrm{d}z \\
s_{12}^{(k)}(\tau) &= \int_0^\tau [p_{11}(z)\, s_{12}^{(k-1)}(z) + p_{12}(z)\, s_{22}^{(k-1)}(z)]\, \mathrm{d}z \\
s_{21}^{(k)}(\tau) &= \int_0^\tau [p_{21}(z)\, s_{11}^{(k-1)}(z) + p_{22}(z)\, s_{21}^{(k-1)}(z)]\, \mathrm{d}z \\
s_{22}^{(k)}(\tau) &= \int_0^\tau [p_{21}(z)\, s_{12}^{(k-1)}(z) + p_{22}(z)\, s_{22}^{(k-1)}(z)]\, \mathrm{d}z.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Die Elemente $x_{ij}(t, \varepsilon)$ der Matrix $X(t, \varepsilon)$ kann man also folgendermassen ausdrücken:

$$x_{ij}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^k}\, s_{ij}^{(k)}(\tau), \qquad i, j = 1, 2. \tag{19}$$

Die unendlichen Reihen (19) haben das erste Glied 1 für $i = j$ und 0 für $i \neq j$.

Satz 2: Die Funktionen $p_{ij}(\tau)$ in (1) *seien in einer Umgebung des Punktes $\tau = 0$ holomorph, d. h. es sei*

$$p_{ij}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ij}^{(n)} \tau^n, \qquad i, j = 1, 2, \tag{20}$$

und die Konvergenzhalbmesser der Potenzreihen (20) *seien grösser als r.T. Die unendlichen Reihen* (19) *können in diesem Falle in der Form*

$$x_{ij}(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{ij}^{(n)}(t)\, \varepsilon^n, \qquad i, j = 1, 2, \tag{21}$$

ausgedrückt werden, wo

$$u_{ij}^{(n)}(t) = t^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n), k} t^k \tag{22}$$

ist. Die unendlichen Reihen (21) *konvergieren absolut für $t \in I_t$ und $\varepsilon \in I_\varepsilon$.*

Beweis: Die Formeln (18) liefern zunächst

$$s_{ij}^{(1)}(\tau) = \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_{ij}^{(n)} z^n\, \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(n)}}{n+1} \tau^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n), 1} \tau^{n+1}.$$

Weiter haben wir z. B.

$$
\begin{aligned}
s_{11}^{(2)}(\tau) &= \int_0^\tau \Big[\sum_{n=0}^{\infty} a_{11}^{(n)} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{11}^{(n), 1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{12}^{(n)} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{21}^{(n), 1} z^{n+1}\Big]\, \mathrm{d}z = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{11}^{(n), 2} \tau^{n+2}
\end{aligned}
$$

und für die übrigen Funktionen $s_{ij}^{(2)}(\tau)$ erhalten wir die Reihen

$$s_{ij}^{(2)}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n),2} \tau^{n+2}.$$

Analog kommt man zu den Formeln

$$s_{ij}^{(k)}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n),k} \tau^{n+k}. \tag{23}$$

Die Koeffizienten $\alpha_{ij}^{(n),k}$ in (23) sind für $i, j = 1, 2$ und $k = 1, 2, 3, \dots$ von t und auch von ε unabhängig. Der Konvergenzhalbmesser aller dieser Reihen ist grösser als $r.T$. Wenn wir aus (23) in (19) einsetzen, bekommen wir

$$x_{ij}(t, \varepsilon) = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n),k} \tau^{n+k} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n),k} t^k \tau^n. \tag{24}$$

Aus dem Satz 1 folgt, dass die Reihen (24) absolut konvergieren. Es ist möglich diese Reihen mit $\tau = \varepsilon t$ auch in der Form

$$x_{ij}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n),k} t^{n+k} \varepsilon^n \tag{25}$$

zu schreiben, wo $\alpha_{11}^{(0),0} = \alpha_{22}^{(0),0} = 1$ und alle anderen Koeffizienten $\alpha_{ij}^{(n),0}$ für $i, j = 1, 2$ und $n = 0, 1, 2, \dots$ sind gleich Null. Die Behauptung unseres Satzes folgt jetzt unmittelbar aus einem bekannten Satze (vgl. [3], § 5, Seite 332) über Doppelreihen:

$$x_{ij}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n),k} t^{n+k} \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n),k} t^{n+k} \varepsilon^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(t^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(n),k} t^k\right) \varepsilon^n.$$

Wir werden jetzt die Reihe (21) betrachten und werden hier – der Kürze halber – $u_n(t)$ statt $u_{ij}^{(n)}(t)$ schreiben. Wir führen zunächst eine Transformation dieser Reihe durch. Unsere Reihe

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\, \varepsilon^n \tag{21}$$

wollen wir in der Form

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t, \tau)\, \varepsilon^n \tag{21'}$$

schreiben. Unser Ziel ist die Funktionen

$$v_n(t, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu^{(n)}(t)\, \tau^\nu \tag{26}$$

zu bestimmen. Durch Einsetzen aus (26) in (21') erhalten wir

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t,\tau)\,\varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu^{(n)}(t)\,\tau^\nu\Big]\varepsilon^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{m=0}^{n} v_{n-m}^{(m)}(t)\,t^{n-m}\Big]\varepsilon^n. \tag{27}$$

Es ist also klar, dass die Reihen (27) und (21) genau dann identisch sind, wenn

$$\sum_{m=0}^{n} v_{n-m}^{(m)}(t)\,t^{n-m} = u_n(t), \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{28}$$

d. h.

$$v_0^{(0)}(t) = u_0(t) \tag{28$_0$}$$

$$tv_1^{(0)}(t) + v_{(0)}^{1}(t) = u_1(t) \tag{28$_1$}$$

...

$$t^p v_p^{(0)}(t) + t^{p-1}v_{p-1}^{(1)}(t) + \ldots + tv_1^{(p-1)}(t) + v_0^{(p)}(t) = u_p(t). \tag{28p}$$

Aus diesen Formeln ist leicht ersichtlich, dass eine grosse Willkür im Wahl der Funktionen $v_i^{(l)}(t)$ ist. Nur $v_0^{(0)}(t)$ ist durch die Formel (28_0) eindeutig bestimmt. Aus (28_1) sehen wir dagegen, dass entweder $v_1^{(0)}(t)$ oder $v_0^{(1)}(t)$ beliebig gewählt werden kann.

Es ist möglich z. B. $v_1^{(0)}(t)$, $v_2^{(0)}(t), \ldots, v_p^{(0)}(t), \ldots$ beliebig zu wahlen mit der Bedingung der Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu v_\nu^{(0)}(t)\,\varepsilon^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu^{(0)}(t)\,\tau^\nu = v_0(t,\tau).$$

Weiter ist es möglich die Funktionen $v_1^{(1)}(t)$, $v_2^{(1)}(t), \ldots, v_p^{(1)}(t), \ldots$ so festzulegen, dass auch die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu v_\nu^{(1)}(t)\,\varepsilon^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu^{(1)}(t)\,\tau^\nu = v_1(t,\tau)$$

gewährleistet wird. Auf diese Weise ist es also möglich, jede der Funktionen (26) in der gewünschten Form auszudrücken. Die oben beschriebene Konstruktion ist offensichtlich nicht die einzige. So, zum Beispiel, wenn für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Funktionen $v_n^{(0)}(t)$, $v_{n-1}^{(1)}(t), \ldots, v_0^{(n)}(t)$ (die in (28) in derselben Reihe stehen) so be schaffen sind, dass

$$\operatorname{sgn} v_n^{(0)}(t) = \operatorname{sgn} v_{n-1}^{(1)}(t) = \ldots = \operatorname{sgn} v_0^{(n)}(t),$$

so folgt aus der absoluten Konvergenz der Reihe (21) auch die absolute Konvergenz der Reihen (26) und (21'). Das ersicht man unmittelbar daraus, dass in diesem Falle (vgl. (28_p))

$$|\,t^p v_p^{(0)}(t) + t^{p-1}v_{p-1}^{(1)}(t) + \ldots + tv_1^{(p-1)}(t) + v_0^{(p)}(t)\,| =$$

$$= |\,t^p v_p^{(0)}(t)\,| + |\,t^{p-1}v_{p-1}^{(1)'}(t)\,| + \ldots + |\,v_0^{(p)}(t)\,| = |\,u_p(t)\,|$$

gilt und also auch

$$|\, t^p v_p^{(0)}(t)\, \varepsilon^p \,| + |\, t^{p-1} v_{p-1}^{(1)}(t)\, \varepsilon^p \,| + \ldots + |\, v_0^{(p)}(t)\, \varepsilon^p \,| = |\, u_p(t)\, \varepsilon^p \,|.$$

Daraus folgen für $s = 0, 1, 2, \ldots$ die Ungleichheiten:

$$|\, \varepsilon \,|^s \,|\, v_p^{(s)}(t)\, \tau^p \,| \leqq |\, u_{p+s}(t)\, \varepsilon^{p+s} \,|.$$

Man kann also

$$v_{n-m}^{(m)}(t) = t^{m-n} u_n(t)\, C_{n-m}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{29}$$

setzen, wo $C_{n-m} > 0$ so gewählt sind, dass

$$\sum_{m=0}^{n} C_{n-m} = 1.$$

In diesem Falle haben wir

$$\sum_{m=0}^{n} v_{n-m}^{(m)}(t)\, t^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} t^{m-n} u_n(t)\, C_{n-m} t^{n-m} = u_n(t).$$

(Die Funktionen (29) sind zwar im Punkte $t = 0$ nicht definiert, aber es ist möglich ihre Definition auch in dieses Punkt stetig zu erweitern, wenn wir die Form (22) der Funktionen $u_n(t)$ in Betracht nehmen.)

Andererseits ist es möglich die holomorphen Funktionen $v_i^{(l)}(t)$ in (28) auch so zu wählen, dass die unendlichen Reihen (26) divergent sind und die Koeffizienten $v_n(t, \tau)$ der Reihe (21) sind dann nicht definiert. Setzen wir z. B.

$$v_0^{(0)}(t) = u_0(t)$$
$$v_\nu^{(0)}(t) = e^{\nu^2 t}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so bekommen wir infolge (26)

$$v_0(t, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu^{(0)}(t)\, \tau^\nu = u_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\nu^2 t} \tau^\nu = u_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (e^{\nu t} \tau)^\nu. \tag{30}$$

Für $\tau \neq 0$ (d. h. für $\varepsilon \neq 0 \neq t$) ist also die notwendige Bedingung für Konwergenz der Reihe in (30) nicht erfüllt und $v_0(t, \tau)$ in der Reihe (21') ist nicht definiert.

Resumierend können wir also folgendes zu der oben formulierten Aufgabe bemerken:

Die gesuchte Lösung kann in der Form der konvergenten Reihen (3) ausgedrückt werden und zwar auf unendlich viele Weisen. Es scheint aber recht schwierig zu sein konvergente Reihen (3) mittels konkreter Wahl der Funktionen $C_k^{(1)}(\tau)$, $C_k^{(2)}(\tau)$, die in der Lösung der Gleichungssysteme (4) – (6) auftauchen, zu konstruiren. Nicht minder schwierig scheint es die Frage zu entscheiden, welche Wahl der Funktionen $C_k^{(1)}(\tau)$, $C_k^{(2)}(\tau)$ der „günstigen" Wahl der Funktionen $v_i^{(l)}(t)$ in (28) korrespondiert.

Die Schwierigkeit dieser Fragen wollen wir auf dem einfachsten Falle illustrieren, indem wir anstatt (1) die (skalare) Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = p(\tau)\, y \tag{1'}$$

betrachten werden mit geeigneten Wahl von $p(\tau)$. Die Lösung y der Gleichung (1'), welche der Anfangsbedingung

$$y(t, \tau, \varepsilon)\,|_{t=0} = a \tag{2'}$$

genügt, suchen wir in der Form der unendlichen Reihe

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t, \tau)\, \varepsilon^k. \tag{3'}$$

Die Bedingungen (4), (5), (6) zur Bestimmung von $y_k(t, \tau)$ sind in diesem Falle

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} = p(\tau)\, y_0 \tag{4'}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = -\frac{\partial y_0}{\partial \tau} + p(\tau)\, y_1 \tag{5'}$$

$$\frac{\partial y_{k+1}}{\partial t} = -\frac{\partial y_k}{\partial \tau} + p(\tau)\, y_{k+1}\,. \tag{6'}$$

Wir werden von den Funktionen $y_k(t, \tau)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ noch das Erfüllen einer Zusatzbedingung verlangen, die für die Bestimmung des angenäherten Wertes von y von Wichtigkeit ist. Es gelte

$$y_0(0, 0) = a, \qquad y_k(0, 0) = 0 \qquad \text{für } k \geqq 1. \tag{31}$$

Wenn wir in (4')–(6') neue Funktionen u_k einführen, welche mit y_k mittels der Relationen

$$y_k = e^{p(\tau)t} u_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

zusammenhängen, kommen wir zu folgenden Gleichungen zur Bestimmung von u_k:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 \tag{4''}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_0}{\partial \tau} - t\dot{p}(\tau)\, u_0 \tag{5''}$$

$$\frac{\partial u_{k+1}}{\partial t} = -\frac{\partial u_k}{\partial \tau} - t\dot{p}(\tau)\, u_k, \tag{6''}$$

wo $\dot{p}(\tau) = \dfrac{\mathrm{d}p(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$.

Wenn wir u_k aus (4″)–(6″) bestimmen wollen, benötigen wir dazu willkürliche Funktionen $C_k(\tau)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, welche durch die Bedingungen (2′), (31) und (32) nur im Punkte $\tau = 0$ bestimmt sind.

Durch Integration bekommen wir folgende Formeln für u_k:

$$\begin{aligned} u_0 &= L_0(C_0) \\ u_1 &= L_0(C_1) + L_1(C_0) \\ u_2 &= L_0(C_2) + L_1(C_1) + L_2(C_0) \\ &\vdots \\ u_{k+1} &= \sum_{n=0}^{k+1} L_n(C_{k-n+1}), \end{aligned} \tag{33}$$

wo L_n, $n = 0, 1, \ldots, k+1$ rekurrent durch die Formeln

$$\begin{gathered} L_0(C) = C \\ L_{n+1}(C) = -\int_0^t \left[\frac{\partial L_n(C)}{\partial \tau} + u \,.\, \dot{p}(\tau)\, L_n(C) \right] \mathrm{d}u \\ \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{34}$$

definiert ist. Da $L_n(C)\,|_{t=0} = 0$ für $n \geqq 1$ ist, sehen wir aus (33) und (32), dass die Funktionen $C_k(\tau)$ so gewählt werden müssen, dass $C_0(0) = a$, $C_k(0) = 0$ für $k \geqq 1$ gelte. Dann sind auch die Bedingungen (31) erfüllt. Schreiben wir

$$I_n = \int_0^t \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} (1 + t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n,$$

so erhalten wir für L_n:

$$\begin{aligned} L_1 &= -C_0 \dot{p} I_1 \\ L_2 &= C_0 \left[\frac{(\dot{p} I_1)^2}{2!} + \ddot{p} I_2 \right] \\ L_3 &= -C_0 \left[\frac{(\dot{p} I_1)^3}{3!} + \dot{p} I_1 \ddot{p} I_2 + \dddot{p} I_3 \right] \\ &\ldots \\ L_n &= (-1)^n C_0 \sum \frac{(\dot{p} I_1)^{i_1}}{i_1!} \frac{(\ddot{p} I_2)^{i_2}}{i_2!} \cdot \ldots \cdot \frac{(p^{(l)} I_l)^{i_l}}{i_l!} = \\ &= (-1)^n C_0 \sum \prod_{r=1}^{l} \frac{(p^{(r)} I_r)^{i_r}}{i_r!}, \end{aligned} \tag{35}$$

wo das Summationszeichen Σ in (35) über alle ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung

$$i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \ldots + l i_l = n$$

erstreckt ist.

Wir wählen jetzt

$$C_0(\tau) = a\,\mathrm{e}^{p(\tau)-p(0)}, \qquad C_n(\tau) \equiv 0 \quad \text{für } n \geqq 1. \tag{36}$$

In diesem Falle rechnen wir leicht aus:

$$L_0(C_0) = C_0,$$

$$L_1(C_0) = -\frac{t}{1!}C_0\left(\frac{t}{2}+1\right)\dot{p}$$

$$L_2(C_0) = \frac{t^2}{2!}C_0\left[\left(\frac{t}{2}+1\right)^2\dot{p}^2 + \left(\frac{t}{3}+1\right)\ddot{p}\right]$$

$$\ldots$$

$$L_n(C_0) = (-1)^n t^n C_0 \sum \prod_{r=1}^{l} \frac{1}{i_r!}\left[\frac{1}{r!}\left(\frac{t}{r+1}+1\right)p^{(r)}\right]^{i_r}, \tag{37}$$

wo das Summationszeichen Σ die oben angeführte Bedeutung hat. Wegen der Wahl (36) haben wir infolge (33)

$$u_n(t,\tau) = L_n(C_0). \tag{38}$$

Wir werden auch zwei spezielle Fälle betrachten, wo die Funktion $p(\tau)$ durch konkrete Formel definiert ist.

1. Es sei $p(\tau) = \alpha\tau + \beta$, $\alpha \neq 0$. Somit $\dot{p}(\tau) = \alpha$. In diesem Falle (vgl. (37))

$$L_n(C_0) = (-1)^n\frac{t^n}{n!}C_0\left(\frac{t}{2}+1\right)^n\dot{p}^n = (-1)^n\left[\alpha t\left(\frac{t}{2}+1\right)\right]^n\frac{C_0}{n!},$$

wo

$$C_0(\tau) = ae^{\alpha\tau+\beta-\beta} = ae^{\alpha\tau}.$$

Die Reihe (3′) hat die Form

$$y = e^{(\alpha\tau+\beta)t}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left[\alpha t\left(\frac{t}{2}+1\right)\right]^k}{k!}\,.\,ae^{\alpha\tau}\varepsilon^k,$$

das heisst

$$y = ae^{\alpha\tau(t+1)+\beta t}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left[\alpha t\left(\frac{t}{2}+1\right)\right]^k}{k!}\,\varepsilon^k. \tag{39}$$

Die Reihe in (39) ist für alle t und ε konvergent und hat die Summe

$$\mathrm{e}^{-\alpha\tau\left(\frac{t}{2}+1\right)}.$$

Die gesuchte Lösung y, welche der Anfangsbedingung (2') genügt ist also

$$y = ae^{\frac{\alpha t\tau}{2} + \beta t}, \tag{40}$$

was übrigens auch durch direkte Integration gefunden werden kann. Die Reihenentwicklung von y in die Potenzreihe in ε ist durch (39) gegeben.

2. Es sei $p(\tau) = \alpha\tau^2 + \beta\tau + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Somit $\dot{p}(\tau) = 2\alpha\tau + \beta$, $\ddot{p}(\tau) = 2\alpha$. In diesem Falle haben wir

$$L_n(C_0) = (-1)^n t^n C_0 \sum \frac{1}{i_1!\, i_2!} \left[\frac{\left(\frac{t}{2}+1\right)\dot{p}}{1!}\right]^{i_1} \left[\frac{\left(\frac{t}{3}+1\right)\ddot{p}}{2!}\right]^{i_2}, \tag{41}$$

wo das Summationszeichen Σ auf alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$i_1 + 2i_2 = n$$

erstreckt ist. Die Reihe

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \tau)\, \varepsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(C_0)\, \varepsilon^k$$

werden wir jetzt folgendermassen umordnen: Wir schreiben zuerst alle Glieder auf, die $\ddot{p}(\tau)$ nicht enthalten, dann die Glieder welche $\ddot{p}(\tau)$ linear enthalten, dann die Glieder welche $\ddot{p}(\tau)$ enthalten u. s. w. In dieser Reihenfolge besitzt jedes Glied in der Formel (15) einen bestimmten Platz und genau einmal auf. Die Glieder welche $\ddot{p}(\tau)$ nicht enthalten, formen die Reihe

$$v_0(t, \tau) = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left[t\left(\frac{t}{2}+1\right)\dot{p}\right]^k}{k!}\, \varepsilon^k,$$

die Glieder mit $\ddot{p}(\tau)$ sind

$$v_1(t, \tau) = \frac{\ddot{p}(\tau)\left(\frac{t}{3}+1\right)t^2\varepsilon^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left[t\left(\frac{t}{2}+1\right)\dot{p}\right]^k}{k!}\, \varepsilon^k,$$

d. h.

$$v_1(t, \tau) = \frac{\ddot{p}(\tau)\left(\frac{t}{3}+1\right)t^2\varepsilon^2}{2}\, v_0(t, \tau).$$

Allgemein formen die Glieder mit $\ddot{p}^m(\tau)$ die Reihe

$$v_m(t, \tau) = \frac{\ddot{p}^m(\tau)\left(\frac{t}{3}+1\right)^m t^{2m}\varepsilon^{2m}}{(2m)!!} \,.\, v_0(t, \tau). \tag{42}$$

Die Reihen (42) sind absolut konvergent und es gilt

$$v_m(t, \tau) = C_0 \frac{\ddot{p}^m(\tau)\left(\frac{t}{3} + 1\right)^m t^{2m}\varepsilon^{2m}}{(2m)!!} \cdot \mathrm{e}^{-t\varepsilon\left(\frac{t}{2}+1\right)\dot{p}(\tau)}. \tag{43}$$

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} v_m(t, \tau) = C_0\, \mathrm{e}^{-t\left(\frac{t}{2}+1\right)\dot{p}\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\ddot{p}(\tau)\left(\frac{t}{3} + 1\right)t^2\varepsilon^2}{2}\right]^m \frac{1}{m!},$$

mit der Summe

$$u = C_0(\tau)\, e^{-t\varepsilon\left(\frac{t}{2}-1\right)\dot{p}(\tau)} \cdot e^{\frac{1}{2}\ddot{p}(\tau)\left(\frac{t}{3}+1\right)t^2\varepsilon^2}.$$

Wenn wir für p, $\dot{p}$, $\ddot{p}$ einsetzen, bekommen wir aus (3′) und (32) die gesuchte Lösung

$$y = e^{p(\tau)\cdot t} \cdot u = e^{(\alpha\tau^2+\beta\tau+\gamma)t} \cdot a \cdot e^{\alpha\tau^2+\beta\tau} \times$$

$$\times\, e^{-t\varepsilon\left(\frac{t}{2}+1\right)(2\alpha\tau+\beta)} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\alpha\left(\frac{t}{3}+1\right)t^2\varepsilon^2} =$$

$$= a \cdot e^{\frac{1}{3}\alpha t\tau^2 + \frac{1}{2}\beta t\tau + \gamma t}, \tag{44}$$

welche der Anfangsbedingung $y(t, \tau, \varepsilon)\,|_{t=0} = a$ genügt. Diese Lösung kann wieder auch durch direkte Integration gefunden werden. Die Reihe (3′) im Parameter ε hat hier die Form

$$y = e^{(\alpha\tau^2+\beta\tau+\gamma)t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_0 t^k \left\{\sum \frac{1}{i_1!\,.\,i_2!} \cdot \left[\frac{\left(\frac{t}{2}+1\right)\dot{p}}{1!}\right]^{i_1} \cdot \left[\frac{\left(\frac{t}{3}+1\right)\ddot{p}}{2!}\right]^{i_2}\right\} \varepsilon^k, \tag{45}$$

und unsere Betrachtungen sind für alle t und ε aus den oben angeführten Intervallen richtig.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Erugin, N. P.:* Kniga dlja čtenija po obščemu kursu differencial'nych uravněnij. Minsk, Nauka i technika, 1970.

[2] *Erugin, N. P.:* Linejnyje sistemy obyknovennych differencial'nych uravněnij. Minsk, Izdatelstvo AN BSSR, 1963.

[3] *Fichtengol'c G. M.:* Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija. (Tom II) Moskva, Gosudarstvennoje izdatelstvo fiziko-matematičeskoj literatury, 1962.

Shrnutí

POZNÁMKA K JEDNÉ ÚLOZE N. P. JERUGINA

JIŘÍ ZEMAN

V práci je kladně zodpovězen problém, formulovaný N. P. Jeruginem v [1]. Je dokázána existence konvergentních řad (3) podle mocnin malého parametru ε. Tyto řady jsou analyzovány v případě, že matice $P(\tau)$ v (1) je holomorfní v okolí bodu $\tau = 0$. Obtížnost studovaných otázek je ilustrována na příkladě skalární rovnice (1') s vhodně zvolenými funkcemi $p(\tau)$.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОФ. Н. П. ЕРУГИНА

ИРЖИ ЗЕМАН

В работе дан положительный ответ на вопрос формулированный Н. П. Еругиным в [I]. Доказано существование сходящихся рядов (3) по степеням малого параметра ε. Эти ряды анализируются в случае голоморфной в окрестности точки $\tau = 0$ матрицы $P(\tau)$. Сложность изучаемых вопросов иллюстрируется на примере скалярного уравнения (I') с подходящим образом избранными функциями $p(\tau)$.