Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Lenka Poncová

Группоиды с мультиоператорами

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 16 (1977), No. 1, 5--28

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120042`

1977 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 53

Katedra metodiky matematiky a elementární matematiky přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. Paed. Dr. Miloslav Zedek

ГРУППОИДЫ С МУЛЬТИОПЕРАТОРАМИ

ЛЕНКА ПОНЦОВА

(*Поступило в редакцию 31. 3. 1976*)

Введение

В основу этой статьи положены работы [1], [3], [4], указанные в списке литературы. В работе применена теория универсальных алгебр [3] на группоиды. Теория Ω-группоидов здесь строится на основании теории разбиений в множествах разработанной в работе [1]. Статья обращает внимание на свойства Ω-группоидов, разбиения в Ω-группоидах, именно образующие и на цепи разбиений в Ω-группоидах.

Статья придерживается понятий и обозначений работ [1] и [3]. Определения обозначены символом D, теоремы символом V.

Основой для этой статьи служила работа на получение докторской степени автора, которая была разработана под научным руководством товарища Prof. Dr. L. Sedláčka CSc., которому автор приносит искренную благодарность за это руководство и за сделаную им рецензию.

1. Основные понятия и свойства

D.1.1. Пусть G — непустое множество, пусть M — закон, по которому всяким двум элементам b, c из G, взятым в определенном порядке ставится в соответствие однозначно определенный элемент d из G, что и обозначаем $b + c = d$. Закон M называется сложение в множестве G. Пусть Ω — множество n-арных операций, пусть всякой операции ω из Ω соответствует натуральное число $n = n(\omega)$, так что операция ω любой последовательности n элементов a_1, a_2,

..., $a_n \in G$ сопоставляет однозначно определенный элемент $a = a_1 a_2 \dots a_n \omega$ множества G.

Множество G вместе с законом M и системой операций Ω называется группоидом с системой мультиоператоров или Ω-группоидом. Обозначаем его символом $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$. G называется поле Ω-группоида.

Замечание 1.1. Ω-группоид $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ является универсальной алгеброй с системой операций $\Omega' = \Omega \cup \{+\}$, т. е. $\mathscr{G} = \langle G, \Omega' \rangle$.

Условие. Условимся понятия и символы определенные для полей Ω-группоидов, применить лдя самых Ω-группоидов. Будем говорить, например, о подмножествах, о разбиениях, о элементах Ω-группоида, имея в виду элементы, разбиения и подмножества поля G Ω-группоида $\mathscr{G}$.

D.1.2. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ — Ω-группоид, пусть $0 \in G$ — нулевой элемент аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}$. Тогда для всякой n-арной операции ω из Ω определяем

$$\underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ раз}}\omega = 0 \tag{1.1.}$$

и $\mathscr{G}$ называем Ω-группоидом с нулевым элементом 0.

D.1.3. Непустое подмножество A Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$, вместе с системой n-арных операций Ω и сложением, называется Ω-подгруппоидом в $\mathscr{G}$, если в силе:

a) для всякой пары элементов a_h, a_k из A в определенном порядке, элемент $a_h + a_k$ является элементом из A,

b) для всякой n-арной операции $\omega \in \Omega$ и всякой n-членной последовательности элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ из A, элемент $a_1 a_2 \dots a_n \omega$ является элементом множества A.

Множество A называется полем Ω-подгруппоида $\mathscr{A} = \langle A, +, \Omega \rangle$ в $\mathscr{G}$.

D.1.4. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ — Ω-группоид, пусть ω — любая n-арная операция из Ω, $\{A_1, A_2, \dots\}$ — система подмножеств в $\mathscr{G}$. Символом $A_h + A_k = A$ обозначаем систему всех элементов a из $\mathscr{G}$, $a = a_h + a_k$, где $a_h \in A_h$, $a_k \in A_k$. Символом $A_1 A_2 \dots A_n \omega = A'$ обозначаем мноежство A' всех элементов вида $a' = a_1 a_2 \dots a_n \omega$ из $\mathscr{G}$, где $a_i \in A_i$, при $i = 1, 2, \dots, n$.

V.1.1. Непустое подмножество A Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ является полем Ω-подгруппоида в $\mathscr{G}$ тогда и только тогда, когда оно обладает следующими свойствами: для сложения имеет место соотношение вида

$$A + A \subset A \tag{1.2.}$$

и для всякой n-арной операции $\omega \in \Omega$, при $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, справедливо, что

$$A_1 A_2 \dots A_n \omega \subset A. \tag{1.3.}$$

Доказательство. По замечанию 1.1. и по [3] V.1.1 A является полем подалгебры в $\mathscr{G} = \langle G, \Omega' \rangle$ тогда и только тогда, когда для всякой n-арной операции $\omega' \in \Omega'$ и для $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ имеет место $A_1 A_2 \ldots A_n \omega' \subset A$, т. е. теорема справедлива.

V.1.2. Пусть I — множество индексов, пусть $\mathscr{A}_i$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$, при $i \in I$. Пусть пересечение их полей, $P = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, является непустым множеством. Тогда P является полем Ω-подгруппоида $\mathscr{P} = \langle P, +, \Omega \rangle$ в $\mathscr{G}$.

Доказательство предоставляется читателю.

D.1.5. Ω-подгруппоид $\mathscr{P}$ из предудыщей теоремы, называется пересечением Ω-подгруппоидов $\mathscr{A}_i$ в $\mathscr{G}$.

2. Ω-факторонды

D.2.1. Пусть $\bar{A}$ — разбиение в Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$, пусть $\omega \in \Omega$ — любая n-арная операция. Пусть для всякой пары $(\bar{a}_h, \bar{a}_k)$ элементов $\bar{a}_h, \bar{a}_k$ из $\bar{A}$ в определенном порядке, можно найти в $\bar{A}$ элемент $\bar{a}'$, такой, что

$$\bar{a}_h + \bar{a}_k \subset \bar{a}' \tag{2.1.}$$

и пусть для всякой последовательности n элементов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ из $\bar{A}$ содержится в $\bar{A}$ такой элемент $\bar{a}$, что

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega \subset \bar{a}. \tag{2.2.}$$

Тогда разбиение $\bar{A}$ называется образующим разбиением.

D.2.2. Пусть $\bar{A}$ — образующее разбиение в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Определим Ω-группоид $\mathscr{A}$, полем которого будет образующее разбиение $\bar{A}$ и сложение которого будет определено законом, сопоставляющим всякой паре $(\bar{a}_h, \bar{a}_k)$ любых элементов $\bar{a}_h, \bar{a}_k$ из $\bar{A}$, в определенном порядке, тот элемент $\bar{a}' \in \bar{A}$, для которого имеет место (2.1.), что и записываем

$$\bar{a}_h \oplus \bar{a}_k = \bar{a}'. \tag{2.3.}$$

n-арные операции $\bar{\omega}$ этого Ω-группоида будут определены так, что всякой n-членной последовательности элементов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ из $\bar{A}$, операция $\bar{\omega}$ сопоставляет тот элемент $\bar{a} \in \bar{A}$, для которого в силе (2.2.), что и пишем

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega = \bar{a}. \tag{2.4.}$$

Ω-группоид $\mathscr{A}$ называем Ω-фактороидом в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ и обозначаем символом $\mathscr{A} = \langle \bar{A}, \oplus, \Omega \rangle$.

V.2.1. $\bar{\mathscr{A}}$ является Ω-фактороидом в Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ тогда и только тогда, когда $\bar{\mathscr{A}}$ является фактор-алгеброй в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, считаемым алгеброй $\mathscr{G} = \langle G, \Omega' \rangle$.

Доказательство. По замечанию 1.1., D.2.1. и [3] D1/2, разбиение $\bar{A}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ является образующим разбиением тогда и только тогда, когда оно является образующим разбиением в $\mathscr{G}$, рассматриваемым как универсальную алгебру с системой операций Ω'. По [3] D2/2 и D.2.2. образующее разбиение $\bar{A}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ является полем фактор-алгебры $\bar{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \bar{\Omega}' \rangle$ в $\mathscr{G} = \langle G, \Omega' \rangle$, причем $\bar{\Omega}' = \bar{\Omega} \cup \{\oplus\}$.

V.2.2. Каждый аддитивный группоид Ω-фактороида $\bar{\mathscr{A}}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ является фактороидом в аддитивном группоиду Ω-группоида $\mathscr{G}$.

Доказательство. Ввиду (2.1.) и [1] 14.1. всякое образующее разбиение в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ является образующим разбиением в аддитивном группоиду Ω-группоида $\mathscr{G}$. Отсюда и из [1] 15.1., вытекает утверждение теоремы.

V.2.3. На всяком Ω-группоиду $\mathscr{G}$ существует наибольший Ω-фактороид $\bar{\mathscr{G}}_{\max}$ и наименьший Ω-фактороид $\bar{\mathscr{G}}_{\min}$.

Доказательство. В силу теорем V.2.1. и [3] V.2/2 утверждение теоремы справедливо.

V.2.4. Пусть $\bar{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ — Ω-фактороид в Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$. Тогда $s\bar{A}$ является полем Ω-подгруппоида $s\bar{\mathscr{A}} = \langle s\bar{A}, +, \Omega \rangle$ в $\mathscr{G}$ и $\bar{\mathscr{A}}$ является Ω-фактороидом на $s\bar{\mathscr{A}}$.

Доказательство. Ввиду V.2.1. и [3] V3/2 $s\bar{\mathscr{A}}$ является подалгеброй в $\mathscr{G} = \langle G, \Omega' \rangle$ и $\bar{\mathscr{A}}$ фактор-алгеброй на $s\bar{\mathscr{A}}$.

D.2.3. Пусть $\mathscr{C}$ — Ω-подгруппоид, $\bar{\mathscr{A}}$, $\bar{\mathscr{B}}$ — Ω-фактороиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$.

a) Множество всех элементов в $\bar{\mathscr{A}}$, пересекающихся с $\mathscr{C}$, называем оболочкой Ω-подгруппоида $\mathscr{C}$ в Ω-фактороиду $\bar{\mathscr{A}}$ и обозначаем символом $\mathscr{C} \sqsubset \bar{\mathscr{A}}$ или $\bar{\mathscr{A}} \sqsupset \mathscr{C}$. Сечением Ω-подгруппоида $\mathscr{C}$ с Ω-фактороидом $\bar{\mathscr{A}}$ называем множество всех непустах пересечений отдельных элементов из $\bar{\mathscr{A}}$, с Ω-подгруппоидом $\mathscr{C}$ и обозначаем символом $\mathscr{C} \sqcap \bar{\mathscr{A}}$ или $\bar{\mathscr{A}} \sqcap \mathscr{C}$.

b) Оболочкой Ω-фактороида $\bar{\mathscr{B}}$ в Ω-фактороиду $\bar{\mathscr{A}}$, называем множество всех элементов из $\bar{\mathscr{A}}$, пересекающихся хотя бы с одним элементом из $\bar{\mathscr{B}}$ и обозначаем символом $\bar{\mathscr{B}} \sqsubset \bar{\mathscr{A}}$ или $\bar{\mathscr{A}} \sqsupset \bar{\mathscr{B}}$. Сечением Ω-фактороида $\bar{\mathscr{B}}$ с Ω-фактороидом $\bar{\mathscr{A}}$ разумеем множество всех непустых пересечений элементов из $\bar{\mathscr{B}}$ с элементами из $\bar{\mathscr{A}}$ и обозначаем символом $\bar{\mathscr{A}} \sqcap \bar{\mathscr{B}}$.

V.2.5. Пусть $\bar{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ и $\bar{\mathscr{B}} = \langle \bar{B}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ — Ω-фактороиды в Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$, пусть $s\bar{A} \cap s\bar{B} \neq 0$. Тогда оболочка $\bar{\mathscr{B}} \sqsubset \bar{\mathscr{A}}$ Ω-фактороида $\bar{\mathscr{B}}$ в Ω-фактороиду $\bar{\mathscr{A}}$ и сечение $\bar{\mathscr{A}} \sqcap \bar{\mathscr{B}}$ Ω-фактороида $\bar{\mathscr{A}}$ с Ω-фактороидом $\bar{\mathscr{B}}$ будут Ω-фактороидами в $\mathscr{G}$ и $\bar{\mathscr{B}} \sqsubset \bar{\mathscr{A}} = \langle \bar{B} \sqsubset \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$, $\bar{\mathscr{A}} \sqcap \bar{\mathscr{B}} = \langle \bar{A} \sqcap \bar{B}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$.

Доказательство. Ввиду того, что имеют место теоремы V.2.1. и [3] V4/2, оболочка $\mathscr{B} \sqsubset \mathscr{A}$ и сечение $\mathscr{A} \sqcap \overline{\mathscr{B}}$ являются фактор-алгебрами в $\mathscr{G} = \langle G, \Omega' \rangle$, следовательно в силу V.2.1. Ω-фактороидами в $\mathscr{G}$.

V.2.6. Пусть $\mathscr{B} = \langle B, +, \Omega \rangle$ – Ω-подгруппоид, $\overline{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ – Ω-фактороид в Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ и пусть $B \cap s\bar{A} \neq 0$. Тогда оболочка $\mathscr{B} \sqsubset \overline{\mathscr{A}}$ Ω-подгруппоида $\mathscr{B}$ в Ω-фактороиду $\overline{\mathscr{A}}$ и сечение $\mathscr{B} \sqcap \overline{\mathscr{A}}$ Ω-подгруппоида $\mathscr{B}$ с Ω-фактороидом $\overline{\mathscr{A}}$ являются Ω-фактороидами в $\mathscr{G}$ и $\mathscr{B} \sqcap \overline{\mathscr{A}} = \langle B \sqcap \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ и $\mathscr{B} \sqsubset \overline{\mathscr{A}} = \langle B \sqsubset \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$.

Доказательство. Разбиение $\bar{B}_{\max}$, содержащее единственный элемент, которым является множество B, есть образующим в $\mathscr{G}$, потому что $\mathscr{B}$ есть Ω-подгруппоид в $\mathscr{G}$. Следовательно $\overline{\mathscr{B}}_{\max}$ является Ω-фактороидом в $\mathscr{G}$. По предположению $B \cap s\bar{A} \neq \emptyset$ и поэтому тоже $s\bar{B} \cap s\bar{A} \neq \emptyset$. Далее в силе

$$\mathscr{B} \sqsubset \overline{\mathscr{A}} = \overline{\mathscr{B}}_{\max} \sqsubset \overline{\mathscr{A}} \quad \text{и} \quad \mathscr{B} \sqcap \overline{\mathscr{A}} = \overline{\mathscr{B}}_{\max} \sqcap \overline{\mathscr{A}}.$$

Ввиду V.2.5. $\mathscr{B} \sqsubset \overline{\mathscr{A}}$ и $\mathscr{B} \sqcap \overline{\mathscr{A}}$ являются Ω-фактороидами в Ω-группоиду $\mathscr{G}$.

D.2.4. Пусть $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ – разбиения в множестве G. Разбиение $\bar{A}(\bar{B})$ называется покрытием (подразбиением) разбиения $\bar{B}(\bar{A})$, если всякий элемент разбиения $\bar{B}$ является частью какого-нибудь элемента разбиения $\bar{A}$. Обозначаем это символом $\bar{A} \geqq \bar{B}$ или $\bar{B} \leqq \bar{A}$.

Если каждый элемент разбиения $\bar{A}$ содержит в качестве своей части какой-нибудь элемент разбиения $\bar{B}$, то $\bar{A}$ называется нормальным покрытием разбиения $\bar{B}$.

Если даже каждый элемент разбиения $\bar{A}$ является суммой каких-нибудь элементов разбиения $\bar{B}$, то $\bar{A}(\bar{B})$ называем чистым покрытием (подразбиением) разбиения $\bar{B}(\bar{A})$.

Пусть разбиение $\bar{A}(\bar{B})$ есть чистое покрытие (подразбиение) разбиения $\bar{B}(\bar{A})$. Система всех подмножеств в разбиении $\bar{B}$, каждое из которых состоит из всех тех элементов разбиения $\bar{B}$, которые являются частями того же элемента из $\bar{A}$, является разбиением $\bar{\bar{B}}$ разбиения $\bar{B}$. Разбиение $\bar{A}$ называем покрытием разбиения $\bar{B}$, вынужденным разбиением $\bar{\bar{B}}$ на $\bar{B}$ или говорим, что разбиение $\bar{\bar{B}}$ на $\bar{B}$ соответствует покрытию $\bar{A}$ разбиения $\bar{B}$.

D.2.5. Пусть $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{B}}$ – Ω-фактороиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Если поле $\bar{A}(\bar{B})$ Ω-фактороида $\overline{\mathscr{A}}(\overline{\mathscr{B}})$ является покрытием (подразбиением) поля $\bar{B}(\bar{A})$ Ω-фактороида $\overline{\mathscr{B}}(\overline{\mathscr{A}})$, то Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}(\overline{\mathscr{B}})$ называется покрытием (подразбиением) Ω-фактороида $\overline{\mathscr{B}}(\overline{\mathscr{A}})$, что и обозначаем символом $\overline{\mathscr{A}} \geqq \overline{\mathscr{B}}$ или $\overline{\mathscr{B}} \leqq \overline{\mathscr{A}}$. Если $\bar{A}(\bar{B})$ – нормальное {чистое} покрытие (подразбиение) $\bar{B}(\bar{A})$, то Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}(\overline{\mathscr{B}})$ называется нормальным {чистым} покрытием (подразбиением) Ω-фактороида $\overline{\mathscr{B}}(\overline{\mathscr{A}})$.

V.2.7. Пусть $\overline{\mathscr{B}} = \langle \bar{B}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ – Ω-фактороид на Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$. Пусть $\bar{\bar{B}}$ – разбиение Ω-фактороида $\overline{\mathscr{B}}$, пусть $\bar{A}$ является покрытием поля $\bar{B}$

Ω-фактороида $\overline{\overline{\mathscr{B}}}$, вынужденным разбиением B. Разбиение $\bar{A}$ является полем Ω-фактороида $\overline{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ на $\mathscr{G}$ тогда и только тогда, когда B является полем Ω-фактороида $\overline{\overline{\mathscr{B}}} = \langle \bar{\bar{B}}, \oplus, \bar{\bar{\Omega}} \rangle$ на $\overline{\mathscr{B}}$.

Доказательство. По теореме [3]V.10/2 $\bar{\bar{B}}$ является полем фактор-алгебры на $\overline{\mathscr{B}}$ тогда и только тогда, когда $\bar{A}$ является полем фактор-алгебры на $\mathscr{G} = \langle G, \Omega' \rangle$, $\Omega' = \Omega \cup \{+\}$. Отсюда, в силу теоремы V.2.1., вытекает утверждение теоремы.

D.2.6. Пусть $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{B}}$, $\overline{\overline{\mathscr{B}}}$ – Ω-фактороиды из V.2.7. Говорим, что Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ является покрытием Ω-фактороида $\overline{\overline{\mathscr{B}}}$ вынужденным Ω-фактороидом $\overline{\mathscr{B}}$, или что Ω-фактороид $\overline{\overline{\mathscr{B}}}$ соответствует покрытию $\overline{\mathscr{A}}$ Ω-фактороида $\overline{\mathscr{B}}$.

D.2.7. Пусть $\bar{A}$, $\bar{B}$ – любые разбиения на Ω-группоиду $\mathscr{G}$.

a) Общим покрытием (подразбиением) разбиений $\bar{A}$, $\bar{B}$ назовем всякое разбиение на $\mathscr{G}$, являющееся покрытием (подразбиением) как разбиения $\bar{A}$ так $\bar{B}$.

b) Общее покрытие разбиений $\bar{A}$, $\bar{B}$ на $\mathscr{G}$, которое в множестве всех общих покрытий $\bar{A}$ и $\bar{B}$ является самым малым элементом, обозначаем символом $[\bar{A}, \bar{B}]$ и называем наименьшим общим покрытием разбиений $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

c) Самый большой элемент в множестве всех общих подразбиений разбиений $\bar{A}$, $\bar{B}$ называем наибольшим подразбиением разбиений $\bar{A}$ и $\bar{B}$ и обозначаем символом $(\bar{A}, \bar{B})$.

V.2.8. Наименьшее общее покрытие $[\bar{A}, \bar{B}]$ полей $\bar{A}$, $\bar{B}$ Ω-фактороидов $\overline{\mathscr{A}}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ Ω-группоида $\mathscr{G}$ является полем Ω-фактороида на $\mathscr{G}$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теорем [3]V7/2 и V.2.1.

V.2.9. Наибольшее общее подразбиение $(\bar{A}, \bar{B})$ полей $\bar{A}$, $\bar{B}$ Ω-фактороидов $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{B}}$ Ω-группоида $\mathscr{G}$ является полем Ω-фактороида на $\mathscr{G}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить V.2.1. и [3]V8/2.

D.2.7. Пусть $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{C}}$ – Ω-фактороиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Если полями этих Ω-фактороидов являются сопряженные разбиения $\bar{A}$, $\bar{C}$, т. е. если всякий элемент $\bar{a}$ из $\bar{A}$ пересекается только с одним элементом из $\bar{C}$ и одновременно всякий элемент $\bar{c}$ из $\bar{C}$ пересекается только с одним элементом из $\bar{A}$, то говорим, что Ω-фактороиды $\overline{\mathscr{A}}$ и $\overline{\mathscr{C}}$ сопряжены.

V.2.10. Пусть $\overline{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$, $\overline{\mathscr{C}} = \langle \bar{C}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ – Ω-фактороиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть в силе $\overline{\mathscr{A}} = \overline{\mathscr{C}} \sqsubset \overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{C}} = \overline{\mathscr{A}} \sqsubset \overline{\mathscr{C}}$. Пусть Ω-фактороид $\overline{\mathscr{B}} = \langle \bar{B}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ является общим покрытием Ω-фактороидов $\overline{\mathscr{A}} \sqcap s\overline{\mathscr{C}}$, $\overline{\mathscr{C}} \sqcap s\overline{\mathscr{A}}$, пусть A°, C° – покрытия разбиений $\bar{A}$, $\bar{C}$ вынужденные разбиением $\bar{B}$. Тогда A°, C° – сопряженные разбиения, A°, C° являются полями Ω-фактороидов $\mathscr{A}^\circ$, $\mathscr{C}^\circ$ и справедливо, что $\overline{\mathscr{B}} = \mathscr{A}^\circ \sqcap \mathscr{C}^\circ$.

Доказательство. По V.2.1. и [3] V6/2. A°, C° — сопряженные разбиения и поля фактор-алгебр в $\mathscr{G}$. По V.2.1. справедливо утверждение теоремы.

D.2.8. Пусть $\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{C}}$ — Ω-фактороиды, $\mathscr{B}, \mathscr{D}$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Говорим, что Ω-фактороиды $\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{C}}$ присоединены относительно Ω-подгруппоидов $\mathscr{B}, \mathscr{D}$, когда этими свойствами обладают их поля $\bar{A}, \bar{C}$ относительно полей B, D Ω-подгруппоидов $\mathscr{B}, \mathscr{D}$. Это соотношение можно выразить при помощи равенства $s[\mathscr{D} \sqsubset \overline{\mathscr{A}} \sqcap \mathscr{C}] = s[\mathscr{B} \sqsubset \overline{\mathscr{C}} \sqcap \mathscr{A}]$, причем $\mathscr{C} = s\overline{\mathscr{C}}$, $\mathscr{A} = s\overline{\mathscr{A}}$.

V.2.11. Пусть $\overline{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega}\rangle$, $\overline{\mathscr{C}} = \langle \bar{C}, \oplus, \bar{\Omega}\rangle$ — Ω-фактороиды, пусть $\mathscr{B} = \langle B, +, \Omega\rangle$ и $\mathscr{D} = \langle D, +, \Omega\rangle$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Пусть Ω-фактороиды $\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{C}}$ присоединены относительно Ω-подгруппоидов $\mathscr{B}, \mathscr{D}$. Обозначим $\overline{\mathscr{A}}_1 = \mathscr{C} \sqsubset \overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{C}}_1 = \mathscr{A} \sqsubset \overline{\mathscr{C}}$, $\overline{\mathscr{A}}_2 = \mathscr{D} \sqsubset \overline{\mathscr{A}}$, $\overline{\mathscr{C}}_2 = \mathscr{B} \sqsubset \overline{\mathscr{C}}$ и $\mathscr{A}_1 = s\overline{\mathscr{A}}_1$, $\mathscr{A}_2 = s\overline{\mathscr{A}}_2$, $\mathscr{C}_1 = s\overline{\mathscr{C}}_1$, $\mathscr{C}_2 = s\overline{\mathscr{C}}_2$. Пусть $\overline{\mathscr{U}}$ — наименьшее общее покрытие Ω-фактороидов $\mathscr{A}_1 \sqcap \overline{\mathscr{C}}_1$, $\mathscr{C}_1 \sqcap \overline{\mathscr{A}}_1$ на Ω-группоиду $\mathscr{A} \cap \mathscr{C}$, пусть A°, C° — покрытия Ω-фактороидов $\overline{\mathscr{A}}_1, \overline{\mathscr{C}}_1$ вынужденные покрытием $\overline{\mathscr{U}}$. Тогда справедливо:

a) A°, C° — поля сопраженных Ω-фактороидов $\mathscr{A}^\circ, \mathscr{C}^\circ$ в $\mathscr{G}$.

b) $\mathscr{A}_2 \in \mathscr{A}^\circ$, $\mathscr{C}_2 \in \mathscr{C}^\circ$,

c) Ω-подгруппоиды $\mathscr{A}_2, \mathscr{C}_2$ пересекаются.

Доказательство. Из [1]4.2. для полей соответствующих Ω-фактороидов и Ω-подгруппоидов в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ следует, что существуют сопряженные покрытия A°, C° разбиений $\bar{A}_1 = C \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C}_1 = A \sqsubset \bar{C}$ такие, что $A_2 \in A^\circ$, $C_2 \in C^\circ$, причем $A_2 = s\bar{A}_2$, $C_2 = s\bar{C}_2$, $\bar{A}_2 = D \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C}_2 = B \sqsubset \bar{C}$ и множества A_2 и C_2 пересекаются. На основании теорем V.2.6., V.2.4. и V.2.8., $\mathscr{A}_1 \sqcap \overline{\mathscr{C}}_1, \mathscr{C}_1 \sqcap \overline{\mathscr{A}}_1$ — Ω-фактороиды и их наименьшее общее покрытие $\overline{\mathscr{U}}$ — тоже Ω-фактороид в $\mathscr{G}$. Далее ввиду [1]4.2. справедливо, что $\overline{\mathscr{A}}_1 = \mathscr{C}_1 \sqsubset \overline{\mathscr{A}}_1$ и $\overline{\mathscr{C}}_1 = \mathscr{A}_1 \sqsubset \overline{\mathscr{C}}_1$. Разбиения A°, C°, по определению, являются покрытиями Ω-фактороидов $\overline{\mathscr{A}}_1, \overline{\mathscr{C}}_1$ вынужденными Ω-фактороидом $\overline{\mathscr{U}}$. Выполняются предположения теоремы V.2.10. и A°, C° будут полями Ω-фактороидов $\mathscr{A}^\circ, \mathscr{C}^\circ$.

3. Простые Ω-факторонды

D.3.1. Пусть $\mathscr{G}$ — Ω-группоид, пусть a элемент из $\mathscr{G}$ и пусть для всякого Ω-фактороида $\overline{\mathscr{A}}$ на $\mathscr{G}$ справедливо или

a) $\overline{\mathscr{A}} = \overline{\mathscr{G}}_{\max}$, т. е. $\overline{\mathscr{A}}$ — наибольший Ω-фактороид на $\mathscr{G}$ или

b) Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ содержит в качестве элемента множество $\{a\}$, образованое единственным элементом a, т. е. $\{a\} \in \overline{\mathscr{A}}$. Тогда Ω-группоид $\mathscr{G}$ называется простым относительно элемента a. Если Ω-группоид $\mathscr{G}$ простой относительно какого-нибудь своего элемента, то называем его относительно простым. Ω-группоид $\mathscr{G}$, простой относительно любого своего элемента называется простым.

V.3.1. Ω-группоид $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ простой (относительно простой) тогда и только тогда, когда он — простая (относительно простая) универсальная алгебра.

Доказательство. Принимая во внимание D.3.1. и [3]D1/6 видно, что утверждение теоремы справедливо.

V.3.2. Ω-группоид $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ простой тогда и только тогда, когда $\overline{\mathscr{G}}_{\max}$ и $\overline{\mathscr{G}}_{\min}$ — единственные Ω-фактороиды на $\mathscr{G}$.

Доказательство. Ввиду того, что имеет место V.3.1. и [3]V1/6, теорема справедлива.

D.3.2. Пусть $\mathscr{G}$ — Ω-группоид, пусть $B \neq \emptyset$ — подмножество в $\mathscr{G}$, содержащееся в качестве элемента в Ω-фактороиду $\overline{\mathscr{A}}$ на $\mathscr{G}$, т. е. $B \in \overline{\mathscr{A}}$. Пусть для всякого Ω-фактороида $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ на $\overline{\mathscr{A}}$ в силе или

a) $\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \overline{\overline{\mathscr{A}}}_{\max}$, т. е. $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ наибольший Ω-фактороид на $\overline{\mathscr{A}}$, или

b) $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ содержит в качестве элемента множество B, т. е. $B \in \overline{\overline{\mathscr{A}}}$. Тогда говорим, что Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ на $\mathscr{G}$ простой относительно подмножества B. Если B является полем Ω-подгруппоида $\mathscr{B}$ в $\mathscr{G}$, то говорим о Ω-фактороиде простом относительно Ω-подгруппоида $\mathscr{B}$. Если $\overline{\mathscr{A}}$ простой относительно какого-нибудь своего элемента, то называем его относительно простым. Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ на $\mathscr{G}$ простой относительно всякого своего элемента называем простым.

V.3.3. Пусть Ω-фактороид $\overline{\mathscr{C}}$ является покрытием Ω-фактороида $\overline{\mathscr{A}}$ на Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть $B \in \overline{\mathscr{A}}$, $B \neq \emptyset$, — подмножзство в $\mathscr{G}$. Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ простой относительно B тогда и только тогда, когда в силе или

a) $\overline{\mathscr{C}}$ — наибольший Ω-фактороид на $\mathscr{G}$, т. е. $\overline{\mathscr{C}} = \overline{\mathscr{G}}_{\max}$ или

b) B есть элементом $\overline{\mathscr{C}}$, т. е. $B \in \overline{\mathscr{C}}$.

Доказательство. Пусть Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ простой относительно B и пусть $\overline{\mathscr{C}}$ является покрытием $\overline{\mathscr{A}}$. Согласно V.2.7. и D.2.6., существует Ω-фактороид $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ на $\overline{\mathscr{A}}$ соответствующий покрытию $\overline{\mathscr{C}}$ Ω-фактороида $\overline{\mathscr{A}}$. Ввиду D.3.2. в силе или $\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \overline{\overline{\mathscr{A}}}_{\max}$ или $B \in \overline{\overline{\mathscr{A}}}$. Каждый элемент $\bar{\bar{a}} \in \overline{\overline{\mathscr{A}}}$ является подмножеством в $\overline{\mathscr{A}}$, содержащим все те элементы $\bar{a} \in \overline{\mathscr{A}}$, которые являются частями того же самого элемента из $\overline{\mathscr{C}}$. Ввиду того будет или $\overline{\mathscr{C}} = \overline{\mathscr{G}}_{\max}$ или $B \in \overline{\mathscr{C}}$. Если обратно Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ не простой, то существует в $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ такой элемент $\bar{\bar{a}}$, что B является собственным подмножеством в $s\bar{\bar{a}}$ и $s\bar{\bar{a}}$ является собственным подмножеством в $\mathscr{G}$. Тогда Ω-фактороид $\overline{\mathscr{C}}$, который является покрытием Ω-фактороида $\overline{\mathscr{A}}$, вынужденным Ω-фактороидом $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$, содержит элемент $\bar{c} = s\bar{\bar{a}}$. Итак $\overline{\mathscr{C}}$ не является ни наибольшим Ω-фактороидом на $\mathscr{G}$, $\overline{\mathscr{G}}_{\max}$, ни не содержит в качестве элемента подмножество B, что и требовалось доказать.

V.3.4. Пусть $B \neq \emptyset$ — поле Ω-подгруппоида в Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ и пусть Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ на $\mathscr{G}$ не простой. Тогда существует покрытие $\overline{\mathscr{C}}$ Ω-фактороида $\overline{\mathscr{A}}$, содержащее в качестве элемента Ω-подгруппоид $\mathscr{C}_1$ Ω-группоида $\mathscr{G}$, такой, что $B \subset \mathscr{C}_1 \in \overline{\mathscr{C}}$, причем $\mathscr{C}_1 \neq \mathscr{G}$ и $\mathscr{B}$ является собственным Ω-подгруппоидом в $\mathscr{C}_1$.

Доказательство. Ввиду того, что Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ не простой, существует в $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ элемент $\overline{\overline{a}}$, причем $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ — Ω-фактороид на $\overline{\mathscr{A}}$, соответствующий покрытию $\overline{\mathscr{C}}$, такой, что в силе $B \subset s\overline{\overline{a}} \subset \mathscr{G}$, $B \neq s\overline{\overline{a}} \neq \mathscr{G}$ и имеет место $\bar{c} = s\overline{\overline{a}} \in \overline{\mathscr{C}}$, т. е. $\bar{c}$ — собственное подмножество в $\mathscr{G}$ и B собственное подмножество в $C_1 = \bar{c}$. Требуется доказать, что C_1 есть поле Ω-подгруппоида в $\mathscr{G}$. $\overline{\mathscr{C}}$ — Ω-фактороид на $\mathscr{G}$, итак, для $\bar{c}_h = \bar{c}_k = \bar{c}$ содержится в $\overline{\mathscr{C}}$ элемент $\bar{a}$, подчиняющийся соотношению

$$\bar{c}_h + \bar{c}_k \subset \bar{a}, \tag{3.1.}$$

и далее для $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \ldots = \bar{c}_n = \bar{c}$ и любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ содержится в $\overline{\mathscr{C}}$ элемент $\bar{b}$, для которого имеет место отношение

$$\bar{c}_1\bar{c}_2 \ldots \bar{c}_n\omega \subset \bar{b} \tag{3.2.}$$

По предположениям и ввиду V.1.1. имеет место:

$$B + B \subset B \subset \bar{c} \text{ и} \tag{3.3.}$$

$B_1B_2 \ldots B_n\omega \subset B \subset \bar{c}$, причем

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_n = B,\ \omega \in \Omega \tag{3.4.}$$

В силу (3.1.) и (3.3.) очевидно, что $\bar{a} \cap \bar{c} \neq \emptyset$ и то же самое справедливо ввиду (3.2.) и (3.4.) для элементов $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Итак, по определению разбиения имеет место $\bar{a} = \bar{c}$ и $\bar{b} = \bar{c}$ и ввиду V.1.1., (3.1.) и (3.2.), является $C_1 = \bar{c}$ полем Ω-подгруппоида $\mathscr{C}_1$ в $\mathscr{G}$.

V.3.5. Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ на Ω-группоиду $\mathscr{G}$ простой тогда и только тогда, когда для всякого Ω-фактороида $\overline{\mathscr{C}}$, который является покрытием $\overline{\mathscr{A}}$ в силе или

a) $\overline{\mathscr{C}} = \overline{\mathscr{G}}_{\max}$, т. е. $\overline{\mathscr{C}}$ — наибольший Ω-фактороид на $\mathscr{G}$ или

b) $\overline{\mathscr{C}} = \overline{\mathscr{A}}$.

Доказательство. В силу D.3.2. и V.3.2. Ω-фактороид $\overline{\mathscr{A}}$ простой тогда и только тогда, когда кроме $\overline{\overline{\mathscr{A}}}_{\max}$ и $\overline{\overline{\mathscr{A}}}_{\min}$, нет на $\overline{\mathscr{A}}$ других Ω-фактороидов, причем для всякого Ω-фактороида $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ на $\overline{\mathscr{A}}$ в силе или

a) $\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \overline{\overline{\mathscr{A}}}_{\max}$ или

b) $\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \overline{\overline{\mathscr{A}}}_{\min}$. Принимая во внимание что всякий Ω-фактороид $\overline{\overline{\mathscr{A}}}$ на $\overline{\mathscr{A}}$ вынуждает какое-нибудь покрытие $\overline{\mathscr{C}}$ Ω-фактороида $\overline{\mathscr{A}}$, имеем в случае

a) $\overline{\mathscr{C}} = \overline{\mathscr{G}}_{\max}$, в случае b) $\overline{\mathscr{C}} = \overline{\mathscr{A}}$.

4. Цепи Ω-фактороидов

D.4.1. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть α — натуральное число. Цепью Ω-фактороидов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ называем конечную последовательность α Ω-факторoидов $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2, \ldots, \mathscr{K}_\alpha$ в $\mathscr{G}$, обладающую следующими свойствами:

a) $\mathscr{K}_1$ является Ω-факторoидом на $\mathscr{A}$,

b) для $1 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$ $\mathscr{K}_{\gamma+1}$ есть Ω-факторoид на каком-нибудь элементе в $\mathscr{K}_\gamma$,

c) $\mathscr{B} \in \mathscr{K}_\alpha$.

Цепь обозначаем символом $[\mathscr{K}] = \mathscr{K}_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_\alpha$, сокращенно $[\mathscr{K}]$.

D.4.2. Пусть $[\mathscr{K}] = \mathscr{K}_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_\alpha$ — цепь от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Пусть $\mathscr{A} = \langle A, +, \Omega \rangle$, $\mathscr{B} = \langle B, +, \Omega \rangle$ и пусть K_i — поле Ω-факторoида $\mathscr{K}_i$, для $i = 1, 2, \ldots, \alpha$.

a) Ω-факторoид $\mathscr{K}_1$ называем начальным членом цепи, Ω-факторoид $\mathscr{K}_\alpha$ концевым членом цепи $[\mathscr{K}]$.

b) Длиной цепи $[\mathscr{K}]$ называем число α ее членов.

c) Обозначим для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ множество $s\bar{K}_\gamma$ символом K_γ, т. е. $K_\gamma = s\bar{K}_\gamma$, причем $K_1 = A$ и положим $K_{\alpha+1} = B$. Если $\bar{K}_\gamma$ не наибольшее разбиение на K_γ, т. е. $K_{\gamma+1}$ является собственным подмножеством в K_γ, то говорим, что Ω-факторoид $\mathscr{K}_\gamma$ является существенным членом цепи $[\mathscr{K}]$. В обратном случае называем $\mathscr{K}_\gamma$ несущественным членом цепи $[\mathscr{K}]$.

d) Число α' существенных членов цепи $[\mathscr{K}]$ называем укороченной длиной цепи.

e) Если цепь $[\mathscr{K}]$ содержит хотя бы один несущественный член, то говорим, что $[\mathscr{K}]$ — цепь с повторением, в обратном случае $[\mathscr{K}]$ — цепь без повторения.

V.4.1. Для укороченной длины α' цепи $[\mathscr{K}]$ от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ с длиной α, справедливо: $0 \leqq \alpha' \leqq \alpha$.

Доказательство очевидно.

Замечания.

4.1. Равенство $\alpha' = \alpha$ характеризует цепь без повторения, равенство $\alpha' = 0$ имеет место в случае $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, когда все члены цепи несущественные.

4.2. Всякую цепь с повторением, можно выпущением всех ее несущественных членов укоротить и обратно: всякую цепь можно продолжить.

D.4.3. Пусть $\bar{\mathscr{A}}$ — Ω-факторoид, $\mathscr{B} \in \bar{\mathscr{A}}$ — Ω-подгруппоид в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Обозначим $s\bar{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$. Элементарной цепью Ω-факторoидов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ над Ω-факторoидом $\bar{\mathscr{A}}$, короче элементарной цепью над $\bar{\mathscr{A}}$, называем цепь Ω-факторoидов $[\mathscr{K}] = \mathscr{K}_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_\alpha$, обладающую следующим свойством: для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ член $\mathscr{K}_\gamma$ является покрытием Ω-факторoида $\mathscr{A}_\gamma = \bar{\mathscr{A}} \sqcap \mathscr{K}_\gamma$ причем $\mathscr{K}_\gamma = s\mathscr{K}_\gamma$, $\mathscr{K}_1 = \mathscr{A}$.

D.4.4. Пусть $\mathscr{A} = s\bar{\mathscr{A}}$, $\mathscr{B}$ — Ω-подгруппоиды, $\bar{\mathscr{A}}$ — Ω-факторoид в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть $[\mathscr{K}] = \mathscr{K}_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_\alpha$ — элементарная цепь от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ над $\bar{\mathscr{A}}$. Пусть $\beta (1 \leqq \beta \leqq \alpha)$ — целое число. Пусть справедливо:

a) $\bar{\mathscr{K}}_1 = \bar{\mathscr{K}}_2 = \ldots = \bar{\mathscr{K}}_{\beta-1}$ наибольший Ω-факторoид $\mathscr{A}_{\max}$ на $\mathscr{A}$,

b) $\mathcal{K}_\beta$ — покрытие Ω-фактороида $\bar{\mathcal{A}}$, содержащее $\mathcal{B}$ в качестве элемента,

c) $\mathcal{K}_{\beta+1} = \ldots = \mathcal{K}_\alpha$ — наибольший Ω-фактороид $\mathcal{B}_{\max}$ на $\mathcal{B}$.

Тогда говорим, что $[\mathcal{K}]$ элементарная цепь (β). Если в частности $\mathcal{K}_\beta = \bar{\mathcal{A}}$, называем $[\mathcal{K}]$ крупной элементарной цепью типа (β) от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$ над $\bar{\mathcal{A}}$, короче крупной элементарной цепью (β) над $\bar{\mathcal{A}}$. Если $\beta = 1$, то читаем в определении только b) и c), для $\beta = \alpha$, читаем только a) и b).

Замечания.

4.3. Если цепь $[\mathcal{K}]$ от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$ над $\bar{\mathcal{A}}$ образована только одним своим членом $\mathcal{K}_1 = \bar{\mathcal{A}}$, то $[\mathcal{K}]$ является крупной элементарной цепью от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$ с длиной 1. Пишем $[\mathcal{K}] = \{\bar{\mathcal{A}}\}$.

4.4. Если заменить Ω-фактороид $\bar{\mathcal{A}}$ крупной элементанрой цепью (β) от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$ над $\bar{\mathcal{A}}$ с длиной α и если $\mathcal{B} \in \bar{\mathcal{A}}$, то получим тот же самый результат, как и при построении элементарной цепи $[\mathcal{K}] = \mathcal{K}_1 \to \ldots \to \mathcal{K}_\alpha$, в которой $\mathcal{K}_1 = \ldots = \mathcal{K}_{\beta-1} = \mathcal{A}_{\max}$, $\mathcal{K}_\beta = \bar{\mathcal{A}}$, $\mathcal{K}_{\beta+1} = \ldots = \mathcal{K}_\beta = \mathcal{B}_{\max}$.

V.4.2. Пусть $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathcal{G}$. $[\mathcal{K}]$ есть a) цепь, b) элементарная цепь, c) элементарная цепь (β), d) крупная элементарная цепь (β) Ω-фактороидов от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$ в Ω-группоиду $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $[\mathcal{K}]$ является a) цепью, b) элементарной цепью, c) элементарной цепью (β), d) крупной элементарной цепью (β) фактор-алгебр от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$ в $\mathcal{G}$, считаем ли $\mathcal{G}$ универсальной алгеброй.

Доказательство. В силу V.2.1., D.4.1., D.4.3., D.4.4. [3]D1/7, [3]D2/7, [3]D3/7 теорема справедлива.

V.4.3. Пусть $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\max}$ и $[\mathcal{K}]$ — элементарная цепь от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$ над $\bar{\mathcal{A}}$ с длиной α. Тогда $[\mathcal{K}]$ является крупной элементарной цепью (β) над $\bar{\mathcal{A}}$ для всех β, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теорем V.4.2. и [3]V1/7.

V.4.4. Пусть $[\mathcal{K}] = \mathcal{K}_1 \to \ldots \to \mathcal{K}_\alpha$ — цепь от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$, пусть $\mathcal{A} = \mathcal{K}_1 = \ldots = \mathcal{K}_\alpha = \mathcal{B}$. Тогда $[\mathcal{K}]$ — крупная элементарная цепь (β) над $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\max}$ для всех β, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$.

Доказательство. Так как $\mathcal{K}_1$ — Ω-фактороид на Ω-группоиду $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_2 \in \mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2 = \mathcal{A}$, то должно быть выполнено $\mathcal{K}_1 = \mathcal{A}_{\max}$. Аналогично можно показать, что $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = \ldots = \mathcal{K}_\alpha = \mathcal{A}_{\max}$. Притом для всех β, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$, справедливо $\mathcal{K}_\beta \geqq \mathcal{A}_{\max} \sqcap \mathcal{K}_\beta$. Ввиду того $[\mathcal{K}]$ — элементарная цепь над $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\max}$ и в силу V.4.3. $[\mathcal{K}]$ является крупной элементарной цепью (β) над $\bar{\mathcal{A}}$.

V.4.5. Пусть $[\mathcal{K}^\circ]$ — элементарная цепь от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$ над $\bar{\mathcal{A}}$. Цепи $[\mathcal{K}] = \{\bar{\mathcal{A}}\}$ и $[\mathcal{K}^\circ]$ являются цепями одинаковой укороченной длины тогда и только тогда, когда $[\mathcal{K}^\circ]$ — элементарная цепь (β) над $\bar{\mathcal{A}}$, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теорем V.4.2. и [3]V4/7.

V.4.6. Пусть $\mathscr{B}$ — Ω-подгруппоид в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть $\bar{\mathscr{B}}$ — элемент Ω-фактороида $\bar{\mathscr{A}}$ в $\mathscr{G}$. Пусть $[\bar{\mathscr{K}}]$ — элементарная цепь от $\mathscr{A} = s\bar{\mathscr{A}}$ до $\mathscr{B}$ над $\bar{\mathscr{A}}$. $[\bar{\mathscr{K}}]$ является элементарной цепью (β) над $\bar{\mathscr{A}}$ тогда и только тогда, когда Ω-факторoид $\bar{\mathscr{A}}$ простой относительно $\mathscr{B}$.

Доказательство. Ввиду V.4.2., V.3.1. и [3]V5/7 теорема справедлива.

D.4.5. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть $[\bar{\mathscr{K}}] = \bar{\mathscr{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}_\alpha$ — цепь Ω-факторoидов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ и $[\bar{\mathscr{L}}] = \bar{\mathscr{L}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}_\beta$ — цепь от $\mathscr{C}$ до $\mathscr{D}$. Цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ и $[\bar{\mathscr{L}}]$ называем сопряженными, если в силе следующее:

a) существует взаимно однозначное отображение членов цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ на члены цепи $[\bar{\mathscr{L}}]$, обладаюеще следующим свойством: если Ω-факторoид $\bar{\mathscr{L}}_\delta$ является образом Ω-факторoида $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$ в отображении φ, то $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$ и $\bar{\mathscr{L}}_\delta$ — сопряженные Ω-факторoиды,

b) $s\bar{\mathscr{K}}_{\gamma+1} \cap s\bar{\mathscr{L}}_{\delta+1} \neq \emptyset$ при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$, $s\bar{\mathscr{K}}_{\alpha+1} = \mathscr{B}$, $s\bar{\mathscr{L}}_{\beta+1} = \mathscr{D}$.

D.4.6. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть $[\bar{\mathscr{K}}] = \bar{\mathscr{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}_\alpha$ — цепь Ω-факторoидов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$. Пусть член $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$ цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$, при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, простой относительно $s\bar{\mathscr{K}}_{\gamma+1} = \mathscr{K}_{\gamma+1}$, $\mathscr{K}_{\alpha+1} = \mathscr{B}$. Говорим, что цепь $[\bar{\mathscr{K}}]$ относительно простая. Если всякий Ω-факторoид $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$ цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ простой, то цепь $[\bar{\mathscr{K}}]$ называется простой.

D.4.7. Пусть $[\bar{\mathscr{K}}] = \bar{\mathscr{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}_\alpha$ — цепь Ω-факторoидов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Уплотнением цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ называем цепь $[\bar{\mathscr{K}}^\circ]$ от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, $[\bar{\mathscr{K}}^\circ] = \bar{\mathscr{K}}^\circ_{1,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{1,\beta_1-1} \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{1,\beta_1} \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{2,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{2,\beta_2-1} \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{2,\beta_2} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{\alpha,\beta_\alpha}$, обладающую следующим свойством: для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ является частичная цепь $[\bar{\mathscr{K}}^\circ_\gamma] = \bar{\mathscr{K}}^\circ_{\gamma,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{\gamma,\beta_\gamma}$ элементарной цепью от $\mathscr{K}_\gamma$ до $\mathscr{K}_{\gamma+1}$ над $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\alpha$ — натуральные числа.

Замечания.

4.5. Уплотнение цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ можно получить, если заменить всякий член $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$ цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$, при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, элементарной цепью от $\mathscr{K}_\gamma$ до $\mathscr{K}_{\gamma+1}$ над $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$.

4.6. Укороченная длина уплотнения $[\bar{\mathscr{K}}^\circ]$ цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ равна сумме укороченных длин отдельных частичных цепей. Эта укороченная длина по крайней мере равна укороченной длине цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ ([1]2.5.).

V.4.7. У всех уплотнений $[\bar{\mathscr{K}}^\circ]$ цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ одинаковы укороченные длины тогда и только тогда, если цепь $[\bar{\mathscr{K}}]$ относительно простая.

Доказательство. Утверждение справедливо ввиду V.4.2., D.4.6., [3]V.1/9 и [3]D.1/9.

D.4.8. Пусть $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Пусть $[\bar{\mathscr{K}}] = \bar{\mathscr{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}_\alpha$ — цепь Ω-фактороидов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, $[\bar{\mathscr{L}}] = \bar{\mathscr{L}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}_\beta$ — цепь от $\mathscr{C}$ до $\mathscr{D}$. Цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$ и $[\bar{\mathscr{L}}]$ называем присоединенными, если в силе:

a) $\mathscr{A} = \mathscr{C}$, $\mathscr{B} = \mathscr{D}$,

b) каждые два члена $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$, $\bar{\mathscr{L}}_\delta$ являются присоединенными Ω-фактороидами относительно $s\bar{\mathscr{K}}_{\gamma+1}$, $s\bar{\mathscr{L}}_{\delta+1}$ для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$ причем $s\bar{\mathscr{K}}_{\alpha+1} = \mathscr{B}$, $s\bar{\mathscr{L}}_{\delta+1} = \mathscr{D}$.

V.4.8. Каждые две присоединенные цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$, $[\bar{\mathscr{L}}]$ Ω-фактороидов в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ обладают сопряженными уплотнениями $[\bar{\mathscr{K}}^\circ]$, $[\bar{\mathscr{L}}^\circ]$ с той же длиной. Эти уплотнения определены конструкцией, описанной в доказательстве теоремы.

Доказательство. Пусть $[\bar{\mathscr{K}}] = \bar{\mathscr{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}_\alpha$ — любая цепь Ω-фактороидов в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, $[\bar{\mathscr{L}}] = \bar{\mathscr{L}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}_\beta$ — любая цепь Ω-фактороидов от $\mathscr{C}$ до $\mathscr{D}$. По предположениям теоремы и ввиду D.4.8. имеет место $\mathscr{A} = \mathscr{C}$, $\mathscr{B} = \mathscr{D}$. Обозначим $s\bar{\mathscr{L}}_\nu = \mathscr{L}_\nu$ и $s\bar{\mathscr{K}}_\mu = \mathscr{K}_\mu$ при $\nu = 1, 2, \ldots, \beta + 1$, $\mu = 1, 2, \ldots, \alpha + 1$ и рассмотрим оболочки $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\nu} = \mathscr{L}_\nu \sqsubset \bar{\mathscr{K}}_\gamma$, $\bar{\mathscr{L}}_{\delta,\mu} = \mathscr{K}_\mu \sqsubset \bar{\mathscr{L}}_\delta$. Ввиду теоремы V.2.4., $\mathscr{L}_\nu$ и $\mathscr{K}_\mu$ есть Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ и ввиду V.2.6. $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\nu}$ и $\bar{\mathscr{L}}_{\delta,\mu}$ есть Ω-фактороиды в $\mathscr{G}$. Справедливо: $\mathscr{K}_1 = \mathscr{L}_1 = \mathscr{A}$, $\mathscr{K}_{\alpha+1} = \mathscr{L}_{\beta+1} = \mathscr{D}$ и далее

$$\begin{aligned}
\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,1} &= \mathscr{L}_1 \sqsubset \bar{\mathscr{K}}_\gamma = \mathscr{K}_1 \sqsubset \bar{\mathscr{K}}_\gamma = \bar{\mathscr{K}}_\gamma, \\
\bar{\mathscr{L}}_{\delta,1} &= \mathscr{K}_1 \sqsubset \bar{\mathscr{L}}_\delta = \mathscr{L}_1 \sqsubset \bar{\mathscr{L}}_\delta = \bar{\mathscr{L}}_\delta, \\
\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\beta+1} &= s(\mathscr{L}_{\beta+1} \sqsubset \bar{\mathscr{K}}_\gamma) = s(\mathscr{K}_{\alpha+1} \sqsubset \bar{\mathscr{K}}_\gamma) = \mathscr{K}_{\gamma+1}, \\
\bar{\mathscr{L}}_{\delta,\alpha+1} &= s(\mathscr{K}_{\alpha+1} \sqsubset \bar{\mathscr{L}}_\delta) = s(\mathscr{L}_{\beta+1} \sqsubset \bar{\mathscr{L}}_\delta) = \mathscr{L}_{\delta+1}.
\end{aligned}$$

Ввиду теоремы V.2.11. отсюда следует что существуют сопряженные Ω-фактороиды $\bar{\mathscr{K}}^\circ_{\gamma,\delta}$ и $\bar{\mathscr{L}}^\circ_{\delta,\gamma}$, которые являются покрытиями Ω-фактороидов $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\delta}$ и $\bar{\mathscr{L}}_{\delta,\gamma}$, такие, что $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\delta+1} \in \bar{\mathscr{K}}^\circ_{\gamma,\delta}$, $\bar{\mathscr{L}}_{\delta,\gamma+1} \in \bar{\mathscr{L}}^\circ_{\delta,\gamma}$, причем $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\delta+1}$ и $\bar{\mathscr{L}}_{\delta,\gamma+1}$ инцидентны. При $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$ Ω-фактороид $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\delta} = \mathscr{L}_\delta \sqsubset \bar{\mathscr{K}}_\gamma$ образован элементами $\bar{a} \in \bar{\mathscr{K}}_\gamma$, пересекающимися с $\mathscr{L}_\delta$ и потому $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\delta} \subset \bar{\mathscr{K}}_\gamma$. Ω-фактороид $\bar{\mathscr{A}}_{\gamma,\delta} = \mathscr{K}_{\gamma,\delta} \sqsubset \bar{\mathscr{K}}_\gamma$ образован всеми непустыми пересечениями элементов $\bar{a}_\gamma \in \bar{\mathscr{K}}_\gamma$ с Ω-подгруппоидом $\mathscr{K}_{\gamma,\delta}$. Так как $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\delta} \subset \bar{\mathscr{K}}_\gamma$, является $\bar{\mathscr{A}}_{\gamma,\delta} = \bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\delta}$ и Ω-фактороид $\bar{\mathscr{K}}^\circ_{\gamma,\delta}$, который является покрытием Ω-фактороида $\bar{\mathscr{K}}_{\gamma,\delta}$, будет покрытием тоже $\bar{\mathscr{A}}_{\gamma,\delta}$. Ввиду предыдущего приходим к элементарной цепи

$\bar{\mathscr{K}}^\circ_{\gamma,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{\gamma,\beta}$ от $\mathscr{K}_\gamma$ до $\mathscr{K}_{\gamma+1}$ над $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$ и к $\bar{\mathscr{L}}^\circ_{\delta,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}^\circ_{\delta,\alpha}$ элементарной цепи от $\mathscr{L}_\delta$ до $\mathscr{L}_{\delta+1}$ над $\bar{\mathscr{L}}_\delta$, при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$, и следующие цепи $[\bar{\mathscr{K}}^\circ]$ и $[\bar{\mathscr{L}}^\circ]$ являются уплотнениями цепей $[\bar{\mathscr{K}}]$ и $[\bar{\mathscr{L}}]$.

$$\begin{aligned}
[\bar{\mathscr{K}}^\circ] &= \bar{\mathscr{K}}^\circ_{1,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{1,\beta} \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{2,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{2,\beta} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{\alpha,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}^\circ_{\alpha,\beta}, \\
[\bar{\mathscr{L}}^\circ] &= \bar{\mathscr{L}}^\circ_{1,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}^\circ_{1,\alpha} \to \bar{\mathscr{L}}^\circ_{2,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}^\circ_{2,\alpha} \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}^\circ_{\beta,1} \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}^\circ_{\beta,\alpha}.
\end{aligned}$$

Цепи $[\bar{\mathscr{K}}^\circ]$ и $[\bar{\mathscr{L}}^\circ]$ очевидной той же длины $\alpha\beta$. Требуется доказать, что цепи $[\bar{\mathscr{K}}^\circ]$ и $[\bar{\mathscr{L}}^\circ]$ сопряженные. Обозначим через φ отображение членов цепи $[\bar{\mathscr{K}}^\circ]$

на члены цепи $[\mathscr{L}^\circ]$, такое, что выполнено равенство $\varphi\mathscr{K}^\circ_{\gamma,\delta} = \mathscr{L}^\circ_{\delta,\gamma}$. Отображение φ очевидно взаимно однозначное отображение и соответствующие Ω-фактороиды $\mathscr{K}^\circ_{\gamma,\delta}$ и $\mathscr{L}^\circ_{\delta,\gamma}$ сопряженные. Ω-группоиды $\mathscr{K}_{\gamma,\delta+1}$ и $\mathscr{L}_{\delta,\gamma+1}$ пересекаются, т. е. $\mathscr{K}_{\gamma,\delta+1} \cap \mathscr{L}_{\delta,\gamma+1} \neq \emptyset$. Ввиду D.4.5. цепи $[\mathscr{K}^\circ]$ и $[\mathscr{L}^\circ]$ сопряженные.

D.4.9. Пусть $[\bar{\mathscr{K}}]$ — относительно простая цепь без повторения от Ω-подгруппоида $\mathscr{A}$ до Ω-подгруппоида $\mathscr{B}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Тогда говорим, что $[\mathscr{K}]$ композиционная цепь Ω-подгруппоида $\mathscr{A}$ относительно $\mathscr{B}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$.

V.4.9. Пусть $[\bar{\mathscr{K}}]$ — цепь без повторения от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Всякое уплотнение $[\mathscr{K}^\circ]$ цепи $[\bar{\mathscr{K}}]$, является ее продолжением тогда и только тогда, когда $[\bar{\mathscr{K}}]$ относительно простая.

Доказательство. В силу V.3.1., D.4.6. и [3]V.5/10 теорема справедлива.

V.4.10. Пусть $[\bar{\mathscr{K}}] = \bar{\mathscr{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}_\alpha$ — композиционная цепь Ω — подгруппоида $\mathscr{A}$ относительно $\mathscr{B}$. Тогда Ω-подгруппоид $\mathscr{K}_{\gamma+1}$ является собственным Ω-подгруппоидом в Ω-группоиду $\mathscr{K}_\gamma$, т. е. $\mathscr{K}_{\gamma+1} \neq \mathscr{K}_\gamma$ при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\mathscr{K}_{\alpha+1} = \mathscr{B}$ и имеет место соотношение $\mathscr{A} = \mathscr{K}_1 \supset \mathscr{K}_2 \supset \ldots \supset \mathscr{K}_\alpha \supset \mathscr{B}$.

Доказательство. Так как всякий член цепи $[\mathscr{K}]$ существенный, есть ввиду D.4.2. $\mathscr{K}_{\gamma+1} \subset \mathscr{K}_\gamma$, $\mathscr{K}_{\gamma+1} \neq \mathscr{K}_\gamma$, для $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$. $\mathscr{K}_\gamma$ является ввиду V.2.4. Ω-подгруппоидом в $\mathscr{G}$, при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, итак утверждение справедливо.

5. Изоморфное отображение Ω-группоидов

D.5.1. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ и $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega \rangle$ — Ω-группоиды. Говорим, что Ω-группоиды $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}^*$ того же самого типа, если существует взаимно однозначное отображение h системы операций Ω на систему операций Ω^*, обладающее следующим свойством: если $\omega^* = h\omega$, $\omega \in \Omega$, $\omega^* \in \Omega^*$, то операции ω и ω^* одинакового типа n.

Замечание. Ω-группоиды $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ и $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega^* \rangle$ одинакового типа являются универсальными алгебрами того же типа.

Условие. Далее мы будем рассматривать только Ω-группоиды с тем же множеством мультиоператоров Ω.

D.5.2. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ и $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega \rangle$ — Ω-группоиды, пусть существует отображение φ поля G Ω-группоида $\mathscr{G}$ в (на) поле G^* Ω-группоида $\mathscr{G}^*$, обладающее следующим свойством: для всякой пары (a_h, a_k) элементов a_h, a_k из $\mathscr{G}$ в определенном порядке имеет место

$$\varphi(a_h + a_k) = (\varphi a_h) + (\varphi a_k) \tag{5.1.}$$

и для любой n-членной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементов из $\mathscr{G}$ и всякой n-арной операции ω из Ω в силе

$$\varphi(a_1 a_2 \ldots a_n \omega) = (\varphi a_1)(\varphi a_2) \ldots (\varphi a_n)\, \omega. \tag{5.2.}$$

Отображение φ называем гомоморфным отображением Ω-группоида $\mathscr{G}$ в (на) Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ или деформацией $\mathscr{G}$ в (на) $\mathscr{G}^*$.

D.5.3. Пусть φ — гомоморфное отображение Ω-группоида $\mathscr{G}$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^*$. Тогда говорим, что Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ гомоморфен Ω-группоиду $\mathscr{G}$ и что φ есть гомоморфизм Ω-группоида $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^*$.

D.5.4. Пусть ψ – взаимно однозначное отображение поля G Ω-группоида $\mathscr{G}$ в (на) поле G^* Ω-группоида $\mathscr{G}^*$. Пусть ψ — гомоморфизм $\mathscr{G}$ в (на) $\mathscr{G}^*$. Тогда его называем изоморфизмом Ω-группоида $\mathscr{G}$ в (на) Ω-группоид $\mathscr{G}^*$. Если ψ изоморфизм $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^*$, то говорим, что Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ является изоморфным образом Ω-группоида $\mathscr{G}$ или просто, что Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ изоморфен Ω-группоиду $\mathscr{G}$.

Замечание. Отображение φ Ω-группоида $\mathscr{G}$ в (на) Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ является гомоморфизмом (изоморфизмом) тогда и только тогда, если φ есть гомоморфизм (изоморфизм) $\mathscr{G}$ в (на) $\mathscr{G}^*$, считая $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}^*$ универсальными алгебрами с системой операций $\Omega' = \Omega \cup \{+\}$.

D.5.5. Пусть φ — отображение Ω-группоида $\mathscr{G}$ в Ω-группоид $\mathscr{G}^*$. φ определяет отображение $\bar{\varphi}$ систем M всех подмножеств Ω-группоида $\mathscr{G}$ в систему M^* всех подмножеств Ω-группоида $\mathscr{G}^*$, обладающее следующим свойством: для любого $A \neq \emptyset$, $A \in M$ является его образом $\bar{\varphi}A \subset \mathscr{G}^*$, множество всех тех элементов a^* из $\mathscr{G}^*$ выполняющих соотношение $a^* = \varphi a$, причем $a \in A$. Кроме того определим $\bar{\varphi}\emptyset = \emptyset$. Говорим, что $\bar{\varphi}$ есть расширенное отображение.

V.5.1. Пусть φ — гомоморфное отображение Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ в Ω-группоид $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega\rangle$. Пусть $\{A_1, A_2, \ldots\}$ — система подмножеств в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть ω — любая n-арная операция из Ω. Тогда для расширенного отображения справедливо:

$$\bar{\varphi}(A_h + A_k) = \bar{\varphi}A_h + \bar{\varphi}A_k \tag{5.3.}$$

$$\bar{\varphi}(A_1 A_2 \ldots A_n \omega) = (\bar{\varphi}A_1)(\bar{\varphi}A_2)\ldots(\bar{\varphi}A_n)\,\omega \tag{5.4.}$$

Если $A_h + A_k \subset A'$ и $A_1 A_2 \ldots A_n \omega \subset A$, то

$$\bar{\varphi}A_h + \bar{\varphi}A_k \subset \bar{\varphi}A' \tag{5.5.}$$

$$(\bar{\varphi}A_1)(\bar{\varphi}A_2)\ldots(\bar{\varphi}A_n)\,\omega \subset \bar{\varphi}A. \tag{5.6.}$$

Доказательство. φ является гомоморфным отображением универсальной алгебры $\mathscr{G} = \langle G, \Omega'\rangle$ в $\mathscr{G}^* = \langle G^*, \Omega'\rangle$, $\Omega' = \Omega \cup \{+\}$. Ввиду [3]V.1/3 для любой n-арной операции ω' из Ω' справедливо:

$$\bar{\varphi}(A_1 A_2 \ldots A_n \omega') = (\bar{\varphi}A_1)(\bar{\varphi}A_2)\ldots(\bar{\varphi}A_n)\,\omega'$$

и имеют место соотношения (5.3.) и (5.4.). Далее для $A_1 A_2 \ldots A_n \omega' \subset A$ имеет место $(\bar{\varphi}A_1)(\bar{\varphi}A_2)\ldots(\bar{\varphi}A_n)\,\omega' \subset \bar{\varphi}A$ и справедливы соотношения (5.5.) и (5.6.).

Условие. Поскольку обеспечено, что не дойдет к недоразумению, постольку будем обозначать расширенное гомоморфное отображение $\bar{\varphi}$, определенное гомоморфрным отображением φ, просто только φ.

V.5.2. Пусть φ — гомоморфное отображение Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ в Ω-группоид $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega \rangle$. Пусть $\mathscr{A}$ — Ω-подгруппоид в $\mathscr{G}$. Тогда образ $\varphi\mathscr{A}$ Ω-подгруппоида $\mathscr{A}$ при расширенном отображении φ является Ω-подгруппоидом в $\mathscr{G}^*$.

Доказательство. Пусть $A_i = A$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, где A является полем Ω-подгруппоида $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$. В силу теоремы V.5.1. из соотношений $A + A \subset A$ и $A_1 A_2 \ldots A_n \omega \subset A$ вытекают для расширенного отбражения соотношения $\varphi A + \varphi A \subset \varphi A$ и $(\varphi A_1)(\varphi A_2) \ldots (\varphi A_n)\, \omega \subset \varphi A$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть имеется гомоморфное отображение φ Ω-группоида $\mathscr{G}$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^*$. Это отображение, в качестве отображения множества G на множество G^*, определяет разбиение $\bar{D}$ поля G соответствующее отображению φ ([1].6.5.).

D.5.6. Разбиение $\bar{D}$, всякий элемент $\bar{a}$ которого состоит из всех первообразов того же элемента $a^* \in \mathscr{G}^*$ при гомоморфном отображении φ, называется разбиением соответствующим гомоморфному отображению φ или деформационным разбиением относительно φ.

V.5.3. Пусть φ — гомоморфное отображение Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega \rangle$. Разбиение $\bar{D}$ поля G, соответствующее гомоморфизму φ, есть образующее.

Доказательство. Пусть $(\bar{a}_h, \bar{a}_k)$ — любая пара элементов из $\bar{D}$ в определенном порядке, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ — любая последовательность n элементов из $\bar{D}$ и пусть ω — n-арная операция из Ω. Каждый элемент $\bar{a}_i \in \bar{D}$, при $i = 1, 2, \ldots, n, h, k$, является множеством всех элементов a_i из $\mathscr{G}$, отображающихся в гомоморфизме φ на тот же элемент $a^* \in \mathscr{G}^*$, т. е. $a_i \in \bar{a}_i \langle = \rangle\ \varphi a_i = a_i^*$ при $i = 1, 2, \ldots, n, h, k$. Если $a' \in \bar{a}_h + \bar{a}_k$, то $a' = a_h + a_k$, $\varphi a' = \varphi(a_h + a_k) = \varphi a_h + \varphi a_k = a_h^* + a_k^* = a^*$, т. е. элемент a' является элементом некоторого класса $\bar{a}'$ разбиения $\bar{D}$ и справедливо: $\bar{a}_h + \bar{a}_k \subset \bar{a}' \in \bar{D}$. Если $a \in \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega$, то $a = a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, $\varphi a = \varphi(a_1 a_2 \ldots a_n \omega) = (\varphi a_1)(\varphi a_2) \ldots (\varphi a_n)\, \omega = a_1^* a_2^* \ldots a_n^* \omega = a^* \in \mathscr{G}^*$, т. е. элемент a является элементом некоторого класса $\bar{a}$ разбиения $\bar{D}$ и справедливо: $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega \subset \bar{a}$. Ввиду того, разбиение $\bar{D}$ есть образующее.

D.5.7. Пусть $\bar{D}$ — деформационное разбиение, определенное в предыдущей теореме. Ω-фактороид $\mathscr{D}$ на Ω-группоиду $\mathscr{G}$, соответствующий разбиению $\bar{D}$, называем деформационным Ω-фактороидом или Ω-фактороидом, соответствующим гомоморфизму φ.

Замечание. Пусть φ — изоморфизм Ω-группоида $\mathscr{G}$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^*$, пусть $\bar{D}$ — разбиение, соответствующее φ. Тогда это разбиение является наименьшим разбиением $\bar{D}_{\min}$ на Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Это значит, $\bar{D}$ является полем наименьшего Ω-фактороида $\bar{\mathscr{D}}_{\min}$ на Ω-группоиду $\mathscr{G}$.

V.5.4. Пусть существует отображение φ поля $\mathscr{G}$ Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ на множество G^*. Пусть разбиение $\bar{D}$ на G, соответствующее отображению φ, образующее. Тогда можно в G^* определить сложение и множество мультиоператоров Ω так, что G^* будет полем Ω-группоида $\mathscr{G}^*$ и φ гомоморфизмом Ω-группоида $\mathscr{G}$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^*$.

Доказательство. Пусть (a_h, a_k) — любая пара элементов из $\mathscr{G}$ в определенном порядке, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательность n элементов из $\mathscr{G}$, ω — любая n-арная операция из Ω. Пусть $\bar{a}_i \in \bar{D}$, $a_i^* \in G^*$ при $i = 1, 2, \ldots, n, h, k$ и пусть справедливо: $a_i \in \bar{a}_i \langle = \rangle \varphi a_i = a_i^*$. Тогда имеет место:

$$a' = a_h + a_k \in \bar{a}_h + \bar{a}_k \subset \bar{a}' \in \bar{D},$$
$$a = a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega \subset \bar{a} \in \bar{D}.$$

Отсюда следует, что существуют элементы a'^* и a^*, выполняющие равенства $\varphi a' = a'^*$ и $\varphi a = a^*$. Если определить $a_h^* + a_k^* = a'^*$, $a_1^* a_2^* \ldots a_n^* \omega = a^*$, то G^* является полем Ω-группоида и для отображения φ справедливо: $\varphi a_h + \varphi a_k = a_h^* + a_k^* = a'^* = \varphi a' = \varphi(a_h + a_k)$, $(\varphi a_1)(\varphi a_2) \ldots (\varphi a_n)\,\omega = a_1^* a_2^* \ldots a_n^* \omega = a^* = \varphi a = \varphi(a_1 a_2 \ldots a_n \omega)$.

V.5.5. Пусть ψ — взаимно однозначное отображение поля G Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ на множество G^*. Тогда можно в G^* определить сложение и множество мультиоператоров Ω так, что G^* будет полем Ω-группоида $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega\rangle$ и ψ изоморфизмом $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^*$.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы V.5.4.

V.5.6. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ — Ω-группоид, пусть $\mathscr{G}^*$ — группоид и пусть φ — изоморфизм аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}$ на группоид $\mathscr{G}^*$. Тогда можно в $\mathscr{G}^*$ определить множество мультиоператоров Ω так, что $\mathscr{G}^*$ является Ω-группоидом и φ будет изоморфизмом Ω-группоида $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega\rangle$.

Доказательство. φ есть взаимно однозначное отображение G на G^*. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любая последовательность n элементов из $\mathscr{G}$, пусть $\omega \in \Omega$ и $\varphi a_i = a_i^* \in \mathscr{G}^*$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как φ изоморфизм аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}$ на группоид $\mathscr{G}^*$, справедливо для любой пары (a_h, a_k) элементов из $\mathscr{G}$ в определенном порядке соотношение: $\varphi(a_h + a_k) = \varphi a_h + \varphi a_k$. Определим на $\mathscr{G}^*$ систему операций Ω, пологая: $a^* = a_1^* a_2^* \ldots a_n^* \omega$ для $a^* = \varphi a$ и $a_i^* = \varphi a_i$, причем $a = a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В силу предположений теоремы элемент a^* определен элементами $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*$ однозначно. Справедливо, что $\varphi a = a^* = a_1^* a_2^* a_n^* \ldots a_n^* \omega = (\varphi a_1)(\varphi a_2) \ldots (\varphi a_n)\,\omega$, что и требовалось доказать.

V.5.7. Пусть существует гомоморфизм φ группоида $\mathscr{G}$ на аддитивный группоид Ω-группоида $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega\rangle$. Пусть $\overline{\mathscr{G}}$ — фактороид на группоиду $\mathscr{G}$, соответствующий гомоморфизму φ. Тогда можно в $\overline{\mathscr{G}}$ определить множество мультиоператоров так, что фактороид $\overline{\mathscr{G}}$ является аддитивным группоидом Ω-группоида $\overline{\mathscr{G}} = \langle \overline{G}, \oplus, \Omega\rangle$ и Ω-группоид $\overline{\mathscr{G}}$ изоморфен Ω-группоиду $\mathscr{G}^*$.

Доказательство. Разбиение $\overline{G}$ на группоиду $\mathscr{G}$, соответствующее гомоморфизму φ является образующим разбиением на $\mathscr{G}$ и существует изоморфизм ψ аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}^*$ на фактороид $\overline{\mathscr{G}}$ ([1]16.1.1.). В силу теоремы V.5.6. теорема справедлива.

V.5.8. Пусть $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ — Ω-группоид, обладающий нулевым элементом 0, пусть φ — гомоморфизм Ω-группоида $\mathscr{G}$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega\rangle$. Тогда также Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ обладает нулевым элементом 0^* и справедливо $0^* = \varphi 0$.

Доказательство. Ввиду D.1.2. 0 является нулевым элементом аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}$. Пусть 0^* — образ элемента 0 при гомоморфизме φ. Тогда в силу [1]18.7.4. 0^* является нулевым элементом аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}^*$ и ввиду (1.1.) будет $0^* = \varphi 0 = \varphi(00 \dots 0\omega) = (\varphi 0)(\varphi 0) \dots (\varphi 0)\,\omega = 0^* 0^* \dots 0^*\omega$, что и требовалось доказать.

V.5.9. Пусть существует гомоморфизм φ Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega\rangle$. Пусть в $\mathscr{G}^*$ существует нулевой элемент 0^*. Тогда подмножество $A \subset \mathscr{G}$ всех элементов a из $\mathscr{G}$, удовлетворяющих равенству $\varphi a = 0^*$ будет полем Ω-подгруппоида $\mathscr{A}$ в $\mathscr{G}$. Поле A этого ω-подгруппоида будет нулевым элементом Ω-фактороида $\overline{\mathscr{D}} = \langle \overline{D}, \oplus, \Omega\rangle$ соответствующего гомоморфизму φ.

Доказательство. A — множество тех элементов $a \in \mathscr{G}$, удовлетсовряющих равенству $\varphi a = 0^*$. Предположим, что $a_i \in A_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$, пологая $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$. Всякий элемент $a' \in A + A$ будет элементом вида $a' = a_h + a_k$, причем $a_h \in A$, $a_k \in A$ и имеет место $\varphi a' = \varphi(a_h + a_k) = \varphi a_h + \varphi a_k = 0^* + 0^* = 0^*$, т. е. $a' \in A$. Ввиду того есть

$$A + A \subset A. \tag{5.7.}$$

Всякий элемент $a \in A_1 A_2 \dots A_n\omega$, $\omega \in \Omega$, будет элементом вида $a = a_1 a_2 \dots a_n\omega$, где $a_i \in A_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$ и имеет место равенство $\varphi a = \varphi(a_1 a_2 \dots a_n\omega) = (\varphi a_1)(\varphi a_2) \dots (\varphi a_n)\,\omega = 0^*0^* \dots 0^*\omega = 0^*$, в силу которого a является элементом A. Ввиду того для $i = 1, 2, \dots, n$ справедливо:

$$A_1 A_2 \dots A_n\omega \subset A,\ A_i = A. \tag{5.8.}$$

Принимая во внимание (5.7.), (5.8.) и V.1.1., видим, что A является полем Ω-подгруппоида в $\mathscr{G}$. По предположениям теоремы можно утверждать, что

$A = \bar{a}$ является элементом Ω-фактороида $\bar{\mathscr{D}} = \langle \bar{D}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$, соответствующего гомоморфизму φ. Пусть $\bar{b} \in \bar{\mathscr{D}}$, $\bar{b} \neq \bar{a}$. $\bar{b}$ является множеством всех элементов $b \in \mathscr{G}$, отображающихся при отображении φ в определенный элемент $b^* \in \mathscr{G}^*$, $b^* \neq 0^*$. Элемент $b + a$ содержится в классе $\bar{b} + \bar{a}$ и имеет место равенство $\varphi(b + a) = \varphi b + \varphi a = b^* + 0^* = b^*$. Это значит, что $b + a$ является первообразом элемента b^* при φ. Поэтому $b + a \in \bar{b}$ и так $\bar{b} + \bar{a} \subset \bar{b}$. Ввиду D.2.2. для всякого элемента $\bar{b} \in \bar{\mathscr{D}}$, $\bar{b} \neq \bar{a}$ в силе равенство

$$\bar{b} \oplus \bar{a} = \bar{b}. \tag{5.9.}$$

Аналогично для всякого элемента $\bar{b} \in \bar{\mathscr{D}}$ имеет место

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \bar{b}. \tag{5.10.}$$

Ввиду [1]18.4. $\bar{a}$ является нулевым элементом аддитивного группоида Ω-фактороида $\bar{\mathscr{D}}$. Так как A является полем Ω-подгруппоида в $\mathscr{G}$, то для всякой операции $\omega \in \Omega$, справедливо: $A_1 A_2 \ldots A_n \omega \subset A$, при $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A = \bar{a}$, т. е. $\underbrace{\bar{a}\bar{a} \ldots \bar{a}}_{n \text{ раз}}\omega = \bar{a}$, $\omega \in \Omega$. Ввиду D.1.2. $\bar{a}$ есть нулевой элемент Ω-фактороида $\bar{\mathscr{D}} = \langle \bar{D}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$.

V.5.10. Пусть имеется гомоморфизм φ Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^* = \langle G^*, +, \Omega \rangle$. Тогда Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ изоморфен Ω-фактороиду $\bar{\mathscr{D}}$ на $\mathscr{G}$, соответствующему гомоморфизму φ.

Доказательство. Поле $\bar{D}$ Ω-фактороида $\bar{\mathscr{D}}$ на $\mathscr{G}$ есть ввиду D.5.7. и V.5.3. образующим деформационным разбиением. По [1]16.1. существует изоморфизм ψ фактороида аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}$, т. е. аддитивного группоида Ω-фактороида $\bar{\mathscr{D}}$ на адитивный группоид Ω-группоида $\mathscr{G}^*$, обладающий свойством: $\psi\bar{a} = \varphi a = a^*$, для всякого элемента $\bar{a}$ из $\bar{\mathscr{D}}$ и $a \in \bar{a}$. Требуется доказать, что это отображение соблюдает тоже все n-арные операции $\omega \in \Omega$. Так как φ — гомоморфизм $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^*$, справедливо для всякой последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n элементов из $\mathscr{G}$ и всякой n-арной операции ω из Ω следующее: $a^* = \varphi a = \varphi(a_1 a_2 \ldots a_n \omega) = (\varphi a_1)(\varphi a_2) \ldots (\varphi a_n)\,\omega = a_1^* a_2^* \ldots a_n^* \omega$, $a_1 a_2 \ldots a_n \omega = a$, причем $a_i^* = \varphi a_i$ является при $i = 1, 2, \ldots, n$ элементом из $\mathscr{G}^*$. Пусть $a_i \in \bar{a}_i$, $\bar{a}_i \in \bar{\mathscr{D}}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\psi\bar{a}_i = \varphi a_i = a_i^*$ и имеет место соотношение: $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega \subset \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \bar{\omega} \in \bar{\mathscr{D}}$. В силу того

$$\varphi(a_1 a_2 \ldots a_n \omega) = \psi(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega)$$

и имеет место: $\psi(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega) = \varphi(a_1 a_2 \ldots a_n \omega) = (\varphi a_1)(\varphi a_2) \ldots (\varphi a_n)\,\omega = (\psi\bar{a}_1)(\psi\bar{a}_2) \ldots (\psi\bar{a}_n)\,\omega$.

V.5.11. Пусть существует изоморфное отображение Ω-фактороида $\bar{\mathscr{G}} = \langle \bar{G}, \oplus, \Omega \rangle$ Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega \rangle$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^* = \langle G^*, + \Omega \rangle$. Тогда Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ гомоморфен Ω-группоиду $\mathscr{G}$.

Доказательство. Пусть $\bar{G}$ является полем Ω-фактороида $\bar{\mathscr{G}}$ на Ω-группоиду $\mathscr{G}$, пусть ψ — изоморфизм $\mathscr{G}^*$ на $\bar{\mathscr{G}}$. Отображение ψ является изоморфизмом аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}^*$ на фактороид аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}$ и ввиду [1]16.1.1. существует гомоморфизм φ аддитивного группоида Ω-группоида $\mathscr{G}$ на аддитивный группоид Ω-группоида $\mathscr{G}^*$. Всем элементам a из $\mathscr{G}$, выпольняющим соотношение: $a \in \bar{a} \in \bar{\mathscr{G}}$ соответствует при отображении φ тот же элемент $a^* \in \mathscr{G}^*$, удовлетворяющий равенству $\psi a^* = \bar{a}$, т. е. $\psi^{-1}\bar{a} = \varphi a$. Надо доказать, что φ — гомоморфное отображение Ω-группоида $\mathscr{G}$ на Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ в смысле D.5.2. Пусть ω — любая n-арная операция из Ω, $\bar{\omega}$ — соответствующая ей операция из $\bar{\Omega}$, пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ — любая последовательность n элементов из $G(\bar{G})$, $a_i \in \bar{a}_i$, при $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда справедливо: $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \in \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega \subset \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \bar{\omega} \in \bar{\mathscr{G}}$. Это значит, что

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 a_2 \ldots a_n \omega) &= \psi^{-1}(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \bar{\omega}) = \\ &= (\psi^{-1}\bar{a}_1)(\psi^{-1}\bar{a}_2) \ldots (\psi^{-1}\bar{a}_n)\, \omega = (\varphi a_1)(\varphi a_2) \ldots (\varphi a_n)\, \omega \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Совмещением теорем V.5.11. и V.5.10. является так называемая первая теорема об изоморфизме V.5.12.

V.5.12. Если Ω-группоид $\mathscr{G}^*$ является гомоморфным образом Ω-группоида $\mathscr{G}$. тогда он является изоморфным образом какого-нибудь Ω-фактороида $\bar{\mathscr{G}}$ на $\mathscr{G}$, Если $\mathscr{G}^*$ — изоморфный образ какого-нибудь Ω-фактороида $\bar{\mathscr{G}}$ на $\mathscr{G}$-группоиду $\mathscr{G}$, то он является гомоморфным образом Ω-группоида $\mathscr{G}$.

V.5.13. Вторая теорема об изоморфизме.

Каждые два сопраженных Ω-фактороида $\bar{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$, $\bar{\mathscr{B}} = \langle \bar{B}, \oplus, \bar{\Omega} \rangle$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ изоморфны, причем изоморфизм определен инцидентностью элементов.

Доказательство. По предположению теоремы всякий элемент Ω-фактороида $\bar{\mathscr{A}}$ пересекается с одним и только с одним элементом из $\bar{\mathscr{B}}$ и одновременно всякий элемент из $\bar{\mathscr{B}}$ пересекается с одним и только с одним элементом из $\bar{\mathscr{A}}$. Если всякому элементу $\bar{a} \in \bar{\mathscr{A}}$ поставить в соответствие тот элемент $\bar{b} \in \bar{\mathscr{B}}$, который с ним пересекается, то получим взаимно однозначное отображение φ Ω-фактороида $\bar{\mathscr{A}}$ на Ω-фактороид $\bar{\mathscr{B}}$. Пусть $(\bar{a}_h, \bar{a}_k)$ — любая пара элементов в определенном порядке, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любая последовательность n элементов из $\bar{\mathscr{A}}$, ω — любая n-арная операция из Ω, $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$. Пусть $\bar{b}_i$, для $i = 1, 2, \ldots, n, h, k$, тот элемент из $\bar{\mathscr{B}}$, который пересекается с элементом $\bar{a}_i$, т. е. $\bar{b}_i = \varphi \bar{a}_i$. Пологая $\bar{x}_i = \bar{a}_i \cap \bar{b}_i$, получим следующие соотношения:

$$\bar{x}_h + \bar{x}_k \subset \bar{a}_h + \bar{a}_k \subset \bar{a}_h \oplus \bar{a}_k, \quad \bar{x}_h + \bar{x}_k \subset \bar{b}_h + \bar{b}_k \subset \bar{b}_h \oplus \bar{b}_k \tag{5.11.}$$

причем $\bar{a}_h \oplus \bar{a}_k \in \bar{\mathscr{A}}$, $\bar{b}_h \oplus \bar{b}_k \in \bar{\mathscr{B}}$ и далее

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \omega \subset \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega \subset \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \bar{\omega} \\ &\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \omega \subset \bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n \omega \subset \bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n \bar{\omega}, \end{aligned} \tag{5.12.}$$

причем $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n\omega \in \bar{\mathscr{A}}$, $\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n\omega \in \bar{\mathscr{B}}$. Ввиду (5.11.) справедливо:

$$\bar{x}_h + \bar{x}_k \subset (\bar{a}_h \oplus \bar{a}_k) \cap (\bar{b}_h \oplus \bar{b}_k)$$

итак элемент $\bar{a}_h \oplus \bar{a}_k$ пересекается с элементом $\bar{b}_h \oplus \bar{b}_k$, т. е. справедливо соотношение: $\varphi\bar{a}_h \oplus \varphi\bar{a}_k = \bar{b}_h \oplus \bar{b}_k = \varphi(\bar{a}_h \oplus \bar{a}_k)$. Аналогично ввиду (5.12.) имеет место: $\bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n\omega \subset \bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n\omega \cap \bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n\bar{\omega}$ и можно утверждать, что $(\varphi\bar{a}_1)(\varphi\bar{a}_2) \ldots (\varphi\bar{a}_n)\,\omega = \bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n\bar{\omega} = \varphi(\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n\bar{\omega})$. Поэтому будет φ изоморфным отображением $\bar{\mathscr{A}}$ на $\bar{\mathscr{B}}$.

V.5.14. Пусть $\mathscr{C} = \langle C, +, \Omega\rangle$ — Ω-подгруппоид, $\bar{\mathscr{G}} = \langle \bar{G}, \oplus, \bar{\Omega}\rangle$ Ω-фактороид в Ω-группоиду $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$. Пусть имеет место соотношение $C \cap s\bar{G} \neq \emptyset$. Тогда оболочка $\mathscr{C} \sqsubset \bar{\mathscr{G}}$ и сечение $\mathscr{C} \sqcap \bar{\mathscr{G}}$ изоморфны и изоморфизм определен инцидентностью элементов.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы V.5.13. так как $\mathscr{C} \sqcap \bar{\mathscr{G}}$ и $\mathscr{C} \sqsubset \bar{\mathscr{G}}$ сопраженные Ω-фактороиды.

V.5.15. Третья теорема об изоморфизме.
Любой Ω-фактороид $\bar{\bar{\mathscr{B}}} = \langle \bar{\bar{B}}, \oplus, \bar{\bar{\Omega}}\rangle$ на каком-нибудь Ω-фактороиду $\bar{\mathscr{B}} = \langle \bar{B}, \oplus, \Omega\rangle$ Ω-группоида $\mathscr{G} = \langle G, +, \Omega\rangle$ и покрытие $\bar{\mathscr{A}} = \langle \bar{A}, \oplus, \bar{\Omega}\rangle$ Ω-факторооида $\bar{\mathscr{B}}$, вынужденное Ω-фактороидом $\bar{\bar{\mathscr{B}}}$, изоморфны. При этом изоморфизме всякий элемент $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{\mathscr{B}}}$ отображается на тот элемент $\bar{a}$ из $\bar{\mathscr{A}}$, который является суммой всех элементов Ω-фактороида $\bar{\mathscr{B}}$, содержащихся в $\bar{\bar{b}}$.

Доказательство. Всякий элемент Ω-фактороида $\bar{\mathscr{A}}$ является суммой всех элементов Ω-фактороида $\bar{\mathscr{B}}$, содержащихся в том же элементе Ω-фактороида $\bar{\bar{\mathscr{B}}}$. Если к каждому элементу $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{\mathscr{B}}}$ присоединить тот элемент $\bar{a} \in \bar{\mathscr{A}}$, который явдяется суммой всех элементов из $\bar{\mathscr{B}}$, содержащихся в элементе $\bar{\bar{b}}$, то получим взаимно однозначное отображение ψ Ω-фактороида $\bar{\bar{\mathscr{B}}}$ на Ω-фактороид $\bar{\mathscr{A}}$.

$$\psi\bar{\bar{b}} = \bar{a} \langle = \rangle\, \bar{a} = \cup\, \bar{b}, \qquad \bar{b} \in \bar{\bar{b}} \tag{5.13.}$$

Пусть $(\bar{\bar{b}}_h, \bar{\bar{b}}_k)$ — любая пара элементов в определенном порядке, $\bar{\bar{b}}_1, \bar{\bar{b}}_2, \ldots, \bar{\bar{b}}_n$ — любая последовательность n элементов из $\bar{\bar{\mathscr{B}}}$, $\bar{\bar{\omega}} \in \bar{\bar{\Omega}}$, пусть

$$\bar{\bar{b}}_h \oplus \bar{\bar{b}}_k = \bar{\bar{b}}' \tag{5.14.}$$

$$\bar{\bar{b}}_1\bar{\bar{b}}_2 \ldots \bar{\bar{b}}_n\bar{\bar{\omega}} = \bar{\bar{b}} \tag{5.15.}$$

Для всякого элемента $\bar{b}_i$ из $\bar{\mathscr{B}}$ содержащегося в $\bar{\bar{b}}_i$, для $i = 1, 2, \ldots, n, h, k$ и всякой n-арной операции ω из $\bar{\Omega}$ в силе

$$\bar{b}_h \oplus \bar{b}_k \subseteq \bar{\bar{b}}', \tag{5.16.}$$

$$\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n\omega \in \bar{\bar{b}}. \tag{5.17.}$$

Пусть $\bar{a}_i$ тот элемент покрытия $\bar{\mathscr{A}}$, который есть суммой всех элементов $\bar{b}_i \in \bar{\mathscr{B}}$, содержащихся в $\bar{\bar{b}}_i$, т. е.

$$\bar{a}_i = \cup\, \bar{b}_i, \qquad \bar{b}_i \in \bar{\bar{b}}_i, \qquad \text{т. е.} \quad \psi\bar{\bar{b}}_i = \bar{a}_i \tag{5.18.}$$

Пусть аналогично в силе:

$$\bar{a}' = \cup \bar{b}', \quad \bar{b}' \in \bar{\bar{b}}', \quad \text{т. е.} \quad \psi\bar{\bar{b}}' = \bar{a}' \tag{5.19.}$$

$$\bar{a} = \cup \bar{b}, \quad \bar{b} \in \bar{\bar{b}}, \quad \text{т. е.} \quad \psi\bar{\bar{b}} = \bar{a} \tag{5.20.}$$

Ввиду (5.16.) и (5.19.) имеем

$$\bar{b}_h \oplus \bar{b}_k \subset \bar{a}' \tag{5.21.}$$

и ввиду (5.17.) и (5.20.) будет

$$\bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n \omega \subset \bar{a}. \tag{5.22.}$$

Далее справедливо:

$$\bar{a}_h + \bar{a}_k = \cup(\bar{b}_h + \bar{b}_k) \subset \cup (\bar{b}_h \oplus \bar{b}_k) \subset \bar{a}' \tag{5.23.}$$

$$\text{и } \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega = \cup (\bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n \omega) \subset \cup (\bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots \bar{b}_n \omega) \subset \bar{a} \tag{5.24.}$$

Очевидно, что $\bar{a}'(\bar{a})$ будет элементом Ω-фактороида $\mathscr{A}$, содержащим элемент $\bar{a}_h + \bar{a}_k$ $(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega)$, итак имеем

$$\bar{a}_h \oplus \bar{a}_k = \bar{a}' \tag{5.25.}$$

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n \omega = \bar{a} \tag{5.26.}$$

Ввиду (5.18.), (5.19.) и (5.20.) можно соотношения (5.25.) и (5.26.) представить в виде

$$\psi\bar{\bar{b}}_h \oplus \psi\bar{\bar{b}}_k = \psi\bar{\bar{b}}' \tag{5.27.}$$

$$(\psi\bar{\bar{b}}_1)(\psi\bar{\bar{b}}_2) \ldots (\psi\bar{\bar{b}}_n)\,\omega = \psi\bar{\bar{b}} \tag{5.28.}$$

По (5.27.), (5.28.) и ввиду того, что ψ взаимно однозначное отображение $\mathscr{B}$ на $\mathscr{A}$, теорема справедлива.

D.5.8. Пусть $[\mathscr{K}] = \bar{\mathscr{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{K}}_\alpha$ — цепь Ω-фактороидов от $\mathscr{A}$ до $\mathscr{B}$, $[\mathscr{L}] = \bar{\mathscr{L}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathscr{L}}_\beta$ — цепь Ω-фактороидов от $\mathscr{C}$ до $\mathscr{D}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \supset \mathscr{D}$ — Ω-подгруппоиды в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Пусть существует взаимно однозначное отображение φ членов цепи $[\mathscr{K}]$ на члены цепи $[\mathscr{L}]$, обладающее следующим свойством:

a) если Ω-фактороид $\bar{\mathscr{L}}_\delta$ есть образом Ω-фактороида $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$ при отображении φ, то существует изоморфное отображение φ_γ Ω-фактороида $\bar{\mathscr{K}}_\gamma$ на Ω-фактороид $\bar{\mathscr{L}}_\delta$ и

b) образом элемента $\mathscr{K}_{\gamma+1} = s\bar{\mathscr{K}}_{\gamma+1} \in \bar{\mathscr{K}}_\gamma$ при изоморфизме φ_γ есть элемент $\mathscr{L}_{\delta+1} = s\bar{\mathscr{L}}_{\delta+1} \in \bar{\mathscr{L}}_\delta$, т. е. $\varphi_\gamma \mathscr{K}_{\gamma+1} = \mathscr{L}_{\delta+1}$ при $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\delta = 1, 2, \ldots, \beta$, $s\bar{\mathscr{K}}_{\alpha+1} = \mathscr{B}$ и $s\bar{\mathscr{L}}_{\beta+1} = \mathscr{D}$.

Отображение φ называется сильным отображением $[\mathscr{K}]$ на $[\mathscr{L}]$ и говорим, что цепи $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ изоморфны.

V.5.16. Две изоморфных цепи $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ Ω-фактороидов в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ обладают той же длиной.

Доказательство очевидно.

V.5.17. Изоморфные цепи $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$, с длиной $\alpha \geqq 1$, обладают той же укороченной длиной и укороченные цепи изоморфны.

Доказательство. Ввиду V.5.16. цепи $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ обладают той же длиной $\alpha \geqq 1$. Всякому несущественному члену цепи $[\mathscr{K}]$ при сильном отображении соответствует несущественный член цепи $[\mathscr{L}]$. Если $\alpha > 1$, то, выпуская соответствующие несущественные члены, получим цепи вез повторения, которые также изоморфны и обладают той же длиной α'. α' является укороченной длиной цепей $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$.

V.5.18. Пусть $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ сопряженные цепи Ω-фактороидов в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Тогда существует сильное отображение φ цепи $[\mathscr{K}]$ на $[\mathscr{L}]$, причем изоморфизм соответствующих членов при сильном отображении φ определен инцидентностью элементов.

Доказательство. Цепи $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ есть сопряженные, т. е. существует взаимно однозначное отображение φ, членов цепи $[\mathscr{K}]$ на члены цепи $[\mathscr{L}]$, обладающее следующим свойством: если $\mathscr{L}_\delta = \varphi \mathscr{K}_\gamma$, то $\mathscr{K}_\gamma$ и $\mathscr{L}_\delta$ сопряженные Ω-фактороиды. Ввиду V.5.13. существует изоморфизм φ_γ Ω-фактороида $\mathscr{K}_\gamma$ на Ω-фактороид $\mathscr{L}_\delta$, и он определен инцидентностью элементов. Так как $\mathscr{K}_{\gamma+1}$ является элементом в $\mathscr{K}_\gamma$, $\mathscr{L}_{\delta+1}$ – элементом в $\mathscr{L}_\delta$ и $\mathscr{K}_{\gamma+1} \cap \mathscr{L}_{\delta+1} \neq \emptyset$, должно быть $\varphi_\gamma \mathscr{K}_{\gamma+1} = \mathscr{L}_{\delta+1}$ и ввиду D.5.8. φ является сильным отображением цепи $[\mathscr{K}]$ на $[\mathscr{L}]$.

V.5.19. Обобщенная теорема Шрейера
Всякие две присоединенных цепи $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ Ω-факторoидов в Ω-группоиду $\mathscr{G}$ обладают изоморфными уплотнениями $[\mathscr{K}^\circ]$ и $[\mathscr{L}^\circ]$. При том Ω-фактороиды, соответствующие друг другу при сильном отображении φ, изоморфны.

Доказательство. Ввиду V.4.8. существуют сопряженные уплотнения $[\mathscr{K}^\circ]$, $[\mathscr{L}^\circ]$, обладающие той же длиной, цепей $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$. В силу V.5.18. существует сильное отображение цепи $[\mathscr{K}^\circ]$ на $[\mathscr{L}^\circ]$, итак цепи $[\mathscr{K}^\circ]$ и $[\mathscr{L}^\circ]$ изоморфны. В силу последнего определения это значит, что Ω-фактороиды $\mathscr{K}^\circ_\gamma$ и $\mathscr{L}^\circ_\delta$, $\mathscr{L}^\circ_\delta = \varphi \mathscr{K}^\circ_\gamma$, изоморфны и изоморфизм φ_γ определен инцидентностью элементов.

V.5.20. Обобщенная теорема Жордан-Гелдера
Пусть $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ – композиционные и присоединенные цепи Ω-подгруппоида $\mathscr{A}$ относительно Ω-подгруппоида $\mathscr{B}$ в Ω-группоиду $\mathscr{G}$. Тогда $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ изоморфны.

Доказательство. Цепи $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ обладают в силу V.5.19. изоморфными уплотнениями $[\mathscr{K}^\circ]$ и $[\mathscr{L}^\circ]$. Ввиду V.5.17. цепи $[\mathscr{K}^\circ]$ и $[\mathscr{L}^\circ]$ обладают той же укороченной длиной и укороченные цепи изоморфны. Так как $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ композиционные цепи, то ввиду D.4.9. и V.4.9. $[\mathscr{K}]$ является укороченной цепью $[\mathscr{K}^\circ]$ и $[\mathscr{L}]$ укороченной цепью $[\mathscr{L}^\circ]$. В силу того $[\mathscr{K}]$ и $[\mathscr{L}]$ изоморфны.

Библиография

[1] *Borůvka, O.*: Základy teorie grupoidů a grup, ČSAV, Praha 1962.
[2] *Sedláček, L.*: Grupoidy a grupy s operátory, AUPO, T 7 (1961), 33—66.
[3] *Sedláček, L.*: Universální algebry, AUPO, T 15 (1964), 39—68.
[4] *Kuroš, A. G.*: Kapitoly z obecné algebry, ČSAV, Praha 1968, 89—113.
[5] *Курош, А. Г.*: Теория групп, НАУКА, Москва 1967, 90—94, 447—449.
[6] *Кон, П.*: Универсальная алгебра, МИР, Москва 1968, 62—77.

Shrnutí

GRUPOIDY S MULTIOPERÁTORY

Lenka Poncová

Práce je zobecněním teorie grupoidů rozpracované v knize O. Borůvka: „Základy teorie grupoidů a grup" a aplikací teorie univerzálních algeber, zejména výsledků práce L. Sedláček: „Univerzální algebry" na grupoidy.

Článek je rozčleněn do pěti odstavců, v prvním z nichž jsou uvedeny základní vlastnosti Ω-grupoidů. Obsahem dalších odstavců jsou poznatky o vytvořujících rozkladech a faktorových strukturách — Ω-faktoroidech v Ω-grupoidech, o jednoduchých Ω-grupoidech a Ω-faktoroidech, o řetězcích Ω-faktoroidů v Ω-grupoidech a jejich vlastnostech. V posledním odstavci je věnována pozornost homomorfnímu a izomorfnímu zobrazení Ω-grupoidů. Práce si nečiní nárok na úplnost.

Summary

GROUPOIDS WITH MULTIOPERATORS

Lenka Poncová

This paper is a generalization of the theory of groupoids treated in O. Borůvka's "Foundations of the theory of groupoids and groups" and an application of the theory of universal algebras using especially the results of L. Sedláček's work "Universal Algebras" on groupoids.

The article is divided into five sections. Section one introduces the basic properties of Ω-groupoids. Section two gives the outcomes to decompositions and factor structures, Ω-factoroids in Ω-groupoids. Section three is devoted to simple Ω-groupoids and Ω-factoroids. Section four deals with the chains of Ω-factoroids in Ω-groupoids and with their properties. In section five special attention is paid to the homomorphic and isomorphic mappings of Ω-groupoids. This article does not lay any claim for completeness and the findings achieved here can well be applied to groups with multioperators.