1978 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 57

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci

Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

EINE BEMERKUNG ZUM ZUSAMMENHANG DES RANDWERTPROBLEMS MIT BEGLEITENDER GLEICHUNG

JOSEF HOŠEK

(*Eingelangt am 10. März 1977*)

Betrachten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = Q(t)\,y, \tag{Q}$$

wo die Funktion Q im gewissen offenen Interwall j erklärt ist und $Q \in C_j^2$. Es sei für die Gleichung (Q) ein homogenes Randwertproblem gegeben, d. h. wir untersuchen die Existenz einer solcher Lösung $y \in (Q)$, welche die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha y(t_1) + \beta y'(t_1) &= 0, \\ \gamma y(t_2) + \delta y'(t_2) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

erfüllt, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegebene Konstanten und $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, $\gamma^2 + \delta^2 > 0$, gegebene Zahlen $t_i \in j$, $i = 1, 2$, $t_1 < t_2$ sind. Weiter unten wird noch die Forderung gestellt, daß

$$\alpha^2 - \beta^2 Q(t) \neq 0, \quad \gamma^2 - \delta^2 Q(t) \neq 0, \quad (t \in j)$$

gilt.

Die Lösbarkeitsfrage des homogenem Randwertproblems (1) für allgemeinere Sturmsche Gleichung wurde z. B. in [2], Seite 268 behandelt. Ziel dieser Forschung ist es, den Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit des erwähnten Problems und einigen Eigenschaften der begleitenden Gleichungen zu gegebener Gleichung (Q) zu zeigen.

Schreiben wir

$$Q_1(t) = Q(t) + \frac{\alpha\beta Q'(t)}{\alpha^2 - \beta^2 Q(t)} + \sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q(t)|}}\right)'' \qquad (t \in j),$$

so nennen wir die Gleichung

$$y'' = Q_1(t)\,y \tag{Q$_1$}$$

die begleitende Gleichung zur Gleichung (Q) bei der Basis $[\alpha, \beta]$. Die Beziehungen zwischen den Lösungen beider Gleichungen (Q) und (Q_1) wurden in [3], Satz 1 und 2, Seite 50, angeführt. Es gebe noch eine Gleichung

$$y'' = Q_2(t)\, y \tag{Q_2}$$

begleitend zur Gleichung (Q) bei der Basis $[\gamma, \delta]$, d. h.

$$Q_2(t) = Q(t) + \frac{\gamma\delta Q'(t)}{\gamma^2 - \delta^2 Q(t)} + \sqrt{|\gamma^2 - \delta^2 Q(t)|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\gamma^2 - \delta^2 Q(t)|}}\right)'' \qquad (t \in j).$$

Satz 1. *Ist das homogene Randwertproblem* (1) *für die Gleichung* (Q) *lösbar, dann gibt es linear unabhängige Lösungspaare* $U_1, V_1 \in (Q_1)$ *und* $U_2, V_2 \in (Q_2)$ *derart, daß*

$$U_1(t_1)\, V_2(t_2) - V_1(t_1)\, U_2(t_2) = 0 \tag{2}$$

gilt.

Beweis. Nach [2], Satz 2, Seite 268 existieren linear unabhängige Lösungen $u, v \in (Q)$ für die

$$[\alpha u(t_1) + \beta u'(t_1)]\,[\gamma v(t_2) + \delta v'(t_2)] - [\alpha v(t_1) + \beta v'(t_1)]\,[\gamma u(t_2) + \delta u'(t_2)] = 0. \tag{3}$$

Multiplizieren wir die letzte Gleicheit mit

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q(t_1)|}\,\sqrt{|\gamma^2 - \delta^2 Q(t_2)|}} \neq 0,$$

so erhalten wir

$$\frac{\alpha u(t_1) + \beta u'(t_1)}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q(t_1)|}}\,\frac{\gamma v(t_2) + \delta v'(t_2)}{\sqrt{|\gamma^2 - \delta^2 Q(t_2)|}} - \frac{\alpha v(t_1) + \beta v'(t_1)}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q(t_1)|}}\,\frac{\gamma u(t_2) + \delta u'(t_2)}{\sqrt{|\gamma^2 - \delta^2 Q(t_2)|}} = 0. \tag{4}$$

Bezeichnen wir für $t \in j$

$$U_1(t) = \frac{\alpha u(t) + \beta u'(t)}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q(t)|}}, \qquad V_1(t) = \frac{\alpha v(t) + \beta v'(t)}{\sqrt{|\gamma^2 - \delta^2 Q(t)|}}, \tag{5a}$$

$$U_2(t) = \frac{\gamma u(t) + \delta u'(t)}{\sqrt{|\gamma^2 - \delta^2 Q(t)|}}, \qquad V_2(t) = \frac{\gamma v(t) + \delta v'(t)}{\sqrt{|\gamma^2 - \delta^2 Q(t)|}}, \tag{5b}$$

so gilt nach [3], Satz 1 und 2, Seite 50 $U_i \in (Q_i)$, $V_i \in (Q_i)$, $i = 1, 2$. Durch Einsetzen in (4) erhalten wir das geforderte Ergebnis (2). Da u, v linear unabhängige Lösungen der Gleichung (Q) sind, so sind U_i, V_i auch linear unabhängige Lösungen der begleitenden Gleichung (Q_i), $i = 1, 2$, denn es existiert eine lineare Abbildung des Raumes von allen Lösungen der Gleichung (Q) auf den Raum von allen Lösungen der begleitenden Gleichung (Q_i).

Satz 2. *Es seien zwei linear unabhängige Lösungspaare* $U_i, V_i \in (Q_i)$, $i = 1, 2$ *gegeben, welche* (2) *erfüllen. Es existiere ein Lösungspaar* $u, v \in (Q)$ *derart, daß für* *die Lösungen U_i, V_i, $i = 1, 2$ auch (5a), (5b) gelte, wo $t \in j$. Dann ist das homogene Randwertproblem* (1) *für die Gleichung* (Q) *lösbar.*

Beweis. Da u, v linear unabhängige Lösungen der Gleichung (Q) sind, so ist (3) in bezug auf (5a), (5b), (2), (4) erfüllt. Hieraus ergibt sich schon nach [2], Satz 2, Seite 268 die Satzbehaptung.

Wenn wir $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ setzen, so nimmt (1) die Form

$$\alpha y(t_i) + \beta y'(t_i) = 0, \qquad t_i \in j, \ i = 1, 2 \tag{6}$$

und es gilt weiter

$$Q_1(t) = Q_2(t), \qquad U_1(t) = U_2(t), \qquad V_1(t) = V_2(t), \qquad (t \in j).$$

Folgerung. Wenn $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, so ist das homogene Randwertproblem (6) für die Gleichung (Q) genau dann lösbar, falls t_i, $i = 1, 2$ kojugierte Zahlen erster Art der begleitenden Gleichung (Q_1) sind.

Beweis. Nach Satz 1 und 2 existieren linear unabhängige Lösungen U_1, $V_1 \in (Q_1)$ die (2) genau dann befriedigen wenn das homogene Randwertproblem (6) für die Gleichung (Q) lösbar ist. Nach [1], Satz 3.12 ergibt sich, daß t_i, $i = 1, 2$ konjugierte Zahlen sind.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Borůvka O.: *Linear Differential Transformation of the Second Order.* The English Universities Press, London, 1971.

[2] Kamke E.: *Differentialgleichungen reeller Funktionen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.—G., Leipzig, 1952.

[3] Laitoch M.: *L'équation associée dans la théorie des transformations des équations différentielles du second ordre.* Acta Univ. Palackianae Olomucensis, F. R. N., T. 12, 45—62 (1963).

SOUHRN

POZNÁMKA K SOUVISLOSTI OKRAJOVÉHO PROBLÉMU S PRŮVODNÍ ROVNICÍ

JOSEF HOŠEK

V tomto článku se zkoumá souvislost řešitelnosti okrajového homogenního problému diferenciální rovnice 2. řádu

$$y'' = Q(t)\, y \tag{Q}$$

s některými vlastnostmi lineárně nezávislých řešení průvodních rovnic

$$y'' = Q_1(t)\, y,$$
$$y'' = Q_2(t)\, y$$

k rovnici (Q) při bázích $[\alpha, \beta]$ a $[\gamma, \delta]$.

РЕЗЮМЕ

ЗАМЕЧАНИЕ К СВЯЗИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С СОПРОВОДИТЕЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

ИОСИФ ГОШЕК

В настоящей статье исследуется связь решаемости однородной краевой задачи дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' = Q(t)\, y, \tag{Q}$$

с некоторыми свойствами линейно независимых решений сопроводительных уравнений

$$y'' = Q_1(t)\, y$$
$$y'' = Q_2(t)\, y$$

к уравнению (Q) при базисах $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$.