František Machala

Über eine Klasse affiner Klingenbergscher Ebenen, die projektiv erweiterbar sind

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 19 (1980), No. 1, 65--74

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120091`

1980 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 65

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci

Vedoucí katedry: prof. RNDr. Ladislav Sedláček, CSc.

ÜBER EINE KLASSE AFFINER KLINGENBERGSCHER EBENEN, DIE PROJEKTIV ERWEITERBAR SIND

FRANTIŠEK MACHALA

(*Eingelangt am 31. März 1979*)

In [2] wurden Abbildungen η, ω, ψ, φ, ξ in einer AK-Ebene α definiert, wobei bewiesen wurde, daß α projektiv erweiterbar genau dann ist, wenn diese Abbildungen den vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Ist α desarguessch, dann lassen sich ω, ψ, φ, ξ mittels einer einzigen Abbildung η ausdrücken.

In vorliegender Arbeit wird eine Klasse projektiv erweiterbarer AK-Ebenen gefunden, in denen sich ω, ψ, φ, ξ mittels einer einzigen Abbildung ähnlich wie bei den desarguesschen AK-Ebenen erklärt lassen. Diese Klasse wird durch drei geometrische Bedingungen (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) charakterisiert. Zum Schluß wird gezeigt, daß stark n-uniforme affine Hjelmslev – Ebenen mit gleichmäßigem Parallelismus (siehe [1]) den Bedingungen (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) genügen, was bedeutet, daß alle bisher bekannten projektiv erweiterbaren AK-Ebenen der untersuchten Klasse angehören.

I

Definition 1. Eine *projektive Klingenbergsche Ebene* (kurz PK-Ebene) ist ein Tripel $(\pi, \pi', \varkappa)$, wo $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \in)$ eine Inzidenzstruktur, $\pi' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \in)$ eine projektive Ebene und $\varkappa : \pi \to \pi'$ ein Epimorphismus sind, wobei

$$x, y \in \mathscr{P}, x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists\, !P \in \mathscr{L}, x, y \in P, \tag{1}$$

$$P, Q \in \mathscr{L}, P\varkappa \neq Q\varkappa \Rightarrow \exists\, !x \in \mathscr{P}, x \in P, Q. \tag{2}$$

Definition 2. Es sei $\alpha = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \in)$ eine Inzidenzstruktur und sei auf $\mathscr{L}$ eine Äquivalenzrelation $\parallel$ (Parallelität) derart erklärt, daß durch jeden Punkt aus $\mathscr{P}$

eine einzige Gerade aus jeder Äquivalenzklasse von $\|$ geht. Ist $\alpha' = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \in)$ eine affine Ebene und $\varkappa : \alpha \to \alpha'$ ein Epimorphismus, dann $(\alpha, \alpha', \varkappa)$ heißt eine *affine Klingenbergsche Ebene* (kurz AK-Ebene), wenn folgendes gilt:

$$x, y \in \mathscr{P}, x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists\, !P \in \mathscr{L}, x, y \in P, \tag{1}$$

$$P, Q \in \mathscr{L}, P\varkappa \nparallel Q\varkappa \Rightarrow \exists\, !x \in \mathscr{P}, x \in P, Q. \tag{2}$$

Unter einer PK-Ebene bzw. AK-Ebene werden wir oft direkt die Inzidenzstruktur π bzw. α verstehen. Alle Geraden fassen wir als Punktmengen auf und diesem Standpunkt nach, bezeichnen wir die Inzidenz mit $\in$. Die einzige durch die Punkte x, y mit $x\varkappa \neq y\varkappa$ bestimmte Gerade P wird mit $P = xy$ bezeichnet. Sind P, Q die den Bedingungen (2) der Definitionen 1 und 2 genügenden Geraden, dann wird der einzige durch P, Q bestimmte Punkt x mit $x = P \sqcap Q$ bezeichnet. Ist α eine AK-Ebene, dann bezeichnet man mit $L(p, Q)$ die Parallele zu Q durch p. Als Folgerung der Definition 2 erhält man $P \parallel Q \Rightarrow P\varkappa \parallel Q\varkappa$.

Definition 3. Sei $(\alpha, \alpha', \varkappa)$ eine AK-Ebene. Ein Tripel (X, Y, e) heißt ein *Koordinatensystem* von α, falls X, Y Geraden und e ein Punkt aus α mit $X\varkappa \nparallel Y\varkappa$, $e\varkappa \notin X\varkappa$, $Y\varkappa$ sind.

Sei (X, Y, e) ein Koordinatensystem der AK-Ebene $\alpha = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \in)$. Wir schreiben $o = X \sqcap Y$, $E = oe$, $E' = L(e, Y)$, $E'' = L(e, X)$ und $\mathscr{R} = \{x \in \mathscr{P} \mid x \in X\}$, $\mathscr{R}_0 = \{x \in \mathscr{R} \mid x\varkappa = o\varkappa\}$, $\mathscr{L}_1 = \{P \in \mathscr{L} \mid P\varkappa \nparallel Y\varkappa\}$, $\mathscr{L}_2 = \{P \in \mathscr{L} \mid P\varkappa \parallel Y\varkappa\}$. Ferner definieren wir die Abbildungen $\beta : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathscr{P}$, $\gamma_1 : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathscr{L}_1$, $\gamma_2 : \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R} \to \mathscr{L}_2$, wie folgt:

(P) Für beliebige $(x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ setzen wir $w = L(y, Y) \sqcap E$ und $s = L(w, X) \sqcap L(x, Y) = (x, y)^{\beta}$.

(L1) Für beliebige $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ setzen wir $p' = L(m, Y) \sqcap E$, $p = L(p', X) \sqcap E'$, $q' = L(k, Y) \sqcap E$, $q = L(q', X) \sqcap Y$ und $P = L(q, op) = (m, k)^{\gamma_1}$.

(L2) Für beliebige $(m, k) \in \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}$ setzen wir $w = L(m, Y) \sqcap E''$ und $P = L(k, ow) = (m, k)^{\gamma_2}$.

β bzw. γ_1 bzw. γ_2 ist eine bijektive Abbildung von $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ auf $\mathscr{P}$ bzw. von $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ auf $\mathscr{L}_1$ bzw. von $\mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}$ auf $\mathscr{L}_2$ [2]. Im folgenden setzen wir $(x, y)^{\beta} = [x, y]$ $\forall\, (x, y) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, $(m, k)^{\gamma_1} = \langle m, k\rangle\, \forall (m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ und $(m, k)^{\gamma_2} = \langle\langle m, k\rangle\rangle$ $\forall\, (m, k) \in \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}$. Den Vorschriften (L1) und (L2) nach gilt $\langle m_1, k_1\rangle \parallel \langle m_2, k_2\rangle \Leftrightarrow m_1 = m_2$ und $\langle\langle m_1, k_1\rangle\rangle \parallel \langle\langle m_2, k_2\rangle\rangle \Leftrightarrow m_1 = m_2$. Durch Vergleich von (P) und (L2) ergibt sich $[x, y] \in \langle\langle m, k\rangle\rangle \Rightarrow x\varkappa = k\varkappa$. Ferner setzen wir $\mathscr{L}_3 = \{P \in \mathscr{L}_2 \mid P\varkappa = Y\varkappa\}$, $\mathscr{L}_4 = \{P \in \mathscr{L}_1 \mid o\varkappa \in P\varkappa\}$. Dann ist $\langle\langle m, k\rangle\rangle \in \mathscr{L}_3 \Leftrightarrow k \in \mathscr{R}_0$ und $\langle m, k\rangle \in \mathscr{L}_4 \Leftrightarrow k \in \mathscr{R}_0$.

Wir betrachten nachstehende Abbildungen δ, σ, ϱ:

1. Es sei $\delta : \langle m, k\rangle \to \langle k, m\rangle$ für alle $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ gesetzt. Dann ist δ eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{L}_1$ auf sich mit $(P^{\delta})^{\delta} = P\, \forall\, P \in \mathscr{L}_1$. Wir setzen

$\mathscr{L}_1(s) = \{P \in \mathscr{L}_1 \mid s \in P\}$ und $\mathscr{L}_1^\delta(s) = \{P^\delta \mid P \in \mathscr{L}_1(s)\}$ für einen beliebigen Punkt s mit $s\varkappa \in Y\varkappa$. Ist $s = [x, y]$ ein solcher Punkt und $P = \langle m, k\rangle$ eine Gerade von $\mathscr{L}_1(s)$, dann gilt nach (P) $x \in \mathscr{R}_0$ und nach (L1) $y\varkappa = k\varkappa$. Für Geraden $P = \langle m_1, k_1\rangle$ und $Q = \langle m_2, k_2\rangle$ aus $\mathscr{L}_1(s)$ ergibt sich also $k_1\varkappa = k_2\varkappa$ und folglich $P^\delta\varkappa \parallel Q^\delta\varkappa$. Im Falle $s \in Y$ erhält man $P = \langle m, k\rangle \in \mathscr{L}_1(s) \Rightarrow k = y$ und daher $P, Q \in \mathscr{L}_1(s) \Rightarrow \Rightarrow P^\delta \parallel Q^\delta$.

2. Es sei $\sigma : \langle m, k\rangle \to \langle\langle k, m\rangle\rangle$ für alle $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}_0$ gesetzt. So definiertes σ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{L}_4$ auf die Menge $\mathscr{L}_2$. Setzen wir $\mathscr{L}_2(s) = \{P \in \mathscr{L}_4 \mid s \in P\}$ und $\mathscr{L}_2^\sigma(s) = \{P^\sigma \mid P \in \mathscr{L}_2(s)\}$ für einen beliebigen Punkt s mit $s\varkappa = o\varkappa$, dann gilt $P^\sigma\varkappa \parallel Q^\sigma\varkappa \parallel Y\varkappa$ für beliebige Geraden $P, Q \in \mathscr{L}_2(s)$. Im Falle $s \in Y$ gilt speziell $P, Q \in \mathscr{L}_2(s) \Rightarrow P^\sigma \parallel Q^\sigma$.

3. Es sei $\varrho : \langle\langle m, k\rangle\rangle \to \langle\langle k, m\rangle\rangle$ für alle $(m, k) \in \mathscr{R}_0 \times \mathscr{R}_0$ gesetzt. So definiertes ϱ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{L}_3$ auf sich. Wir setzen $\mathscr{L}_3(s) = \{P \in \mathscr{L}_3 \mid s \in P\}$ und $\mathscr{L}_3^\varrho(s) = \{P^\varrho \mid P \in \mathscr{L}_3(s)\}$ für einen beliebigen Punkt s mit $s\varkappa = o\varkappa$.

Mit (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) bezeichnen wir folgende Forderungen:

(P_δ) Ist s ein Punkt mit $s\varkappa \in Y\varkappa$, dann geht durch jeden Punkt von $\mathscr{P}$ genau eine Gerade aus $\mathscr{L}_1^\varrho(s)$.

(P_σ) Ist s ein Punkt mit $s\varkappa = o\varkappa$, dann geht durch jeden Punkt von $\mathscr{P}$ genau eine Gerade aus $\mathscr{L}_2^\sigma(s)$.

(P_ϱ) Ist s ein Punkt mit $s\varkappa = o\varkappa$, dann geht durch jeden Punkt m mit $m\varkappa \in Y\varkappa$ genau eine Gerade aus $\mathscr{L}_3^\varrho(s)$.

II

Sei $(\pi, \pi', \varkappa)$ eine PK-Ebene mit $\pi = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \in)$. Für eine beliebige Gerade U von π definieren wir eine Inzidenzstruktur $\alpha_U = (\mathscr{P}_U, \mathscr{L}_U, \in)$ mit $\mathscr{P}_U = \{x \in \mathscr{P} \mid x\varkappa \notin U\varkappa\}$, $\mathscr{L}_U = \{P \in \mathscr{L} \mid P\varkappa \neq U\varkappa\}$. Die Restriktion $\varkappa'$ des Epimorphismus $\varkappa$ auf α_U ist ein Epimorphismus der Inzidenzstruktur α_U auf die affine Ebene α'_U, die aus der projektiven Ebene π' durch Beseitigung der Geraden $U\varkappa$ entsteht. Zwei Geraden aus α_U heißen parallel genau dann, wenn sie in π einen gemeinsamen Punkt auf U haben. Es ist leicht zu sehen, daß das Tripel $(\alpha_U, \alpha'_U, \varkappa')$ eine AK-Ebene bildet. Im solchen Fall ist α_U in π eingebettet, oder anders gesagt, π ist eine projektive Erweiterung von α_U. Eine AK-Ebene α ist projektiv erweiterbar, falls es eine PK-Ebene gibt, die eine projektive Erweiterung von α ist.

Sei α eine AK-Ebene, (X, Y, e) ein Koordinatensystem von α und $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_0$ die durch (X, Y, e) definierten Mengen. Ferner sei $\mathscr{R}'$ eine Menge mit $\mathscr{R}' \cap \mathscr{R} = \varnothing$. In [2] wurde bewiesen, daß α genau dann projektiv erweiterbar ist, wenn folgende bijektive Abbildungen

$$\eta : \mathscr{R}' \leftrightarrow \mathscr{R}_0,$$

$$\omega(x, k) : \mathscr{R} \leftrightarrow \mathscr{R} \;\forall\, x \in \mathscr{R}' \;\forall\, k \in \mathscr{R},$$

$$\psi(y, k) : \mathscr{R}' \leftrightarrow \mathscr{R}' \;\forall\, y \in \mathscr{R} \;\forall\, k \in \mathscr{R}',$$
$$\varphi(x, m) : \mathscr{R}' \leftrightarrow \mathscr{R}' \;\forall\, x \in \mathscr{R}' \;\forall\, m \in \mathscr{R},$$
$$\xi(y, m) : \mathscr{R}' \leftrightarrow \mathscr{R}' \;\forall\, y \in \mathscr{R}' \;\forall\, m \in \mathscr{R}'$$

existieren, welche die Bedingungen (A1)–(A3) und (B1)–(B8) von [2] befriedigen.

Ist α eine desarguessche AK-Ebene, dann lassen sich die Abbildungen ω, ψ, φ, ξ verlangter Eigenschaften durch eine beliebige bijektive Abbildung von $\mathscr{R}'$ auf $\mathscr{R}_0$ ausdrücken. Im folgenden verwenden wir dieses Verfahren zu einer allgemeinen AK-Ebene α und beweisen, daß auf diese Art konstruierte Abbildungen ω, ψ, φ, ξ genau dann die Bedingungen (A1)–(A3) und (B1)–(B8) befriedigen, wenn die Forderungen (P_δ), (P_σ) und (P_ϱ) in α erfüllt sind.

Es sei also $\alpha = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \in)$ eine AK-Ebene und sei η eine bijektive Abbildung von $\mathscr{R}'$ auf $\mathscr{R}_0$. Wir definieren Abbildungen $\omega(x, k)$, $\psi(y, k)$, $\varphi(x, m)$ und $\xi(y, m)$ folgendermaßen:

$$[x^\eta, m^{\omega(x,k)}] \in \langle k, m\rangle \;\forall\, x \in \mathscr{R}' \;\forall\, m, k \in \mathscr{R},$$
$$[(m^{\psi(y,k)})^\eta, y] \in \langle\langle k^\eta, m^\eta\rangle\rangle \;\forall\, y \in \mathscr{R} \;\forall\, m, k \in \mathscr{R}',$$
$$[x^\eta, (k^{\varphi(x,m)})^\eta] \in \langle m, k^\eta\rangle \;\forall\, x, k \in \mathscr{R}' \;\forall\, m \in \mathscr{R},$$
$$[(k^{\xi(y,m)})^\eta, y^\eta] \in \langle\langle m^\eta, k^\eta\rangle\rangle \;\forall\, y, m, k \in \mathscr{R}'.$$

Ferner werden wir die Abbildungen ω, ψ, φ, ξ stets im eben angeführten Sinn begreifen.

Satz 1. *ω, ψ, φ, ξ sind bijektive Abbildungen, die den Forderungen* (A1)–(A3) *aus* [2] *genügen.*

Beweis. 1. $\omega(x, k)$ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{R}$ auf sich für alle $(x, k) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$, wobei $m\varkappa = (m^{\omega(x,k)})\,\varkappa$ gilt: Es seien $x \in \mathscr{R}'$, $k \in \mathscr{R}$ und $m \in \mathscr{R}$. Setzen wir $P = \langle k, m\rangle$, dann $P\varkappa \nparallel Y\varkappa$ und die Gerade $Q = L(x^\eta, Y)$ schneidet P in genau einem Punkt s. Wegen (P) ist $s = [x^\eta, y]$ und folglich $y = m^{\omega(x,k)}$. Somit ist $\omega(x, k)$ injektiv. Wegen $x^\eta \in \mathscr{R}_0$ gilt $Q\varkappa = Y\varkappa$ und daher $s\varkappa \in Y\varkappa$. Setzen wir $q = P \sqcap Y$, dann ist $s\varkappa = q\varkappa$ und aus (P), (L1) folgt $m\varkappa = y\varkappa$, also $m\varkappa = (m^{\omega(x,k)})\,\varkappa$. $\omega(x, k)$ ist eine Abbildung auf $\mathscr{R}$: Es sei $m' \in \mathscr{R}$. Setzt man $p' = L(k, Y) \sqcap E$ und $p = L(p', X) \sqcap E'$, so läßt sich nach (L1) die Parallele P zu op durch $[x^\eta, m']$ in der Form $P = \langle k, m\rangle$ ausdrücken und somit ist $m' = m^{\omega(x,k)}$.

2. $\psi(y, k)$ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{R}'$ auf sich für alle $(y, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$. Setzt man dabei $o^{\eta^{-1}} = u$, dann gilt $u = u^{\psi(y,u)}$ für alle $y \in \mathscr{R}$: Es seien also $y \in \mathscr{R}$, $k \in \mathscr{R}'$ und $m \in \mathscr{R}'$. Setzen wir $P = \langle\langle k^\eta, m^\eta\rangle\rangle$, dann nach (L2) ist $P\varkappa = Y\varkappa$. Setzen wir weiter $w = E \sqcap L(y, Y)$ und $Q = L(w, X)$, dann P, Q schneiden sich in genau einem Punkt s und nach (P) ist $s = [x, y]$. Wegen $P\varkappa = Y\varkappa$ erhält man $s\varkappa \in Y\varkappa$ und $x\varkappa \in Y\varkappa$, also $x \in \mathscr{R}_0$. Unserer Vorschrift $[(m^{\psi(y,k)})^\eta, y] \in \langle\langle k^\eta, m^\eta\rangle\rangle$ nach ergibt sich $x = (m^{\psi(y,k)})^\eta$ und $x^{\eta^{-1}} = m^{\psi(y,k)} \in \mathscr{R}'$. $\psi(y, k)$ ist also eine injektive Abbildung von $\mathscr{R}'$ in sich. Leicht zeigt man, daß $\psi(y, k)$ eine Abbildung auf $\mathscr{R}'$ ist. Ist in der vorigen Konstruktion $k = m = u$ gesetzt, dann

wegen $k^\eta = m^\eta = u^\eta = o$ ergibt sich $P = Y$, $x = o$ und $m^{\psi(y,k)} = u^{\psi(y,k)} = x^{\eta^{-1}} = o^{\eta^{-1}} = u$.

3. $\varphi(x, m)$ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{R}'$ auf sich für alle $(x, m) \in \mathscr{R}' \times \mathscr{R}$: Es seien $x \in \mathscr{R}'$, $m \in \mathscr{R}$ und $k \in \mathscr{R}'$. Setzen wir $P = \langle m, k^\eta \rangle$, dann ist $P\varkappa \nparallel Y\varkappa$ und P, Y schneiden sich in genau einem Punkt q. Wegen $k^\eta \in \mathscr{R}_0$ gilt nach (L1) $q\varkappa = o\varkappa$. Die Geraden $L(x^\eta, y)$, P schneiden sich in genau einem Punkt $s = [x^\eta, y]$. Wegen $x^\eta \in \mathscr{R}_0$ ist $s\varkappa = q\varkappa = o\varkappa$ und nach (P) ergibt sich daraus $y \in \mathscr{R}_0$. Unserer Vorschrift $[x^\eta, (k^{\varphi(x,m)})^\eta] \in \langle m, k^\eta \rangle$ nach ist $y^{\eta^{-1}} = k^{\varphi(x,m)} \in \mathscr{R}'$. Mithin $\varphi(x, m)$ ist eine injektive Abbildung der Menge $\mathscr{R}'$ in sich. Es läßt sich leicht nachweisen, daß $\varphi(x, m)$ eine Abbildung auf $\mathscr{R}'$ ist.

4. $\xi(y, m)$ ist eine bijektive Abbildung der Menge $\mathscr{R}'$ auf sich, wobei $u = u^{\xi(y,u)}$ für alle $y \in \mathscr{R}'$ gilt: Es seien $y, m, k \in \mathscr{R}'$. Setzen wir $P = \langle\langle m^\eta, k^\eta \rangle\rangle$, dann $P\varkappa = Y\varkappa$. Nach (P) gibt es genau einen Punkt $s \in P$ mit $P = [x, y^\eta]$. Wegen $s\varkappa \in Y\varkappa$ ist $x \in \mathscr{R}_0$ und hieraus folgt $x^{\eta^{-1}} = k^{\xi(y,m)}$. Ist speziell $k = m = u$, so gilt $k^\eta = m^\eta = o$ und folglich $P = Y$, also $x = o$. Somit erhält man $u = k^{\xi(y,u)}$.

Satz 2. *Die Abbildungen* $\omega, \psi, \varphi, \xi$ *befriedigen die Forderungen* (B3)–(B7) *aus* [2].

Beweis. Ad (B3). Es seien $x_1, x_2 \in \mathscr{R}'$ und $y_1, y_2 \in \mathscr{R}$ mit $y_1\varkappa \neq y_2\varkappa$. Setzen wir $s_1 = [x_1^\eta, y_1]$, $s_2 = [x_2^\eta, y_2]$, dann wegen $y_1\varkappa \neq y_2\varkappa$ gilt $s_1\varkappa \neq s_2\varkappa$ und durch die Punkte s_1, s_2 geht genau eine Gerade P. Wegen $x_1^\eta, x_2^\eta \in \mathscr{R}_0$ ist $s_1\varkappa \in Y\varkappa$, $s_2\varkappa \in Y\varkappa$ und folglich $P\varkappa = Y\varkappa$. Nach (L2) gibt es daher $k', m' \in \mathscr{R}_0$ mit $P = \langle\langle k', m' \rangle\rangle$. Zu k' bzw. m' gibt es genau ein Element $k \in \mathscr{R}'$ bzw. $m \in \mathscr{R}'$ mit $k^\eta = k'$ bzw. $m^\eta = m'$. Aus $[x_1^\eta, y_1] \in \langle\langle k^\eta, m^\eta \rangle\rangle$, $[x_2, y_2] \in \langle\langle k^\eta, m^\eta \rangle\rangle$ folgt dann $x_1 = m^{\psi(y_1,k)}$ und $x_2 = m^{\psi(y_2,k)}$.

Ad (B4). Es seien $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathscr{R}$ mit $m_1\varkappa = m_2\varkappa$, $k_1\varkappa \neq k_2\varkappa$. Setzen wir $P_1 = \langle k_1, m_1 \rangle$ und $P_2 = \langle k_2, m_2 \rangle$, dann wegen $k_1\varkappa \neq k_2\varkappa$ ist $P_1\varkappa \nparallel P_2\varkappa$ und P_1, P_2 schneiden sich in genau einem Punkt s. Wegen $m_1\varkappa = m_2\varkappa$ gilt dabei nach (L1) $s\varkappa \in Y\varkappa$. Setzen wir $s = [x', y]$, dann ist $x' \in \mathscr{R}_0$ und es gibt genau ein $x \in \mathscr{R}'$ mit $x' = x^\eta$. Aus $[x^\eta, y] \in \langle k_1, m_1 \rangle$ und $[x^\eta, y] \in \langle k_2, m_2 \rangle$ folgt dann $m_1^{\omega(x,k_1)} = m_2^{\omega(x,k_2)}$. Ist $x = u$, dann gilt $x^\eta = u^\eta = o$ und folglich $s \in Y$, woraus nach (L1) $m_1 = y = m_2$ folgt. Aus $m_1 = m_2$ ergibt sich umgekehrt $s \in Y$ und $x^\eta = o = u^\eta$, also $x = u$.

Ad (B5). Es seien $m_1, k_1 \in \mathscr{R}$ und $m_2, k_2 \in \mathscr{R}'$. Setzen wir $P_1 = \langle k_1, m_1 \rangle$ und $P_2 = \langle\langle k_2^\eta, m_2^\eta \rangle\rangle$, dann wegen $P_1\varkappa \nparallel P_2\varkappa$ gibt es genau einen Punkt $s = [x', y]$ mit $s = P_1 \sqcap P_2$. Da $P_2\varkappa = Y\varkappa$ ist, gilt $s\varkappa \in Y\varkappa$ und daher $x' \in \mathscr{R}_0$. Mithin gibt es genau ein $x \in \mathscr{R}'$ mit $x^\eta = x'$. Wegen $[x^\eta, y] \in \langle k_1, m_1 \rangle$ und $[x^\eta, y] \in \langle\langle k_2^\eta, m_2^\eta \rangle\rangle$ erhält man $y = m_1^{\omega(x,k_1)}$, $x = m_2^{\psi(y,k_2)}$.

Ad (B6). Es seien $m_1 \in \mathscr{R}$ und $m_2, k_1, k_2 \in \mathscr{R}'$. Setzen wir $P_1 = \langle m_1, k_1^\eta \rangle$, $P_2 = \langle\langle m_2^\eta, k_2^\eta \rangle\rangle$, dann ist $P_2\varkappa = Y\varkappa$. Die Geraden P_1 und P_2 schneiden sich in genau einem Punkt $s = [x', y']$. Wegen $k_1^\eta \in \mathscr{R}_0$ ist dabei $s\varkappa = o\varkappa$ und folglich

$x', y' \in \mathscr{R}_0$. Mithin gibt es Elemente $x, y \in \mathscr{R}'$ mit $x^\eta = x'$ und $y^\eta = y'$. Wegen $[x^\eta, y^\eta] \in \langle m_1, k_1^\eta \rangle$ ergibt sich $y = k_1^{\varphi(x, m_1)}$ und aus $[x^\eta, y^\eta] \in \langle\langle m_2^\eta, k_2^\eta \rangle\rangle$ folgt $x = k_2^{\xi(y, m_2)}$.

Ad (B7). Es seien $m_1, m_2 \in \mathscr{R}$ und $k_1, k_2 \in \mathscr{R}'$ mit $m_1 \varkappa \neq m_2 \varkappa$. Setzen wir $P_1 = \langle m_1, k_1^\eta \rangle$, $P_2 = \langle m_2^\eta, k_2^\eta \rangle$, dann wegen $m_1 \varkappa \neq m_2 \varkappa$ ist $P_1 \varkappa \nparallel P_2 \varkappa$ und P_1, P_2 schneiden sich in genau einem Punkt $s = [x', y']$. Wegen $k_1^\eta, k_2^\eta \in \mathscr{R}_0$ gilt nach (L1) $x', y' \in \mathscr{R}_0$ und deswegen gibt es $x, y \in \mathscr{R}'$ mit $x^\eta = x'$, $y^\eta = y'$. Somit erhalten wir $k_1^{\varphi(x, m_1)} = y = k_2^{\varphi(x, m_2)}$.

Satz 3. *Die Abbildungen* $\omega, \psi, \varphi, \xi$ *befriedigen die Forderungen* (B1), (B2) *und* (B8) *genau dann, wenn* (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) *in* α *gelten.*

Beweis. $(P_\delta) \Rightarrow$ (B1). Seien $x_1, y_1, y_2 \in \mathscr{R}$ und $x_2 \in \mathscr{R}'$ gegeben. Setzen wir $s_1 = [x_1, y_1]$, $s_2 = [x_2^\eta, y_2]$, dann ist nach (P) $s_2 \varkappa \in Y\varkappa$. Gemäß (P_δ) geht durch s_1 genau eine Gerade $\langle m, k \rangle$ aus $L_1^\delta(s_2)$, wobei $\langle m, k \rangle^\delta = \langle k, m \rangle \in \mathscr{L}_1(s_2)$. Daraus ergibt sich $[x_1, y_1] \in \langle m, k \rangle$ und $[x_2^\eta, y_2] \in \langle k, m \rangle$. Die zweite Beziehung bedeutet aber $y_2 = m^{\omega(x_2, k)}$.

(B1) $\Rightarrow (P_\delta)$. Es sei $s_2 = [x_2', y_2]$ ein Punkt mit $s_2 \varkappa \in Y\varkappa$, also mit $x_2' \in \mathscr{R}_0$. Wir setzen $x_2^\eta = x_2'$, wo $x_2 \in \mathscr{R}'$. Ist $s_1 = [x_1, y_1]$ ein beliebiger Punkt, dann gibt es nach (B1) genau ein Paar $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ mit $[x_1, y_1] \in \langle m, k \rangle$ und $y_2 = m^{\omega(x_2, k)}$, also mit $[x_2^\eta, y_2] \in \langle k, m \rangle$. Daraus folgt $\langle k, m \rangle \in \mathscr{L}_1(s_2)$ und durch s_1 geht genau eine Gerade $\langle m, k \rangle \in \mathscr{L}_1^\delta(s_2)$.

$(P_\sigma) \Rightarrow$ (B8). Es seien $x_1, y_1 \in \mathscr{R}$ und $x_2, y_2 \in \mathscr{R}'$. Setzen wir $s_1 = [x_1, y_1]$ und $s_2 = [x_2^\eta, y_2^\eta]$, dann $s_2 \varkappa = o\varkappa$. Nach (P_σ) geht durch s_1 genau eine Gerade $\langle\langle k', m \rangle\rangle \in \mathscr{L}_2(s_2)$. Setzen wir $k^\eta = k'$ mit $k \in \mathscr{R}'$, dann ist $\langle\langle k^\eta, m \rangle\rangle^\sigma = \langle m, k^\eta \rangle \in \mathscr{L}_2(s_2)$, also $[x_2^\eta, y_2^\eta] \in \langle m, k^\eta \rangle$. Nach Definition von $\varphi(x, m)$ gilt $y_2 = k^{\varphi(x_2, m)}$ und damit (B8) ist erfüllt.

(B8) $\Rightarrow (P_\sigma)$. Sei $s_2 = [x_2', y_2']$ ein Punkt mit $s_2 \varkappa = o\varkappa$ und $s_1 = [x_1, y_1]$ ein beliebiger Punkt. Es gibt $x_2, y_2 \in \mathscr{R}'$ mit $x_2^\eta = x_2'$, $y_2^\eta = y_2'$. Nach (B8) existiert dann genau ein Paar $(m, k) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}'$ mit $[x_1, y_1] \in \langle\langle k^\eta, m \rangle\rangle$ und $y_2 = k^\varphi(x_2, m)$, woraus $[x_2^\eta, y_2^\eta] \in \langle m, k^\eta \rangle$. Wegen $\langle m, k^\eta \rangle^\sigma = \langle\langle m, k^\eta \rangle\rangle$ geht durch s_1 genau eine Gerade von $\mathscr{L}_2^\sigma(s_2)$.

$(P_\varrho) \Rightarrow$ (B2). Seien $y_1 \in \mathscr{R}$ und $x_1, x_2, y_2 \in \mathscr{R}'$. Setzen wir $s_1 = [x_1^\eta, y_1]$ und $s_2 = [x_2^\eta, y_2^\eta]$, dann $s_2 \varkappa = o\varkappa$ und $s_1 \varkappa \in Y\varkappa$. Durch s_1 geht genau eine Gerade $\langle\langle k', m' \rangle\rangle \in \mathscr{L}_3^\varrho(s_2)$ mit $k', m' \in \mathscr{R}_0$. Mithin gibt es $k, m \in \mathscr{R}'$ mit $k^\eta = k'$, $m^\eta = m'$. Wegen $\langle\langle k^\eta, m^\eta \rangle\rangle^\varrho = \langle\langle m^\eta, k^\eta \rangle\rangle \in \mathscr{L}_3(s_2)$ ist $[x_2^\eta, y_2^\eta] \in \langle m^\eta, k^\eta \rangle$ und folglich $x_2 = k^{\xi(y_2, m)}$. Aus $[x_1^\eta, y_1] \in \langle\langle k^\eta, m^\eta \rangle\rangle$ folgt $x_1 = m^{\psi(y_1, k)}$.

(B2) $\Rightarrow (P_\varrho)$. Wir wählen einen Punkt $s_2 = [x_2', y_2']$ mit $s_2 \varkappa = o\varkappa$. Dann ist $x^\eta = x'$, $y^\eta = y'$ mit $x, y \in \mathscr{R}'$. Durch einen beliebigen Punkt $s_1 = [x_1', y_1]$ mit $s_1 \varkappa \in Y\varkappa$ geht genau eine Gerade $\langle\langle k', m' \rangle\rangle$ von $\mathscr{L}_3^\varrho$. Setzen wir $x_1^\eta = x_1'$, $k^\eta = k'$ und $m^\eta = m'$, dann $\langle\langle k^\eta, m^2 \rangle\rangle^\varrho = \langle\langle m^\eta, k^\eta \rangle\rangle \in \mathscr{L}_3(s_2)$. Aus $[x_1^\eta, y_1] \in \langle\langle k^\eta, m^\eta \rangle\rangle$ und $[x_2^\eta, y_2^\eta] \in \langle\langle m^\eta, k^\eta \rangle\rangle$ folgt $x_1 = m^{\psi(y_1, k)}$ und $x_2 = k^{\xi(y_2, m)}$.

III

Im folgenden sei α eine stark n-uniforme AH-Ebene mit gleichmäßigem Parallelismus ([1], Def. 1.14, 2.1) und (X, Y, e) sei ein Koordinatensystem von α. Wir wollen zeigen, daß die Forderungen (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) in α erfüllt sind. Dabei verwenden wir einige in [1] eingeführte Bezeichnungen.

Ad (P_δ). Es sei δ: $\langle m, k\rangle \to \langle k, m\rangle$ die im Teil I definierte bijektive Abbildung von $\mathscr{L}_1$ auf sich. Nach (L1) erklären wir zur Geraden $P = \langle m, k\rangle \in \mathscr{L}_1$ eine Gerade $P^\delta = \langle k, m\rangle$, wie folgt (Abb. 1): Setzen wir schrittweise $p = P \sqcap Y$, $p' = L(p, X) \sqcap E'$, $P' = op'$, $P_1 = L(o, P)$, $p_1' = P_1 \sqcap E'$, $p_1 = L(p_1', X) \sqcap Y$, dann ist $P^\delta = L(p_1, P')$. Für einen Punkt s mit $s\varkappa \in Y\varkappa$ setzen wir $\mathscr{L}_1(s) = \{P \in \mathscr{L}_1 \mid s \in P\}$ und $\mathscr{L}_1^\delta(s) = \{P^\delta \mid P \in \mathscr{L}_1(s)\}$. Zuerst beweisen wir, daß $\mid P^\delta \cap Q^\delta \mid = 0$ für je zwei verschiedene Geraden $P, Q \in \mathscr{L}_1(s)$ gilt.

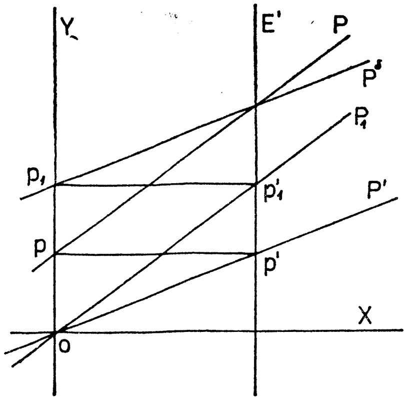

Abb. 1

Es seien also $P, Q \in \mathscr{L}_1(s)$ mit $P \neq Q$. Nach vorigem Verfahren erklären wir die Geraden P^δ und Q^δ (Die Konstruktion von Q^δ beschreiben wir mit den Symbolen Q und q gleich wie die Konstruktion von P^δ mit P und p).

1. Ist $s \in Y$, so $P^\delta \parallel Q^\delta$. Wegen $P \neq Q$ ist $P^\delta \neq Q^\delta$ und somit $\mid P^\delta \cap Q^\delta \mid = 0$.

2. Es sei $s \notin Y$.

a) Wir nehmen an, daß $P\varkappa \neq Q\varkappa$ ist. Aus unserer Konstruktion von P^δ und Q^δ folgt $P_1\varkappa \neq Q_1\varkappa$, $p_1'\varkappa \neq q_1'\varkappa$, $p_1\varkappa \neq q_1\varkappa$ und $P^\delta\varkappa \neq Q^\delta\varkappa$. Wegen $P^\delta\varkappa \parallel Q^\delta\varkappa$ ist also $\mid P^\delta \cap Q^\delta \mid = 0$.

b) Es sei $P\varkappa = Q\varkappa$.

α) Gilt $p = q$, dann gehen wir analog wie im Teil 1 vor.

β) Es sei $p \neq q$. Der Behauptung 1.10, (2), [1] nach gibt es eine natürliche Zahl $j < n$ mit $p(\simeq j)\, s$. Aus $P\varkappa, Q\varkappa \neq Y\varkappa$ folgt nach Lemma 1.12, [1] $s(\simeq j)\, Y$ und $q(\simeq j)\, s$. Wegen $s\varkappa \in Y\varkappa$ ist $j \neq 0$ und wegen $P\varkappa = Q\varkappa$ ergibt sich nach Beweis der Behauptung 1.16 $p(\sim j + 1)\, q$. Mithin gibt es eine natürliche Zahl k mit $p(\simeq j + k)\, q$.

Da $p \notin Q$ ist, so gilt nach Lemma 1.12 $p(\simeq j + k)\, Q$. Setzt man $|P \cap Q| = r^i$, dann wegen $s \in P \cap Q, p \notin Q$ und $p(\simeq j)\, s$ gilt nach der Eigenschaft S, Def. 1.13, [1] $p(\simeq i + j)\, Q$, also $i + j = k + j$ und folglich $i = k$. Da α eine AK-Ebene mit gleichmäßigem Parallelismus ist, so $P \parallel P_1, Q \parallel Q_1$ und $|P \cap Q| = r^k$ impliziert $|P_1 \cap Q_1| = r^k$ (Def. 2.1, [1]). Wegen $P_1 \neq Q_1$ ist $p_1' \neq q_1'$ und $p_1' \notin Q_1$. Aus $|P \cap Q| = r^k$ und $o(\simeq 0)\, p_1'$ ergibt sich dann nach S $p_1'(\simeq k)\, Q_1$ und gemäß Lemma 1.12, [1] folgt daraus $p_1'(\simeq k)\, q_1'$. Nach S' aus Definition 1.13, [1] und nach Behauptung 1.15, [1] gilt $p_1(\simeq k)\, q_1$, was in bezug auf Lemma 1.12, [1] $p_1(\simeq k)\, Q^\delta$ bedeutet. Aus $p(\simeq j + k)\, q$ erhält man nach S': $p'(\simeq j + k)\, q'$ und somit $p'(\simeq j + k)\, Q'$. Wird $|P' \cap Q'| = r^i$ gesetzt, so wegen $o(\simeq 0)\, p'$ gilt nach S $i = j + k$. Setzen wir $Q_1' = L(p_1, Q')$, dann $Q_1' \parallel Q^\delta$. Aus $P^\delta \parallel P'$, $Q_1' \parallel Q'$ und $p_1 \in P^\delta \cap Q_1'$ folgt dann nach Definition 2.1, [1] $|P^\delta \cap Q_1| = r^{j+k}$. Somit erhalten wir $p_1(\simeq k)\, Q^\delta$, $|Q_1' \cap Q^\delta| = 0, p_1 \in Q', p_1 \in P^\delta$, $|P^\delta \cap Q_1'| = r^{j+k}$. Wegen $1 \leqq j$ ist $k + 1 \leqq j + k$ und folglich $|P^\delta \cap Q_1'| \geqq r^{k+1}$. Nach Behauptung 1.16, [1] erhält man daraus $P^\delta \in \mathscr{T}'$ und $|P^\delta \cap Q^\delta| = 0$. Durch jeden Punkt von Y geht genau eine Gerade aus $\mathscr{L}_1^\delta(s)$ und jede Gerade aus $\mathscr{L}_1^\delta(s)$ schneidet Y in genau einem Punkt. Deswegen gibt es t^n voneniander verschinedene Geraden aus $\mathscr{L}_1^\delta(s)$. Da auf jeder Geraden genau t^n Punkte liegen, sind in den Geraden von $\mathscr{L}_1^\delta(s)$ genau t^{2n} Punkte enthalten, was aber die Anzahl aller Punkte von α ist. Da verschiedene Geraden von $\mathscr{L}_1^\delta(s)$ keinen gemeinsamen Punkt haben, geht durch jeden Punkt von α genau eine Gerade von $\mathscr{L}_1^\delta(s)$.

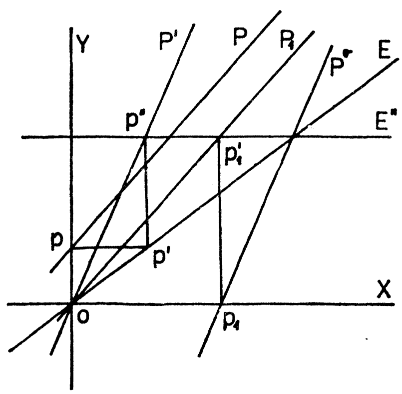

Abb. 2

Ad (P_σ). Es sei $\sigma: \langle m, k\rangle \to \langle\langle k, m\rangle\rangle$ die (bijektive) Abbildung der Menge $\mathscr{L}_4$ auf die Menge $\mathscr{L}_2$. Nach (L1) und (L2) bestimmen wir zu einer Geraden $P = \langle m, k\rangle \in \mathscr{L}_4$ eine Gerade $P^\sigma = \langle\langle k, m\rangle\rangle$, wie folgt (Abb. 2): Setzen wir $p = P \sqcap Y$, $p' = L(p, X) \sqcap E, p'' = L(p', Y) \sqcap E''$, $P' = op''$, $P_1 = L(o, P)$, $p_1' = P_1 \sqcap E''$, $p_1 = L(p_1', Y) \sqcap X$, dann ist $P^\delta = L(p_1, P')$. Für einen Punkt s mit $s\varkappa = o\varkappa$ setzen wir $\mathscr{L}_2(s) = \{P \in \mathscr{L}_4 \mid s \in P\}$ und $\mathscr{L}_2^\sigma(s) = \{P^\sigma \mid P \in \mathscr{L}_2(s)\}$. Mit oben angeführter Konstruktion läßt sich ganz analog wie in Ad (P^δ) $|P^\sigma \cap Q^\sigma| =$

$= 0$ für je zwei verschiedene Geraden $P, Q \in \mathscr{L}_2(s)$ beweisen. Unsere Behauptung (P_σ) folgt dann unmittelbar.

Ad (P_ϱ). Es sei ϱ: $\langle\langle m, k\rangle\rangle \to \langle\langle k, m\rangle\rangle$ die (bijektive) Abbildung von $\mathscr{L}_3$ auf sich. Nach (L2) erklären wir zu einer Geraden $P = \langle\langle m, k\rangle\rangle \in \mathscr{L}_3$ eine Gerade $P^\varrho = \langle\langle k, m\rangle\rangle$, wie folgt (Abb. 3): Setzen wir $p = P \sqcap X, p' = L(p, Y) \sqcap E''$, $P' = op', P_1 = L(o, p), p_1' = P_1 \sqcap E'', p_1 = L(p_1', Y) \sqcap X$, dann ist $P^\varrho = L(p_1, P')$. Für einen Punkt s mit $s\varkappa = o\varkappa$ setzen wir $\mathscr{L}_3(s) = \{P \in \mathscr{L}_3 \mid s \in P\}$ und $\mathscr{L}_3^\varrho(s) = \{P^\varrho \mid P \in \mathscr{L}_3(s)\}$. Ganz ähnlich wie in Ad (P_δ) beweisen wir, daß $| P^\varrho \cap Q^\varrho | = 0$ für je zwei verschiedene Geraden $P, Q \in \mathscr{L}_3(s)$ gilt. Jede Gerade von $\mathscr{L}_3^\varrho(s)$ schneidet X in genau einem Punkt $p_1 \in \mathscr{R}_0$ und durch jeden Punkt $p_1 \in \mathscr{R}_0$ geht genau eine Gerade von $\mathscr{L}_3^\varrho(s)$. Die Anzahl der Punkte von $\mathscr{R}_0$ ist t^{n-1}, auf jeder Geraden liegen t^n Punkte und damit enthalten alle Geraden von $\mathscr{L}_3^\varrho(s)$ genau t^{2n-1} Punkte. Dies ist aber die Anzahl aller Punkte, die benachbart mit Y sind. Da verschiedene Geraden von $\mathscr{L}_3^\varrho(s)$ keinen gemeinsamen Punkt haben, geht durch jeden mit Y benachbarten Punkt genau eine Gerade von $\mathscr{L}_3^\varrho(s)$.

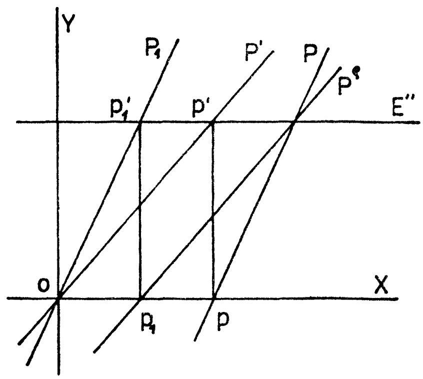

Abb. 3

Da in jeder stark n-uniformen AK-Ebene α mit gleichmäßigem Parallelismus die Forderungen (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) erfüllt sind, ist α projektiv erweiterbar. Damit ist die entsprechende Behauptung aus [1], Theorem 4.1 auf eine andere Art bewiesen. Da auch jede desarguessche AK-Ebene (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) befriedigt, erfüllen diese Forderungen alle bisher bekannten AK-Ebenen, die projektiv erweiterbar sind.

Literaturverzeichnis

[1] Drake, D. A.: *Existence of parallelism and projective extensions for strongly n-uniform near affine Hjelmslev planes.* Geometriae Dedicata 3, 191—214 (1974).

[2] Machala, F.: *Über projektive Erweiterung affiner Ebenen mit Homomorphismus.* Czech. Math. Journal 29 (104), 116—129 (1979).

Shrnutí

O JISTÉ TŘÍDĚ AFINNÍCH KLINGENBERGOVSKÝCH ROVIN, KTERÉ JSOU PROJEKTIVNĚ ROZŠÍŘITELNÉ

FRANTIŠEK MACHALA

Pomocí geometrických podmínek (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) je stanovena třída AK-rovin, které jsou projek-itvně rozšířitelné a je ukázáno, že silně n-uniformní afinní Hjelmslevovské roviny s rovnoměrnou rovnoběžností splňují tyto podmínky. Protože také desarguesovské AK-roviny splňují (P_δ), (P_σ), $P_\varrho)$, náležejí uvažované třídě všechny doposud známé projektivně rozšířitelné AK-roviny.

Резюме

ОБ ОДНОМ КЛАССУ ПРОЕКТИВНО РАСШИРИТЕЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ КЛИНГЕНБЕРГА

ФРАНТИШЕК МАХАЛА

При помощи геометрических условий (P_δ), (P_σ), (P_ϱ) определяется класс АК-плоскостей, которые можно расширить в проективные плоскости Клингенберга. Показывается, что сильно n-униформные аффинные ельмслевовы плоскости с равномерной параллельностей отвечают этим условиям. Потому, что дезарговы АК-плоскости тоже выполняют (P_δ), (P_σ), (P_ϱ), принадлежают нашему классу все до сих пор знакомые проективно расширительные АК-плоскости.